

Szegedi Tudományegyetem, TTIK
Kísérleti Fizikai Tanszék

SZAKDOLGOZAT

Eikonál egyenlet az általános relativitáselméletben

Készítette: **Bombolya László**
Fizika BSc szakos hallgató

Témavezető: **Dr. Keresztes Zoltán**
tudományos segédmunkatárs
SZTE Elméleti Fizikai Tanszék és
SZTE Kísérleti Fizikai Tanszék

Szeged
2011

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés	2
2. Hamilton Jacobi módszer	2
3. Az eikonál egyenlet gravitációs térben	5
4. Eikonál egyenlet alkalmazása	8
4.1. Schwarzschild téridő	8
4.1.1. Fényelhajlás tárgyalása az eikonál egyenlet segítségével	13
4.2. Kerr téridő	15
4.2.1. A neutrínó-antineutrínó annihiláció	17
5. Összefoglalás	25
6. Köszönetnyilvánítás	26

1. Bevezetés

Az általános relativitáselmélet egy jó értelmezést ad az asztrofizikai folyamatok megértésére. Mint például a nagy tömegű csillagok fejlődésének leírására, melyekből később vagy neutron csillag vagy fekete lyuk alakul ki, de az univerzum keletkezését is segít megérteni. Egy ilyen görbült térben tudjuk vizsgálni a kisebb-nagyobb objektumok mozgását vagy más objektumokra kifejtett hatását.

Az általános relativitáselméletben fontos szerepet tölt be az eikonál egyenlet és annak alkalmazásai. Ezen egyenlet segítségével meghatározható adott téridőben, mint például Schwarzschild vagy Kerr téridőben a részecskék mozgása.

A Schwarzschild téridő egy nagy tömegű objektum körüli gömbszimmetrikus gravitációs mezőt ír le egy rá jellemző metrikával. Ezek az objektumok lehetnek csillagok vagy fekete lyukak. A Kerr téridő hasonló a Schwarzschild téridőhöz, az eltérés nagyjából annyiban nyilvánul meg, hogy Kerr téridőben az objektum forgásban van.

Schwarzschild téridőben a fényelhajlását vizsgálom nagy tömegű objektum körül, amihez az eikonál egyenlet jó kiinduló pontot ad [5]. A dolgozatomban ezt mutatom be, mint egyik alkalmazás. Kerr téridőben behatóbban vizsgálom a neutrínó és antineutrínó nagy energiájú annihilációját. Ezen folyamatban ($\nu + \bar{\nu} \rightarrow e^+ + e^-$) keletkezik egy elektron-pozitron pár. Ennek a folyamatnak a gamma kitörések (GRB, Gamma Ray Burst) megértésében lehet szerepe [4]. A Kerr téridőben az EDR (Energy Deposition Rate) számítása egy alkalmazása az eikonál egyenletnek [1]. Az EDR az a teljesítmény, amit térfogategységekben a neutrínó-antineutrínó párok annihilációja során keletkező elektron-pozitron párok elvisznek (4.83)

2. Hamilton Jacobi módszer

Ebben a fejezetben a Hamilton-Jacobi módszert ismertetem, amely a kanonikus egyenletek megoldására vonatkozó módszer.

Egy mechanikai rendszer mozgásegyenlete megadható Lagrange függvénnyel. Legyen n szabadsági fokú rendszer melyben a következő lesz a Lagrange függvény [7]:

$$L(q, \dot{q}, t) = T(\dot{q}) - V(q, t) \quad (2.1)$$

ahol T kinetikus energia, V potenciális energia, $q = (q_1, q_2, \dots, q_n)$ az általános koordináták, $\dot{q} = (\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n)$ az általános sebességek.

A legkisebb hatás elve segítségével a mozgásegyenlet mechanikájának elve levezethető. Eszerint két t_1 és t_2 időpillanatokhoz tartozó q^1 és q^2 hely koordináta között a rendszer mozgása a következőképpen írható:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt \quad (2.2)$$

Ez a hatásfüggvény szélsőértéket vesz fel, aminek a szükséges feltétele, hogy az integrál variációja nulla legyen, ekkor:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt = 0 \quad (2.3)$$

Most már levezethetők a Lagrange-féle másodfajú mozgásegyenleteket:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad (2.4)$$

ahol $i = 1, 2, \dots, n$.

Ezután minden q_i koordinátához hozzá rendelhető az általános impulzus, ehhez a következőt kell bevezetni:

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \quad (2.5)$$

ahol $i = 1, 2, \dots, n$. Ez az impulzus derékszögű koordináták és konzervatív rendszerek esetén megegyezik a közönséges impulzusokkal.

A Lagrange-egyenlet következőképp írható:

$$\dot{p}_i = \frac{\partial L}{\partial q_i} \quad (2.6)$$

Az előző két egyenletet behelyettesítve az $L(q, \dot{q}, t)$ függvény teljes differenciálját felírva:

$$d \left(\sum_i p_i \dot{q}_i - L \right) = \sum (\dot{q}_i dp_i - \dot{p}_i dq_i) - \frac{\partial L}{\partial t} dt \quad (2.7)$$

Ezt követően a rendszer fizikai állapotának jellemzésére a Hamilton-függvényt bevezetem:

$$H = \sum_i p_i \dot{q}_i - L \quad (2.8)$$

Ebből látszik, hogy a $H = H(p, q, \dot{q}, t)$ függésű. A fenti p_i összefüggéssel a \dot{q}_i -k kifejezhetőek ezért $H = H(p, q, t)$ függésű lesz. Most felírva a Hamilton - függvény teljes differenciálját:

$$dH = \sum \left(\frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i + \frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i \right) + \frac{\partial H}{\partial t} dt \quad (2.9)$$

Összehasonlítva a Lagrange függvény teljes differenciáljával, a következő két összefüggés írható fel:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad (2.10)$$

és

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (2.11)$$

Ezt a két egyenletet Hamilton-féle kanonikus egyenleteknek nevezzük. A p_i -t q_i -hez kanonikusan konjugált impulzusnak nevezik. A legnagyobb különbség a Lagrange és Hamilton egyenletek között, hogy az elsőben még másodrendű differenciálegyenleteket kell megoldani addig az utóbbiban elsőrendűeket, de kétszer annyi az egyenletek száma.

Konzervatív rendszerekre azaz, ha a kényszerfeltételek az időtől függetlenek, akkor a Hamilton függvény a kinetikus és potenciális energia összege, ami azt jelenti, hogy H a rendszer mechanikai energiája. Ha az időtől explicite nem függ, akkor a $H = H(p, q) = konstans$. Viszont, ha az időtől explicite módon függ, akkor új változó bevezetésével, egy olyan H' Hamilton függvényre térek át, amely az időtől explicite módon már nem függ. Ekkor új konjugált változópárt kell bevezetni és ebből következően a rendszer szabadsági fokainak a száma egyel nőn fog, amire az (2.11, 2.10) egyenletek azonosan teljesülnek. Azaz egy időtől függő Hamiltoni-rendszer ekvivalens egy olyan időtől független rendszerrel, amelyben eggyel több szabadsági fok van, ez fordítva is igaz lesz. Az egyik legtöbbit használt megoldási módszere ezeknek a mozgásegyenleteknek a változók transzformálása. A transzformációnál olyan változókat kell bevezetni a $p = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ és a $q = (q_1, q_2, \dots, q_n)$ helyett, hogy az egyenlet könnyebben integrálható legyen, a változók legyenek a következők: $P = (P_1, P_2, \dots, P_n)$ és $Q = (Q_1, Q_2, \dots, Q_n)$. Ahhoz, hogy az új változók segítségével is kanonikus egyenleteket legyenek, P -re és Q -ra is kanonikus transzformációt kell alkalmazni. A kanonikus transzformációk alakja:

$$P_i = P_i(p, q, t) \quad (2.12)$$

$$Q_i = Q_i(p, q, t) \quad (2.13)$$

Ezekre a változókra is kell teljesülnie a kanonikus egyenleteknek ezért a következő feltételnek kell eleget tenniük a P és Q változóknak, ami a legkisebb hatás elvéből következik [7]:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left[\sum P_i \dot{Q}_i - H'(P, Q, t) \right] dt = 0 \quad (2.14)$$

ahol $H'(P, Q, t)$ a transzformált Hamilton függvény. Továbbá belátható, hogy szükséges és elégséges feltétele annak, hogy egy transzformáció kanonikus legyen az, hogy:

$$\sum_i p_i \dot{q}_i - H = \sum_i P_i \dot{Q}_i - H' + \frac{dF}{dt} \quad (2.15)$$

ahol az F a koordináták, impulzusok és az idő tetszőleges függvénye, ezt a függvényt a transzformáció alkotófüggvényének is nevezzük. Mivel F függvény szabadon választható ezért a fenti feltétel sokféleképpen teljesülhet. Így különféle kanonikus transzformációk definiálhatóak.

Ezért lehetséges, hogy a régi p, q és az új P, Q változók az F függvényben vegyesen is szerepelhetnek, például: $F(p, Q, t)$. Mivel az alkotófüggvény szabadon választható és a kanonikus transzformációk alkalmazásával a (2.11, 2.10) egyenletek megoldása a következő alakban keresendő. Bevezetve olyan új P_i és Q_i változókat, amelyekre:

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial H'}{\partial P_i} \quad (2.16)$$

$$\dot{P}_i = -\frac{\partial H'}{\partial Q_i} \quad (2.17)$$

kanonikus egyenletek könnyen integrálhatóak. A legkézenfekvőbb eset az, hogyha $H' = 0$, mert ekkor $\dot{Q}_i = 0$ és $\dot{P}_i = 0$ egyenletek állnak fent, ezek könnyen integrálhatóak. Ezért most olyan kanonikus transzformációt keresek, amire teljesül a $H' = 0$. Az ehhez a transzformációhoz tartozó alkotó függvény legyen $S(q, Q, t)$. Az ebből származtatható kanonikus transzformációk:

$$p_i = \frac{\partial S(q, Q, t)}{\partial q_i} \quad (2.18)$$

$$P_i = \frac{-\partial S(q, Q, t)}{\partial Q_i} \quad (2.19)$$

Mivel azt szeretném, hogy $H' = 0$ legyen, ezért S -et úgy kell megválasztani, hogy:

$$H(p, q, t) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0 \quad (2.20)$$

teljesüljön. A H -ban lévő p_i változók a (2.18, 2.19) alapján $\partial S/\partial q_i$ -vel kifejezhetők. Így a következő egyenlet adódik:

$$H\left(\frac{\partial S}{\partial q_i}, q, t\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0 \quad (2.21)$$

Ezt Hamilton-Jacobi féle parciális differenciálegyenletnek nevezünk [7].

3. Az eikonál egyenlet gravitációs térben

Ebben a fejezetben szabad részecske mozgásának a leírását határozom meg az eikonál egyenlet segítségével.

Egy szabad részecske mozgását egy gravitációs erőterben a legkisebb hatás elvének segítségével határozható meg [3]:

$$\delta S = -mc\delta \int ds = 0 \quad (3.1)$$

Ez az egyenlet azt prezentálja, hogy a részecske úgy mozog, hogy a világvonala két adott világpont között szélsőértéket vesz fel. Az euklideszi térben ennek a mozgásnak egyenes vonalú egyenletes mozgás felel meg.

A gravitációs tér hatása a téridő metrikájának a módosulását vonja maga után a gravitáció menteshez képest. A részecske mozgását gravitációs térben a (3.1) képlet segítségével meghatározom. A részecske úgy mozog, hogy a világpontja által leírt görbe extrémális legyen, azaz az $x^i = x^i(s)$ két közeli pontjába húzott érintővektorok párhuzamosak. Legyenek ezek a pontok P és P' , amelyekhez s és $s' = s + ds$ paraméterek tartoznak, a $K^i = dx^i/ds$ érintővektorok párhuzamosak egymással [9]:

$$K(\lambda') = a(s, ds) K'(s) \quad (3.2)$$

Ebben az esetben az $a(s, ds)$ arányossági tényező csak kicsit különbözik 1-től, ezért 1 körül sorba fejtvé azt kapom, hogy $a(s, ds) = 1 + b(s) ds$. Ezt visszahelyettesítve a (3.2) egyenletbe és a ds -ben másod- vagy magasabb rendű tagokat elhanyagolva, azt kapom [9]:

$$K(s, ds) = K'(s) + b(s) K'(s) ds \quad (3.3)$$

ezt átrendezve:

$$\frac{DK(s)}{ds} = b(s) K(s) \quad (3.4)$$

vagy (3.3) kovariáns derivált alakban:

$$\frac{dK^i}{ds} + \Gamma_{kl}^i K^k K^l = b K^i \quad (3.5)$$

alakban felírva. Ezek után tegyük fel, hogy $a(s, ds) = 1$, amiből az következik, hogy $b(s) = 0$ és $K^i = dx^i/ds$ behelyettesítve, $x^i(s)$ -re a következő egyenletet írva:

$$\frac{d^2 x^i}{ds^2} + \Gamma_{kl}^i \frac{dx^k}{ds} \frac{dx^l}{ds} = 0 \quad (3.6)$$

Ez lesz a részecske mozgás egyenlete (amit geodetikus egyenletnek is neveznek), ami megmutatja, hogy a pálya pontjaiba húzott érintővektorok párhuzamosak és egyenlők lesznek. Ezért a görbe paraméterezését úgy kell megválasztani, hogy az érintővektorok hossza állandó legyen a görbe mentén, ami annyit jelent [9]:

$$K^2 = g_{kl} \frac{dx^k}{ds} \frac{dx^l}{ds} = 0 \quad (3.7)$$

A görbe ilyen paraméterezésével a K^2 paraméteret affin paraméterének nevezzük.

A (3.6) egyenletben szereplő Γ_{kl}^i mennyiségek meghatározzák a mozgást. A rendszer bizonyos koordinátázásával a Christoffel szimbólumok nullát adnak, ami lokálisan egy infinitezimálisan kicsiny tér részben a gravitáció kikapcsolását jelenti. Az, hogy ilyen választás lehet-

séges, az ekvivalencia elv teszi lehetővé.

A gravitációs térben a részecske négyesimpulzusa a következőképp definiálható [3]:

$$p^i = mcu^i \quad (3.8)$$

ahol c a fénysebesség és m a részecske tömege. Az impulzus négyzete:

$$p_i p^i = m^2 c^2 \quad (3.9)$$

ahol a p^i helyett $-\partial S/\partial x^i$ írható. Ekkor a gravitációs térben mozgó részecske Hamilton-Jacobi egyenlete [3]:

$$g^{ik} \frac{\partial S}{\partial x^i} \frac{\partial S}{\partial x^k} - m^2 c^2 = 0 \quad (3.10)$$

Egy fényjel terjedésének leírására a (3.6) geodetikus egyenletnek az ilyen alakban történő felírása nem alkalmas, mivel a fénysugár terjedésének világvonala mentén az ívelem nullával egyenlő, ami miatt az egyenlet minden tagja végtelenné válik. Ahhoz, hogy megadjam erre az esetre a megfelelő alakú mozgásegyenletet, figyelembe kell venni, hogy a geometriai optikában a fénysugár terjedésének irányát a hullámvektorok határozzák meg, amelyek párhuzamosak a sugár érintő irányú egységvektorával. A négydimenziós hullámszám vektor:

$$k^i = \frac{dx^i}{d\lambda} \quad (3.11)$$

alakban írható, ahol λ a sugár mentén változó paraméter. Mivel a speciális relativitáselméletben a fény vákuumbeli terjedés során a hullámszám vektor nem változik a sugár mentén, azaz $dk^i = 0$. Ekkor gravitációs térben a hullámszám differenciálja a következő alakú lesz:

$$Dk^i = 0 \quad (3.12)$$

Vagyis felírható [3]:

$$\frac{dk^i}{d\lambda} + \Gamma_{kl}^i dk^k dk^l = 0 \quad (3.13)$$

Mivel a hullámszám négyes vektorának a négyzete nulla:

$$k_i k^i = 0 \quad (3.14)$$

a k_i helyére $\partial\Psi/\partial x^i$ -t helyettesítve a gravitációs térben érvényes eikonál egyenlet adódik:

$$g^{ik} \frac{\partial\Psi}{\partial x^i} \frac{\partial\Psi}{\partial x^k} = 0 \quad (3.15)$$

ami a Hamilton-Jacobi egyenletet adja vissza, ha $m = 0$ és $S = \Psi$ helyettesítést alkalmazok [3]. Továbbá Ψ a komplex elektromágneses négyes-potenciál $A_a = \text{Re} [B_a \exp(i\Psi)]$ fázisa. A

Ψ függvényt nevezik eikonálnak.

Ez az egyenlet segít majd a részecskék mozgásának meghatározásában, ha ismerem a téridő metrikáját.

4. Eikonál egyenlet alkalmazása

4.1. Schwarzschild téridő

Az eikonál egyenlet első alkalmazásához szükséges bevezetni a Schwarzschild téridőt leíró egyenletet. A Schwarzschild téridő származtatását [6] alapján tárgyalom.

A Schwarzschild tér egy olyan metrikus tér, g_{ab} metrikával, ami reprezentál egy nehéz objektum (például egy csillag) körüli sztatikus gömbszimmetrikus gravitációs mezőt. Kezdetnek a legjobb konstruálni egy olyan általános metrikát, ami a sztatikus téridőre jellemző.

A sztatikus téridő x^t időszerű koordinátájára jellemzők a következő tulajdonságok:

- a) A metrika minden komponense független az x^t -től
- b) Az ívelemnégyszet (ds^2) invariáns az $x^t \rightarrow -x^t$ felcserélésére.

Az a)-ból nem feltétlen következik a b), ezt jól mutatja egy forgó csillagnak az esete: az idő ellentettje megváltoztatja a forgást, de a metrika komponensei időben állandóak.

Az ívelemnégyszet általános alakjából indulok ki:

$$ds^2 = g_{ab} dx^a dx^b \quad (4.1)$$

Ebben olyan x^a koordináta halmazt keresünk, amelyben a g_{ab} metrika nem függ az időszerű koordinátától és az ívelemnégyszet invariáns a $x^t \rightarrow -x^t$ transzformációra. Mint például egy olyan sztatikus metrika, amiben a ds^2 csak az x^i térszerű koordináták forgásra invariáns mennyiségeitől és azok differenciáljától függ.

Azonban csak egy kicsit nehezebb kihozni az általános formáját a térbeli izotróp metrikának anélkül, hogy ragaszkodni kell a sztatikus formához. Így ezt az általánosabb alakot kezdem felállítani. Majd csak ez után teszem hozzá azt a megszorítást, hogy a metrika sztatikus. A térszerű koordináták forgásra invariáns mennyiségei és differenciáljai tehát:

$$\vec{x} \cdot \vec{x} \equiv r^2, \quad d\vec{x} \cdot d\vec{x}, \quad \vec{x} \cdot d\vec{x}, \quad (4.2)$$

ahol az $\vec{x} \equiv (x^r, x^\theta, x^\varphi)$ és bevezetem az r koordinátát. Ha az x^t időszerű koordinátát, t -vel jelölöm, akkor a térben izotróp metrika legegyszerűbb előállítás:

$$ds^2 = -A(t, r) dt^2 + B(t, r) dt \cdot \vec{x} \cdot d\vec{x} + C(t, r) (\vec{x} \cdot d\vec{x})^2 + D(t, r) d\vec{x}^2, \quad (4.3)$$

ahol A, B, C és D tetszőleges függvényei az r és t koordinátáknak.

$$x^r = r \sin \theta \cos \varphi, \quad x^\theta = r \sin \theta \sin \varphi, \quad x^\varphi = r \cos \theta \quad (4.4)$$

Így azt kapom, hogy

$$\vec{x} \cdot \vec{x} = r^2, \quad \vec{x} \cdot d\vec{x} = r dr, \quad d\vec{x} \cdot d\vec{x} = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2$$

Vagyis az általános metrika (4.3) a következő formát ölti:

$$ds^2 = -A(t, r) dt^2 + B(t, r) r dt dr + C(t, r) r^2 dr^2 + D(t, r) (dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2) \quad (4.5)$$

Ahol A, B, C, D függvények r függését figyelembe véve, bevezethető egy új sugár menti koordináta $\bar{r} = D(t, r)$. Valamint előbb említett tetszőleges függvényeket átírom az új változók, t és \bar{r} szerint. Ekkor a metrika a következő alakú lesz:

$$ds^2 = -A(t, \bar{r}) dt^2 + B(t, \bar{r}) dt d\bar{r} + C(t, \bar{r}) d\bar{r}^2 + D(t, \bar{r}) (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \quad (4.6)$$

Ezek után a t helyett bevezetve egy új időszerű koordinátát \bar{t} , melyet a következő összefüggés definiál:

$$d\bar{t} = \Omega(t, \bar{r}) [A(t, \bar{r}) dt - \frac{1}{2} B(t, \bar{r}) d\bar{r}] \quad (4.7)$$

ahol $\Omega(t, \bar{r})$ egy integráló tényező, mely a jobb oldalt egzakt differenciállá teszi. Ezt négyzetre emelve majd átrendezve kapom:

$$A dt^2 - B dt d\bar{r} = \frac{1}{A\Omega^2} d\bar{t}^2 - \frac{B}{4A} d\bar{r}^2 \quad (4.8)$$

Az új függvények meghatározásával $\bar{A} = 1/(A\Omega^2)$ és $\bar{B} = C + B/(4A)$, a metrika diagonálissá válik. A továbbiakban az egyszerűség kedvéért az új változókról elhagyom a felülvonást.

$$ds^2 = -A(t, r) dt^2 + B(t, r) dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \quad (4.9)$$

Így az általános izotróp metrikát két r és t -től függő függvény határozza meg: $A(t, r)$ és $B(t, r)$. Látható, hogy az r és t megadásával az ívelemnégyszet kiszámítható gömbi felületek esetén a (4.9) segítségével. Valójában az ívelemnégyszet azt mutatja, hogy egy ilyen felület által határolt terület nagysága $4\pi r^2$. Azonban mivel $B(t, r)$ nem egységnyi, nem vonható le az a következtetés, hogy r a radiális távolság.

Végül ahhoz, hogy megkapjam a legáltalánosabb állandó izotróp metrikát szükséges, hogy a g_{ab} elemei függetlenek legyenek az időszerű koordinátától, ami annyit jelent, hogy A és B csak r -től függőek lehetnek. Ez a Birkhoff tétel következménye [10]:

$$ds^2 = -A(r) dt^2 + B(r) dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \quad (4.10)$$

Ebből azonnal látszik, hogy ds^2 a $t \rightarrow -t$ -re invariáns, így ez egy általános sztatikus térben izotróp téridő metrikáját írja le. A továbbiakban $A(r)$ és $B(r)$ függvényeket fogom meghatározni.

Ehhez az Einstein féle téregyenletből indulok ki:

$$G_{ab} = 8\pi G \cdot T_{ab} \quad (4.11)$$

ahol T_{ab} az energia impulzus tenzor, aminek vákuumban nullát kell adnia, G_{ab} az Einstein tenzor és G pedig a gravitációs állandó. A Christoffel szimbólumok a következőképpen számolhatók a metrika segítségével:

$$\Gamma_{bc}^a = \frac{1}{2} g^{ad} (\partial_b g_{dc} + \partial_c g_{db} - \partial_d g_{bc}) \quad (4.12)$$

A metrika diagonalitása miatt nem kell minden tagot kiszámolni. Azokra a Christoffel szimbólumokra, amiknek a felső indexe t , az teljesül, hogy

$$\Gamma_{bc}^t = \frac{1}{2} \left(\frac{-1}{A(r)} \right) \partial_r (-A(r)) \delta_b^r \delta_c^t + \frac{1}{2} \left(\frac{-1}{A(r)} \right) \partial_r (-A(r)) \delta_c^r \delta_b^t = \frac{A'(r)}{2A(r)} (\delta_b^r \delta_c^t + \delta_c^r \delta_b^t) \quad (4.13)$$

ahol az utolsó tag kiesik, mert nincs időfüggés. Ez alapján az ilyen alakú komponensek közül azok nem lesznek nullák amelyekre $b = r$ és $c = t$ vagy $b = t$ és $c = r$ teljesül. Ezek alakja pedig:

$$\Gamma_{rt}^t = \Gamma_{tr}^t = \frac{A'(r)}{2A(r)} \quad (4.14)$$

Ez után hasonló megfontolások alapján a Christoffel szimbólumok további nem nulla elemei:

$$\begin{aligned} \Gamma_{tt}^r &= \frac{B(r) B'(r)}{2}, \quad \Gamma_{rr}^r = -\frac{B'(r)}{2B(r)}, \quad \Gamma_{\theta\theta}^r = -rB(r), \quad \Gamma_{\varphi\varphi}^r = -rB(r) \sin^2 \theta \\ \Gamma_{r\theta}^\theta &= \Gamma_{\theta r}^\theta = \frac{1}{r}, \quad \Gamma_{\varphi\varphi}^\theta = -\sin \theta \cos \theta \\ \Gamma_{r\varphi}^\varphi &= \Gamma_{\varphi r}^\varphi = \frac{1}{r}, \quad \Gamma_{\theta\varphi}^\varphi = \Gamma_{\varphi\theta}^\varphi = \cot \theta \end{aligned} \quad (4.15)$$

A Christoffel szimbólumokból ki lehet számolni a Ricci tenzort, ami

$$R_{ab} = \partial_a \Gamma_{bb}^a - \partial_b \Gamma_{ba}^a + \Gamma_{ai}^a \Gamma_{bb}^i - \Gamma_{bi}^a \Gamma_{ba}^i \quad (4.16)$$

A Ricci tenzor első komponense az R_{tt} a következőképpen néz ki:

$$\begin{aligned} R_{tt} &= \partial_a \Gamma_{tt}^a - \partial_t \Gamma_{ta}^a + \Gamma_{ai}^a \Gamma_{tt}^i - \Gamma_{ti}^a \Gamma_{ta}^i \\ &= \partial_r \Gamma_{tt}^r + (\Gamma_{tr}^t + \Gamma_{rr}^r + \Gamma_{\theta r}^\theta + \Gamma_{\varphi r}^\varphi) \Gamma_{tt}^r - \Gamma_{tr}^t \Gamma_{tt}^r - \Gamma_{rt}^t \Gamma_{tt}^r \end{aligned} \quad (4.17)$$

Behelyettesítve a Christoffel szimbólumokat (4.14)-ből és (4.15)-ből, azt kapom, hogy a nem eltűnő komponensek:

$$R_{tt} = \frac{A''(r)}{2B(r)} - \frac{A'(r)}{4B(r)} \left(\frac{A'(r)}{A(r)} + \frac{B'(r)}{B(r)} \right) + \frac{A'(r)}{rB(r)} \quad (4.18)$$

$$R_{rr} = -\frac{A''(r)}{2A(r)} + \frac{A'(r)}{4A(r)} \left(\frac{A'(r)}{A(r)} + \frac{B'(r)}{B(r)} \right) + \frac{B'(r)}{rB(r)}$$

$$R_{\theta\theta} = -\frac{1}{B(r)} - \frac{r}{2B(r)} \left(\frac{A'(r)}{A(r)} - \frac{B'(r)}{B(r)} \right) + 1 \quad (4.19)$$

$$R_{\varphi\varphi} = R_{\theta\theta} \sin^2 \theta$$

A Ricci tenzor segítségével megadva a Einstein tenzort:

$$G_{ab} = R_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} R \quad (4.20)$$

Mivel vákuumban az energia impulzus tenzor nulla ($T_{ab} = 0$), ezért a vákuum Einstein egyenlete a következő lesz:

$$R_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} R = 0 \quad (4.21)$$

Ezt kell megoldani, ahol $R = g^{ab} R_{ab}$. Az Einstein egyenlet ezen alakját (4.21) balról beszorzom g^{ab} -val, felhasználva azt, hogy $g^{ab} g_{ab} = 4$. Ezt követően a tagokat összevonva az egyenlet a következő alakú lesz:

$$R_{ab} = 0 \quad (4.22)$$

Ez azt jelenti, hogy vákuumban eltűnik a Ricci tenzor. Ennek segítségével a Ricci tenzor komponenseiből (4.18), (4.19) kifejezve az $A(r)$ -t és $B(r)$ -t.

$$0 = \frac{A''(r)}{2B(r)} - \frac{A'(r)}{4B(r)} \left(\frac{A'(r)}{A(r)} + \frac{B'(r)}{B(r)} \right) + \frac{A'(r)}{rB(r)} \quad (4.23)$$

$$0 = -\frac{A''(r)}{2A(r)} + \frac{A'(r)}{4A(r)} \left(\frac{A'(r)}{A(r)} + \frac{B'(r)}{B(r)} \right) + \frac{B'(r)}{rB(r)} \quad (4.24)$$

$$0 = -\frac{1}{B(r)} - \frac{r}{2B(r)} \left(\frac{A'(r)}{A(r)} - \frac{B'(r)}{B(r)} \right) + 1 \quad (4.25)$$

Ha most $B(r) \cdot (4.23) + A(r) \cdot (4.24)$ -et végrehajtom

$$0 = \frac{A(r)}{r} \left(\frac{A'(r)}{A(r)} - \frac{B'(r)}{B(r)} \right) \quad (4.26)$$

Ha $A(r) = 0$, akkor szinguláris lenne a metrika, ezért tegyük fel, hogy $A(r) \neq 0$ és $r \neq \infty$. Ekkor csak

$$\frac{A'(r)}{A(r)} - \frac{B'(r)}{B(r)} = 0 \quad (4.27)$$

kifejezést kell megvizsgálni. Ezt beszorozva $A(r) \cdot B(r)$ -el:

$$0 = A'(r) B(r) + B'(r) A(r) = (AB)' \Rightarrow AB = \alpha \quad (4.28)$$

Ezt a (4.25) egyenletbe behelyettesítve:

$$0 = -\frac{A(r)}{\alpha} + 1 - \frac{A'(r)}{\alpha} \quad (4.29)$$

ebből:

$$(rA)' = \alpha \Rightarrow rA = \alpha r + \beta \quad (4.30)$$

Ekkor azt kapom $A(r)$ -re és $B(r)$ -re:

$$A(r) = \alpha \left(1 + \frac{\beta}{r} \right) \quad (4.31)$$

$$B(r) = \alpha \left(1 + \frac{\beta}{r} \right)^{-1} \quad (4.32)$$

ahol $\alpha = A(r) B(r)$ és β integrációs konstans. Ha gyenge gravitációs tér van, akkor határesetben az $A(r)$ -nek ezzel kell megegyeznie [6]:

$$\frac{A(r)}{c^2} \rightarrow 1 + \frac{2\Phi}{c^2} \quad (4.33)$$

ahol Φ a Newtoni gravitációs potenciál, ami $\Phi = -GM/r$. Itt M a gömbszerű szimmetrikus test tömege, G a gravitációs állandó és c a fénysebesség. (4.33) jobb oldalát behelyettesítve $A(r)$ helyére az kapom, hogy:

$$c^2 + \frac{2GM}{r} = \alpha + \alpha \frac{\beta}{r}$$

Ebből látszik, hogy $\alpha = c^2$ és a $\beta = 2GM/c^2$. Most már megadható $A(r)$ és $B(r)$ pontos alakját, amiket behelyettesítve a (4.10) egyenletbe megkapom a Schwarzschild metrikát egy M tömeg körüli üres téridőben:

$$ds^2 = -c^2 \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 \quad (4.34)$$

A metrika ezen alakját felhasználva arra, hogy megvizsgáljam a fizikát egy gömbszerű objektum körül, különös tekintettel a szabadon eső tömeges részecskék és fotonok pályájára. A metrika elemei az $r = 2GM/c^2$ sugárnál a végtelenbe tartanak, ezt a sugarat Schwarzschild sugárnak szokták nevezni. Ha a masszív testek felülete összehúzódik egy ekkora sugarú gömbbe, akkor az objektumból Schwarzschild fekete lyuk lesz.

Látható, hogy a Schwarzschild féle ívelemnégyzet az $r = 0$ -ban fizikai szingularitás van és $r = 2GM/c^2$ -ben pedig koordináta szinguláris és ez utóbbi kifejezést Swarzschild sugárnak nevezzük, erre a következő jelölést szokták használni: r_g . Az Eddington–Finkelstein koordinátázásban a metrika nem lesz szinguláris a $r_g = 2GM/c^2$ helyen [6]. A Schwarzschild sugár nagysága a Nap esetében:

$$r_g = \frac{2GM_\odot}{c^2} = 2,95 \text{ km} \quad (4.35)$$

Ez egyértelműen kisebb, mint a Nap sugara ($R_\odot = 7 \cdot 10^5 \text{ km}$). Hasonlóan kiszámítható egy protonra is. Az látszik, hogy ezen valós objektumoknál a Schwarzschild sugár a testen belül fekszik, ahol a vákuum tér egyenletek nem alkalmazhatóak. De bizonyos kompakt objektumoknál a sugár jóval nagyobb, mint az objektum maga [6].

4.1.1. Fényelhajlás tárgyalása az eikonál egyenlet segítségével

Ebben a fejezetben a fényelhajlás szögét vizsgálom meg egy sztatikus gömbszimmetrikus gravitációs térben. Itt az előző fejezetben meghatározott Schwarzschild metrikát használom (4.34). A számolást az eikonál egyenletből (3.15) kiindulva kezdem, ami a fény útját írja le.

Itt a komplex elektromágneses négyes potenciál $A_a = \text{Re}[B_a \exp(i\Psi)]$ és a hullámszám vektor $k_a = \partial\Psi/\partial x^a$. A komplex amplitúdó lassan változik a geometriai optikai közelítés miatt. Az általános formája az amplitúdónak a polarizáció vektor. k^a integrál görbéje határozza meg a fénysugarakat és ezek a görbék merőlegesek a fény hullámfrontjára. Az eikonál egyenlet a feltétele, hogy a hullám vektor nulla legyen. Továbbá a vákuumbeli Maxwell egyenleteknek azt kell megadniuk, hogy a fényutak végig a null geodetikus mentén fussanak, $k^a \nabla k^b = 0$, valamint a polarizáció vektor merőleges a fénysugarakra és hasonlóan terjed [5]. A pályagörbét úgy választom meg, hogy az egyenlítő síkjában legyen, $\theta = \pi/2$. A probléma szimmetriájának következtében az eikonál függvény:

$$\Psi = -Et + L\varphi + \psi_r(r) \quad (4.36)$$

ahol $L = bE$ az impulzus momentum, ebben b egy impakt paraméter és E pedig az energiát

jelöli. Bevezetve az $\varepsilon = Gmb^{-1}/c^2$ [5] paramétert az ismeretlen radiális függvényre adódik:

$$\psi_r = E \int C(r) dr \quad (4.37)$$

ahol

$$C(r) = \pm \sqrt{\frac{r^4}{(r^2 - 2b\varepsilon r)^2} - \frac{b^2}{r^2 - 2b\varepsilon r}} \quad (4.38)$$

A negatív előjelet akkor választom a gyök elé, ha r csökken (azaz a foton a lencséző objektum felé tart) és pozitív előjelet, ha r növekszik (a foton távolodik a lencséző objektumtól). Ez a fajta választás azt biztosítja, hogy $d\psi_r = EC(r) dr > 0$, ezért mindegy, hogy a foton közeledik vagy távolodik. Ha $2b\varepsilon/r$ kicsi, akkor az (4.38) egyenlet gyök alatti részét sorba fejtvé lineáris rendig [9]:

$$C(r) = \pm \sqrt{1 + \frac{4b\varepsilon}{r} - \frac{b^2}{r^2} \left(1 + \frac{2b\varepsilon}{r}\right)} \quad (4.39)$$

Ezt visszahelyettesítve a (4.37)-be és kiintegrálva:

$$\psi_r(r) = \psi_r^{(0)} + b\varepsilon \cdot \arccos h \frac{r}{b} \quad (4.40)$$

Ahol $\psi_r^{(0)}$ a foton egyenes pályájának felel meg. A fénysugár egy messzi R pontból érkezik a legközelebb eső pontba, ami $r = b$ és ezt követően vissza megy, akkor a ψ_r megváltozása:

$$\Delta\psi_r = \Delta\psi_r^{(0)} + 2b\varepsilon \cdot \arccos h \frac{R}{b} \quad (4.41)$$

A (4.36) egyenlet L szerinti deriváltjából fogom megkapni a sugár menti φ polárszög megváltozását az R helyen [9]:

$$\Delta\varphi = -\frac{\partial\Delta\psi_r}{\partial L} = -\frac{\partial\Delta\psi_r^{(0)}}{\partial L} + \frac{2b\varepsilon R}{b\sqrt{R^2 - b^2}} \quad (4.42)$$

Figyelembe véve, hogy $\Delta\varphi = \pi$ -re egyenest kapok és $R \rightarrow \infty$ -re:

$$\Delta\varphi = \pi + 2\varepsilon \quad (4.43)$$

Ez azt mutatja, hogy a fénysugár pályája elhajlik. Az $r = b$ -hez való közeledés és távolodás pályája

$$\delta\varphi = 2\varepsilon \quad (4.44)$$

értékkel tér el. Azaz $\delta\varphi$ szöggel térül el a fénysugár.

Ennek segítségével akár a Nap $m = M_\odot \approx 2 \cdot 10^{30} kg$, $r_{\min} = R_\odot \approx 7 \cdot 10^8 m$ gravitációs tere által okozott fényelhajlást $\delta\varphi \approx 1,7''$ is meghatározható. Ezt az értéket A.S. Eddington mérte ki 1919-ben, amikor a napfogyatkozás alatt képeket készített a naphoz közeli csillagokról.

4.2. Kerr téridő

Ennek a téridőnek a leszámaztatása meghaladja a dolgozat célkitűzéseit, ezért a [6] alapján tárgyalva csak a fontosabb lépéseket említem.

A Schwarzschild megoldás leírja a téridő geometriát egy gömbszimmetrikus masszív objektum körül, melyben a tárgyat csak a tömege jellemzi. Azonban a legtöbb asztrofizikai objektum forgásban van. Egy ilyen esetben a gömbszimmetrikus megoldás nem alkalmazható, mert a tárgy forgástengelye meghatároz egy speciális irányt. A nemlineáris mező egyenletek összekapcsolják a forrást a külső geometriával. Ezen felül a forgó tárgyat nem csak tömege, hanem az impulzusmomentuma is jellemzi. Így elvárható lenne, hogy az ehhez tartozó téridő metrika ettől a két paramétertől függjön.

Mint fentebb látható a Schwarzschild megoldáshoz úgy jutok el, hogy először meghatározom a sztatikus izotróp metrika általános formáját. Most meg kell alkotni a téridő geometriát egy állandó forgásban lévő test körül. Először megadva az állandó tengelyszimmetrikus metrika általános formáját. Egy ilyen jellegű téridő leírásához be kell vezetni a következő kifejezéseket: az időszerű koordinátát jelölve $t (= x^t)$ -vel, a harmadik térszerű koordinátát pedig az azimut szöggel $\varphi (= x^\varphi)$. A téridő állandó és tengelyszimmetrikus jellege megköveteli, hogy a metrika g_{ab} elemei függetlenek legyenek t -től és φ -től, azaz

$$g_{ab} = g_{ab}(x^r, x^\theta) , \quad (4.45)$$

ahol x^r és x^θ a két fennmaradó térszerű koordináta.

Megkövetelve, hogy az ívelemnégyzet invariáns legyen a t és a φ koordináták együttes előjel váltására, így a következő műveletekre:

$$t \rightarrow -t , \quad \varphi \rightarrow -\varphi \quad (4.46)$$

Ennek a fizikai jelentése az, hogy egy gravitációs mező forrásának, bármilyen is legyen a mozgása, annak csakis forgás jellege lesz a szimmetriatengely körül, vagyis forgó testhez kapcsolódó téridő. Az így feltételezett invariancia megköveteli a következőt:

$$g_{tr} = g_{t\theta} = g_{r\varphi} = g_{\theta\varphi} = 0 \quad (4.47)$$

Hiszen az ezeknek megfelelő kifejezések az ívelemnégyzetben előjelet váltának t és φ egyidejű cseréje esetén. Vagyis ezen feltételezéseket követően az ívelemnégyzetnek a következő alakúnak kell lennie:

$$ds^2 = g_{tt}dt^2 + 2g_{t\varphi}dtd\varphi + g_{\varphi\varphi}d\varphi^2 + [g_{rr}(dx^r)^2 + 2g_{r\theta}dx^r dx^\theta + g_{\theta\theta}(dx^\theta)^2] \quad (4.48)$$

További szimmetriai megfontolásokat figyelembe véve, a Kerr metrika alakja a következő [6]:

$$ds^2 = g_{tt}dt^2 + 2g_{t\varphi}dtd\varphi + g_{\varphi\varphi}d\varphi^2 + g_{rr}dr^2 + g_{\theta\theta}d\theta^2 \quad (4.49)$$

ahol a tetszőleges g_{ab} függvények csak r -től és θ -tól függenek. Igazolni kell azt, hogy egy ilyen ívelemnégyzet valóban kielégíti Einstein gravitációs mező egyenleteit, ezáltal explicit formát adva a metrika elemeinek, amelyek megjelennek a ds^2 (4.49) kifejezésében.

A problémát ugyanúgy meg közelítve, mint a Schwarzschild metrika esetében. Először kiszámolva a Christoffel szimbólumokat (Γ^a_{bc}) a (4.49) metrikából, majd ezeket az együtthatókat felhasználva megadható a Ricci tenzor R_{ab} komponensei, amelyek az ívelemnégyzetben szereplő ismeretlen együtthatófüggvényeknek a kifejezései. Mivel újra a forgásban lévő anyag eloszlásán kívüli téridő geometria a fontos, a vákuum mező egyenletét kell megoldani.

$$R_{ab} = 0 \quad (4.50)$$

Ez a folyamat algebrai megközelítésben igen hosszú és bonyolult [6]. Belátható, hogy az Einstein egyenletek önmagukban nem elégségesek ahhoz, hogy az összes ismeretlen együtthatófüggvényt egyenként meghatározzák. A tengelyszimmetria követelményei sokkal kevesebb megkötéssel járnak, mint a gömbszimmetria, melyet a Schwarzschild geometria felépítése során lett használva. Az elképzelés általában az, hogy egy kompakt forgó objektum legyen, mint például egy csillag vagy egy bolygó, és az általános metrikának (4.49) igaznak kell lennie a forgó tengelyszimmetrikus testen kívül is. Annak érdekében, hogy eljussunk a Kerr metrikához, további feltételeket kell megadni, hogy megkapjuk a megoldást. Megkövetelve, hogy a téridő geometriája a Minkowski féle téridőhöz tartson, ha $r \rightarrow \infty$ -be és, hogy létezzen egy sima zárt konvex esemény horizont, amin kívül a geometria nem szinguláris; ebben az esetben egyetlen megoldás lesz. A Boyer–Lindquist koordinátázását (t, r, θ, φ) használva az ívelemnégyzet a Kerr geometriában a következő alakban adható meg [6]:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{r_g r}{\Sigma}\right) c^2 dt^2 - \frac{2r_g a c r \sin^2 \theta}{\Sigma} dt d\varphi + \frac{\Sigma}{\Delta} dr^2 + \Sigma d\theta^2 + \left(\frac{r_g r a^2 \sin^2 \theta}{\Sigma} + a^2 + r^2\right) \sin^2 \theta d\varphi^2, \quad (4.51)$$

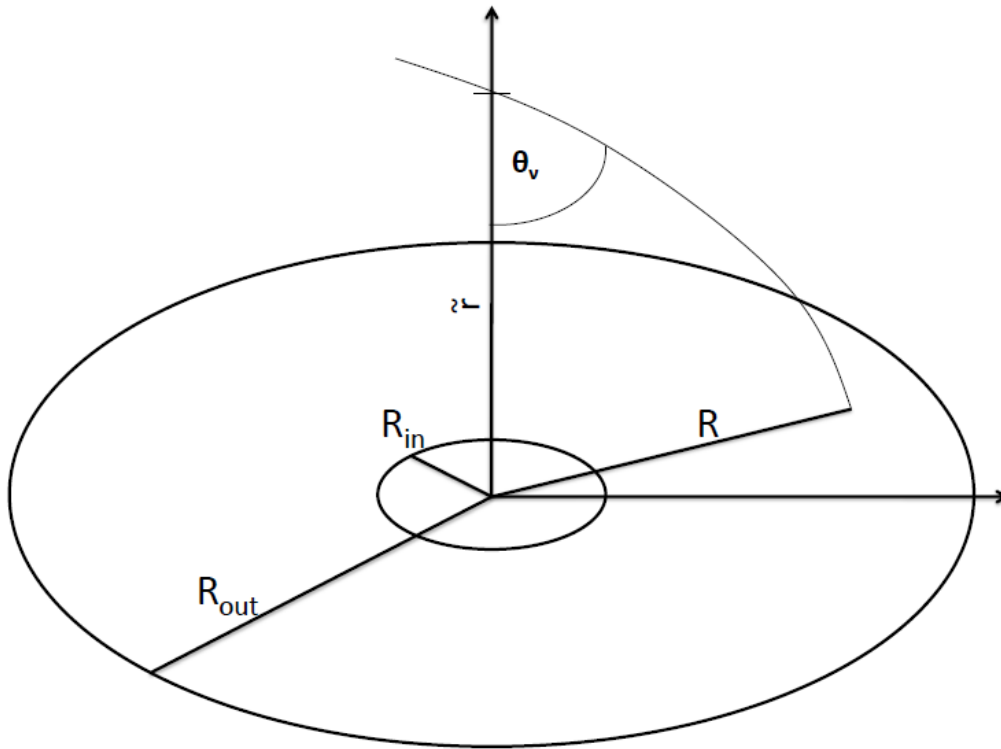
ahol r_g a Schwarzschild sugár, a konstans, Σ és Δ -ra a következők igazak:

$$\Sigma = r^2 + a^2 \cos^2 \theta, \quad \Delta = r^2 - r_g r + a^2 \quad (4.52)$$

Ez egy általános kifejezése a ds^2 -re Kerr téridő esetén [6]. Amikor a a forgási paraméter nullához tart, akkor visszakapjuk a Schwarzschild téridő metrikáját.

4.2.1. A neutrínó-antineutrínó annihiláció

Ebben a fejezetben egy neutrínó pár annihilációját vizsgálom fekete lyukak közelében. A folyamat során a $(\nu + \bar{\nu} \rightarrow e^+ + e^-)$, azaz elektron-pozitron pár keletkezik. A következő felépítésű rendszert vesszük: egy forgó, gömbszimmetrikus, nagy tömegű fekete lyuk, aminek a forgási síkjára merőlegesen egy forró vékony akkréciós korong található. Ebben az elrendezésben a téridő Kerr jellegű lesz. Ha forgás mentes lenne, akkor Schwarzschild téridővel le lehetne írni a rendszert. Feltételezem, hogy az akkréciós korongból emittálódik a neutrínó és az antineutrínó, amik a forgástengelyt ütközés nélkül érik el és azok csak a forgási tengelyen ütköznek össze. Az akkréciós lemez belső szélét R_{in} -el jelölöm, hasonló képpen a külső szélét R_{out} -al. Azaz az akkréciós lemez ezen szélső értékek között lesz. Azokra a neutrínókra, amelyek elhagyták a korongot, csak is a rendszer közepén található fekete lyuk gravitációs vonzása hat.



ábra 4.1. Egy neutrínó pályája az R kiindulási pontból az \tilde{r} forgástengelyen lévő pontban megy át.

A forgó feketelyuk körül az ívelemnégyzet a Kerr téridő metrikája [1]:

$$ds^2 = g_{ij}dx^i dx^j = - \left(1 - \frac{r_g r}{\Sigma}\right) c^2 dt^2 + \frac{\Sigma}{\Delta} dr^2 + \left(\frac{r_g r}{\Sigma} a^2 \sin^2 \theta + r^2 + a^2\right) \sin^2 \theta d\varphi^2 + \Sigma d\theta^2 - 2 \frac{r_g r}{\Sigma} a \sin^2 \theta c dt d\varphi \quad (4.53)$$

ahol $r_g = 2GM/c^2$ a Schwarzschild sugarat jelölöm és az a pedig Kerr paraméter, ami 0 és $r_g/2$ közötti érték [1].

$$\Sigma = r^2 + a^2 \cos^2 \theta \quad (4.54)$$

$$\Delta = r^2 + a^2 - r_g r \quad (4.55)$$

Az impulzus momentum a tömeg nélküli részecskékre $p_i p^i = 0$, azaz az impulzusok az alkotó függvény Ψ deriválásából következnek $p_i = \hbar \partial_i \Psi$. Ezután felírva az eikonál egyenletet [3]:

$$g^{ij} (\partial_i \Psi) (\partial_j \Psi) = 0 \quad (4.56)$$

Ezt ha kiírom a metrika minden tagjával és a $p_i = \hbar \partial \Psi / \partial x^i$ helyettesítést alkalmazom:

$$g^{tt} p_t^2 + g^{t\varphi} p_t p_\varphi + g^{\varphi t} p_\varphi p_t + g^{rr} p_r^2 + g^{\theta\theta} p_\theta^2 + g^{\varphi\varphi} p_\varphi^2 = 0 \quad (4.57)$$

egyenletet kapom, ahol $p_\varphi = \hbar \partial \Psi / \partial \varphi = \text{const.}$ és $p_t = \hbar \partial \Psi / \partial t = \text{const.}$ a metrika nem függ explicite t -től és φ -től [6]. A $p_\varphi = L$ és a $p_t = -\omega_0$ jelöléseket vezetem be ezekre. Visszahelyettesítve és átrendezve az egyenletet kapom, hogy:

$$g^{tt} \omega_0^2 - 2g^{t\varphi} L \omega_0 + g^{\varphi\varphi} L^2 = -g^{rr} \left(\frac{\partial \Psi_{r,\theta}}{\partial r} \right)^2 - g^{\theta\theta} \left(\frac{\partial \Psi_{r,\theta}}{\partial \theta} \right)^2 \quad (4.58)$$

Ekkor az eikonál választható a következőképp:

$$\Psi = -\omega_0 t + L\varphi + \Psi_{r,\theta}(r, \theta) \quad (4.59)$$

Amiben látszik, hogy az utolsó tag egyszerre függ r -től és θ -től. Ha behelyettesítem a metrika elemeit a (4.58) egyenletbe és $g^{\theta\theta}$ -val átszorozom:

$$\Delta \left(\frac{\partial \Psi_{r,\theta}}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi_{r,\theta}}{\partial \theta} \right)^2 = \left(\frac{(r^2 + a^2)^2}{\Delta} - a^2 \sin^2 \theta \right) \frac{\omega_0^2}{c^2} - \quad (4.60)$$

$$-2 \left(a + a \frac{r^2 + a^2}{\Delta} \right) L \frac{\omega_0}{c} - \left(\frac{a^2}{\Delta} - \frac{1}{\sin^2 \theta} \right) L^2 \quad (4.61)$$

Az egyenletet átrendezve kapom a következő összefüggést:

$$\Delta^2 \left(\frac{\partial \Psi_{r,\theta}}{\partial r} \right)^2 + \Delta \left(\frac{\partial \Psi_{r,\theta}}{\partial \theta} \right)^2 = \left[\frac{\omega_0}{c} (r^2 + a^2) - aL \right]^2 - \Delta \left(a \frac{\omega_0}{c} \sin \theta - \frac{L}{\sin \theta} \right) \quad (4.62)$$

így kapom:

$$\frac{1}{\Delta} \left[\frac{\omega_0}{c} (r^2 + a^2) - aL \right]^2 - \Delta \left(\frac{\partial \Psi_{r,\theta}}{\partial r} \right)^2 = \left(\frac{\partial \Psi_{r,\theta}}{\partial \theta} \right)^2 + \left(a \frac{\omega_0}{c} \sin \theta - \frac{L}{\sin \theta} \right) \quad (4.63)$$

ami azt mutatja, hogy Ψ függvényre kereshető olyan alakú megoldás, hogy szeparálható r és θ szerint. Azaz az eikonál [1]:

$$\Psi = -\omega_0 t + L\varphi + \Psi_r(r) + \Psi_\theta(\theta) \quad (4.64)$$

ahol $\Psi_r(r)$ és $\Psi_\theta(\theta)$ kielégíti [1]:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial\Psi_r}{\partial r}\right)^2 &= \frac{1}{\Delta^2} \left[\frac{\omega_0}{c} (r^2 + a^2) - aL \right]^2 - \frac{J^2}{\Delta} \\ \left(\frac{\partial\Psi_\theta}{\partial\theta}\right)^2 &= J^2 - \left(a\frac{\omega_0}{c} \sin\theta - \frac{L}{\sin\theta} \right)^2 \end{aligned} \quad (4.65)$$

Ebben J a szeparációs konstans, ω_0 és L is konstansok.

Ebben az esetben a neutrínó az akkréciós lemezről $r = R$ távolságból és $\theta = \pi/2$ emitálódik, és a forgástengelyre érkezik $r = \tilde{r}$ és $\theta = 0$ -ba. Az \tilde{r} jelöli a forgástengelyen a távolságot, az r pedig az akkréciós korongon a távolságot. Azok a részecskék érhetnek el a forgástengelyt, amelyekre az $L = 0$ fennáll. Az annihiláló részecskék közül az egyik impulzusát p_ν , a másikat $p_{\bar{\nu}}$ adja meg, ahol ν és $\bar{\nu}$ jelöli a neutrínó és antineutrínót. $\theta = 0$ -nál vizsgálva a két részecske belső szorzatát [4]:

$$\begin{aligned} p_\nu \cdot p_{\bar{\nu}} &= g^{ij} (p_\nu)_i (p_{\bar{\nu}})_j = \hbar^2 g^{ij} \left(\frac{\partial\Psi^\nu}{\partial x_i} \right) \left(\frac{\partial\Psi^{\bar{\nu}}}{\partial x_j} \right) \\ &= \hbar^2 g^{tt} \left(\frac{\partial\Psi^\nu}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial\Psi^{\bar{\nu}}}{\partial t} \right) + \hbar^2 g^{t\varphi} \left(\frac{\partial\Psi^\nu}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial\Psi^{\bar{\nu}}}{\partial\varphi} \right) + \hbar^2 g^{t\varphi} \left(\frac{\partial\Psi^\nu}{\partial\varphi} \right) \left(\frac{\partial\Psi^{\bar{\nu}}}{\partial t} \right) \\ &\quad + \hbar^2 g^{\varphi\varphi} \left(\frac{\partial\Psi^\nu}{\partial\varphi} \right) \left(\frac{\partial\Psi^{\bar{\nu}}}{\partial\varphi} \right) + \hbar^2 g^{rr} \left(\frac{\partial\Psi^\nu}{\partial r} \right) \left(\frac{\partial\Psi^{\bar{\nu}}}{\partial r} \right) + \hbar^2 g^{\theta\theta} \left(\frac{\partial\Psi^\nu}{\partial\theta} \right) \left(\frac{\partial\Psi^{\bar{\nu}}}{\partial\theta} \right) \end{aligned} \quad (4.66)$$

Ebből az első tag:

$$\hbar^2 g^{tt} \left(\frac{\partial\Psi^\nu}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial\Psi^{\bar{\nu}}}{\partial t} \right) = -\hbar^2 \omega_{0\nu} \omega_{0\bar{\nu}} \frac{g_{\varphi\varphi}}{g_{t\varphi}^2 + g_{tt}g_{\varphi\varphi}} = \frac{(\tilde{r}^2 + a^2) \hbar^2 \omega_{0\nu} \omega_{0\bar{\nu}}}{\Delta_{r=\tilde{r}} c^2} \quad (4.67)$$

A többi tagra is elvégezve a deriválást, megkapom a következő kifejezést:

$$\begin{aligned} p_\nu \cdot p_{\bar{\nu}} &= -(\tilde{r}^2 + a^2) \frac{\hbar^2 \omega_{0\nu} \omega_{0\bar{\nu}}}{c^2 \Delta_{r=\tilde{r}}} + \\ &\quad + \frac{\hbar^2 \omega_{0\nu} \omega_{0\bar{\nu}}}{c^2 \Delta_{r=\tilde{r}} \Sigma_{r=\tilde{r}}} (\tilde{r}^2 + a^2)^2 \left[1 - \frac{\Delta_{r=\tilde{r}} c^2 J_\nu^2}{(\tilde{r}^2 + a^2)^2 \omega_{0\nu}^2} \right]^{1/2} \left[1 - \frac{\Delta_{r=\tilde{r}} c^2 J_{\bar{\nu}}^2}{(\tilde{r}^2 + a^2)^2 \omega_{0\bar{\nu}}^2} \right]^{1/2} + \\ &\quad + \frac{\hbar^2 \omega_{0\nu} \omega_{0\bar{\nu}} c J_\nu c J_{\bar{\nu}}}{c^2 \Sigma_{r=\tilde{r}} \omega_{0\nu} \omega_{0\bar{\nu}}} \end{aligned} \quad (4.68)$$

Ha bevezetem a neutrínók energiájára a következő összefüggést [1]:

$$\varepsilon_\nu = \hbar\omega_{0\nu} \sqrt{\frac{\tilde{r}^2 + a^2}{\Delta_{r=\tilde{r}}}} \quad (4.69)$$

ahol $\hbar\omega_{0\nu}$ a neutrínóra energiája a végtelenben, ami teljesen azonos az antineutrínóra is, a vöröseltolódási faktor: $\sqrt{(\tilde{r}^2 + a^2)/\Delta_{r=\tilde{r}}}$.

Az ütközés θ_ν szögét meghatározza a $p_\nu = ((p_\nu)^r, (p_\nu)^\theta, (p_\nu)^\varphi)$ hármas impulzusnak, amely a neutrónó pályájának a tengellyel való metszeténél van, valamint a forgástengely irányának megfelelő $e_z = (1/\sqrt{g_{rr}}, 0, 0)$ normál vektornak a skalár szorzata [4].

$$\cos \theta_\nu = \frac{p_\nu \cdot e_z}{|p_\nu|} = \frac{(p_\nu)_r}{\sqrt{g_{rr} [(p_\nu)_r^2/g_{rr} + (p_\nu)_\theta^2/g_{\theta\theta}]}} \quad (4.70)$$

hol a következő kifejezést használom $p_\nu \cdot e_z = g_{rr} (p_\nu)^r (e_z)^r$ és a hármas impulzusnak a normája $|p_\nu| = \sqrt{g^{rr} (p_\nu)_r^2 + g^{\theta\theta} (p_\nu)_\theta^2}$. Kifejezve a (4.57) egyenletből a p_r -et :

$$\frac{(p_\nu)_r^2}{g_{rr}} = \frac{g_{\varphi\varphi} (\omega_0/c)^2}{g_{t\varphi}^2 - g_{tt}g_{\varphi\varphi}} - \frac{(p_\nu)_\theta^2}{g_{\theta\theta}} \quad (4.71)$$

A (4.70) és (4.71) egyenletekből az ütközési szög és a P_θ között ezt az összefüggést meghatározva [4]:

$$\sin^2 \theta_\nu = \left[\frac{(p_\nu)_\theta}{\omega_0/c^2} \right]^2 \frac{\Delta}{(r^2 + a^2)^2} \quad (4.72)$$

ahol $c(p_\nu)_\theta/\omega_0 = \rho_\nu$. Ebből kapom [1]:

$$\sin \theta_\nu = \frac{\rho_\nu \Delta_{r=\tilde{r}}}{\tilde{r}^2 + a^2} \quad (4.73)$$

ahol

$$\rho_\nu = \frac{cJ_\nu}{\omega_{0\nu}} \quad (4.74)$$

Azaz $(p_\nu)_\theta$ megegyezik J -vel. Ezeket beírva a fenti egyenletbe (4.68):

$$p_\nu \cdot p_{\bar{\nu}} = -\frac{\varepsilon_\nu \varepsilon_{\bar{\nu}}}{c^2} (1 - \sin \theta_\nu \sin \theta_{\bar{\nu}} - \cos \theta_\nu \cos \theta_{\bar{\nu}}) \quad (4.75)$$

Ha a neutrínó a R_{in} -ből jön, akkor a θ_ν értéke minimumot vesz fel, amit θ_m -el jelölök és hasonló képpen, ha R_{out} -ből érkezik a részecske a forgástengelyre, akkor θ_M maximális szöget vesz fel a θ_ν . A radiális koordináta nem monoton változó, hanem bizonyos esetekben átmegy egy inflexió ponton, ami a részecske pályájának az a pontja, ami a legközelebb van a nagy tömegű feketelyukhoz, jelöljük r_0 -al. Ez a pont nem a végpontokban van. Az inflexió pont kiszámolható abból, hogy $p^r = dr/d\lambda = g^{rr} p_r = \hbar (\partial\Psi_r/dr) \Delta/\Sigma = 0$ (itt λ affin paraméter végig a null geodetikuson), ekkor

$$\rho_\nu = \frac{r_0 [1 + (a/r_0)^2]}{\sqrt{1 - r_g/r_0 + (a/r_0)^2}} \quad (4.76)$$

Ezek után a pályagörbe egyenlete a $\partial\Psi/\partial J = const.$ Azaz, az eikonálnak a J kanonikus konstans szerinti deriváltja is konstans értéket ad.

$$\frac{\partial\Psi}{\partial J} = \frac{\partial\Psi_r}{\partial J} + \frac{\partial\Psi_\theta}{\partial J} = \int_C \frac{\partial\Psi_r}{\partial J} dr + \int_g \frac{\partial\Psi_\theta}{\partial J} d\theta = const \quad (4.77)$$

Mivel Ψ_r -nek és Ψ_θ -nak ismerem a megfelelő koordináták szerinti deriváltját, ezért változik a fenti differenciálegyenlet integrál egyenletté. Elvégezve a deriválást a kanonikus konstans szerint a (4.65) egyenlet gyökein, az egyik részecskére nézve:

$$\frac{\partial\Psi}{\partial J} = \int_C \frac{\partial\Psi_r}{\partial J} dr + \int_g \frac{\partial\Psi_\theta}{\partial J} d\theta \quad (4.78)$$

Az egyenletet átrendezve kapom:

$$\int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - (a/\rho_\nu)^2 \sin^2 \theta}} = \int_C \frac{dr}{r \sqrt{(r/\rho_\nu)^2 [1 + (a/r)^2]^2 - [1 - r_g/r + (a/r)^2]}} \quad (4.79)$$

A baloldalon úgy számolom a pályát, mintha a részecske a $\theta = 0$ -ból indulna, azaz a forgástengelyről és a $\theta = \pi/2$ -be érkezne, ami az akkréciós lemez. A jobboldalon az integrált a teljes útra veszem, amit C -vel jelölök.

Ezt követően számolom a részecskék EDR-jét. Azaz az egységnyi idő alatt, egységnyi térfogaton leadott energia [4]:

$$\begin{aligned} \frac{dE_0(r)}{dt dV} &= 2cK G_F^2 F(\tilde{r}) \int \int f_\nu f_{\bar{\nu}} (\varepsilon_\nu + \varepsilon_{\bar{\nu}}) \varepsilon_\nu^3 \varepsilon_{\bar{\nu}}^3 d\varepsilon_\nu d\varepsilon_{\bar{\nu}} = \\ &= \frac{21\pi^4}{4} \zeta(5) \frac{K G_F^2}{h^6 c^5} k^9 T_{eff}^9(3r_g) F(\tilde{r}) \end{aligned} \quad (4.80)$$

Ahol ζ a Riemann zeta függvény, ami definíció szerint [8]:

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} = \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \dots \quad \sigma = \text{Re} > 1 \quad (4.81)$$

Továbbá [4]

$$K = (1 \pm 4 \sin^2 \theta_w + 8 \sin^4 \theta_w) / 6\pi \quad (4.82)$$

Ebben $\sin^2 \theta_w = 0,23$ és $G_F^2 = 5,29 \times 10^{-44} \text{cm}^2 \text{MeV}^{-2}$. A $T_{eff}(3r_g)$ az effektív neutrínó

hőmérséklet kiértékelve a $3r_g = 6GM/c^2$ helyen.

Az EDR-el az arányosságot az $F(\tilde{r})$ függvény határozza meg. Amit a következőképpen lehet kiszámolni [1]:

$$\begin{aligned}
F(\tilde{r}) = & \frac{2\pi^2}{T_{eff}^9(3r_g)} \left(\frac{\tilde{r}^2 + a^2}{\Delta_{r=\tilde{r}}} \right)^2 \left[2 \int_{\theta_m}^{\theta_M} d\theta_\nu T_0^5(\theta_\nu) \sin \theta_\nu \int_{\theta_m}^{\theta_M} d\theta_{\bar{\nu}} T_0^4(\theta_{\bar{\nu}}) \sin \theta_{\bar{\nu}} \right. \\
& + \int_{\theta_m}^{\theta_M} d\theta_\nu T_0^5(\theta_\nu) \sin^3 \theta_\nu \int_{\theta_m}^{\theta_M} d\theta_{\bar{\nu}} T_0^4(\theta_{\bar{\nu}}) \sin^3 \theta_{\bar{\nu}} \\
& + 2 \int_{\theta_m}^{\theta_M} d\theta_\nu T_0^5(\theta_\nu) \cos^2 \theta_\nu \sin \theta_\nu \int_{\theta_m}^{\theta_M} d\theta_{\bar{\nu}} T_0^4(\theta_{\bar{\nu}}) \cos^2 \theta_{\bar{\nu}} \sin \theta_{\bar{\nu}} \\
& \left. - 4 \int_{\theta_m}^{\theta_M} d\theta_\nu T_0^5(\theta_\nu) \cos \theta_\nu \sin \theta_\nu \int_{\theta_m}^{\theta_M} d\theta_{\bar{\nu}} T_0^4(\theta_{\bar{\nu}}) \cos \theta_{\bar{\nu}} \sin \theta_{\bar{\nu}} \right] \quad (4.83)
\end{aligned}$$

ahol

$$T_0(R) = \frac{T_{eff}(R)}{\gamma} \sqrt{\frac{R^2 + a^2 - r_g R}{R^2 + a^2 + (r_g/R) a^2}} \quad (4.84)$$

ahol $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ és

$$\frac{v^2}{c^2} = \frac{r_g R (R^2 + a^2 - a\sqrt{2r_g R})^2}{2 \left(R^2 + a\sqrt{r_g R/2} \right)^2 (R^2 + a^2 - r_g R)} \quad (4.85)$$

A cél az $F(\tilde{r})$ függvénynek a kiszámítása.

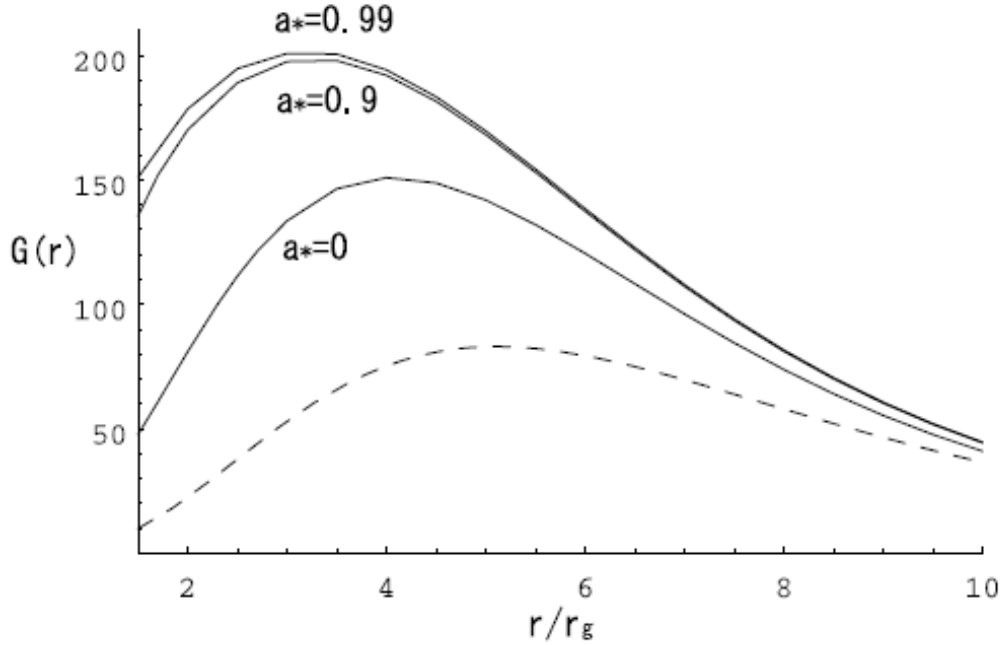
Megadom az \tilde{r} értékét a forgás tengelyen továbbá a -hoz is rendelék egy $0 - 1$ közötti értéket, ha $a = 0$ értéket választok az a Schwarzschild téridőre ad jó megoldást. Ezen felül még θ_ν -re is meg kell adni egy értéket, mivel a forgástengelyen a forgástengelytől mérve a neutrínó csak $[0, \pi/2]$ szögek esetén vehet fel értékeket, ezért innen választva egy értéket a (4.73) egyenletet megoldható. Az (4.73)-et átrendezve:

$$\rho_\nu = \frac{(\tilde{r}^2 + a^2)}{\Delta_{r=\tilde{r}}} \sin \theta_\nu \quad (4.86)$$

amit a (4.76) egyenletbe helyettesítve kiszámolhatom az r_0 értékét. Továbbá tudom, hogy $r_0 > 0$ és $r_0 \in \mathbb{R}$. Ha létezik r_0 , akkor a neutrínó görbéje egy olyan pályát ír le, ahol r_0 -ban inflexió pontja lesz. Ekkor (4.79) integrál jobb oldalán lévő integrált kettészedve először $r_0 - \tilde{r}$ -ig, majd $r_0 - R$ -ig végezem az integrálást. Ha nincs ilyen r_0 , akkor az (4.79) integrál jobb oldala $\tilde{r} - R$ -ig halad. Majd az integrálás elvégzése után meg tudjuk határozni a részecske indulási pontját az

akkréciós diszkről. Mert R jelöli azt a távolságot a fekete lyuk közepétől az akkréció, ahonnan a részecske indult. Miután meghatároztam R -et, akkor meg kell nézni, hogy $[R_{in}, R_{out}]$ közé esik-e. Ha R kívül esik az akkréciós lemez tartományán, akkor nincs ilyen neutrínó az adott \tilde{r} -nél, aminek a beesési szöge θ_ν . Ezt a folyamatot egy adott \tilde{r} -nél az összes θ_ν szögre elvégezve meg lehet határozni, hogy az R_{in} -hez és az R_{out} -hoz milyen θ_ν -értékek tartoznak. Az R_{in} -hez tartozót jelölöm θ_m -el és az R_{out} -hoz tartozót θ_M -el. Ezek segítségével numerikusan meg lehet határozni az R és a θ_ν közötti összefüggést, aminek a segítségével a (4.83) egyenletet ki lehet integrálni és számszerűen meghatározható a keresett $F(\tilde{r})$ függvény értéke.

Továbbá bevezetek egy dimenzió mentes függvényt: $G(\tilde{r}) \equiv F(\tilde{r})(\tilde{r}^2 + a^2)/r_g^2$. A dimenzió mentes $G(\tilde{r})$ -nek az r/r_g -tól való függése állandó hőmérsékletű korong esetén a (4.2) grafikonon látható, ahol $a_* \equiv a/0,5r_g$ [1].



ábra 4.2. A $G(r)$ függvény az \tilde{r}/r_g függvényében.[1]

A (4.2) ábra azt mutatja, hogy a részecskék a forgástengelynek melyik \tilde{r} pontjában annihilálnak. A grafikon beosztása r_g egységekben van. A részecskék $R_{in} = 3r_g$ és $R_{out} = 10r_g$ tartományból indulnak. Ha az a forgási paramétert nullának választjuk (azaz $a = 0$), akkor visszakapjuk a Schwarzschild téridőre az EDR értékét, továbbá a $G(r)$ -függvény görbéje laposabb. Viszont ha a forgási paraméter értékét közelítem az 1-hez, akkor a görbe korábban csúcsosodik, és jóval magasabbról indul, mint az $a = 0$ esetben. Tehát, ha $a \rightarrow 1$ -et feltételezek, akkor a neutrínók a forgástengely alacsonyabb részén nagyobb EDR értékeket adnak és jóval korábban érnek el egy maximális értéket, mint ha $a = 0$ -t vennék. A gyors felfutás után lassú lecsengésbe mennek át a görbék és látszik, hogy bizonyos távolság után mindegyik a értéknél számolt görbe egyazon értékhez tart, azaz már a forgási paraméter sem játszik nagy szerepet az

EDR értékében.

5. Összefoglalás

A dolgozatomban az eikonál egyenlet alkalmazásait vizsgáltam. Ehhez először bevezettem a Hamilton-Jacobi módszert, amiben ha $m = 0$ és $S = \Psi$ -t helyettesíték az eikonál egyenletet kapom vissza, amivel a nulla tömegű részecskék mozgását határozhatom meg. Adott metrikáknál lehetséges alkalmazni például a fényelhajlás, vagy a részecskék annihilációjának vizsgálata során.

Az eikonál egyenlet hasznosnak bizonyult, mivel meg tudtam határozni, hogy egy foton útja mennyire térül el az egyenestől, amikor elhalad egy nagytömegű objektum mellett.

Egy másik esetben, amikor egy fekete lyuk akkréciós korongjából kirepülő neutrínó vagy antineutrínó pályáját tanulmányoztam, ameddig eléri a forgástengelyt.

Végül az EDR értékét meghatározó függvényeket (a 4.2.1 fejezetben definiált $G(r)$ függvényt) hasonlítottam össze. Ebből azt a következtetést tudtam levonni, hogy forgó magú rendszerben az EDR értéke jóval magasabb szintről indul, és hamarabb ér el maximumot a forgástengelyen, mint egy sztatikus rendszerbe. Viszont minden esetben látható, hogy az EDR értéke a magtól távolabbi \tilde{r} esetén megközelítőleg ugyanakkora értékhez tart.

A jövőben érdemes lenne utána számolni az EDR konkrét értékének mind Schwarzschild, mind Kerr téridőben. Reprodukálni a [1] cikkben megjelent ábrákat. Esetleg más megközelítésben kiszámolni az EDR konkrét értékeit.

6. Köszönetnyilvánítás

Ezúton szeretném megköszönni témavezetőmnek, Keresztes Zoltánnak a remek témát, a kitarását és a segítséget a szakdolgozat megírásában.

Hivatkozások

- [1] Katsuaki Asano ,Takeshi Fukuyama: Relativistic Effects on Neutrino Pair Annihilation above a Kerr Black Hole with the Accretion Disk, The Astrophysical Journal,2001, 546:1019-1026
- [2] Katsuaki Asano ,Takeshi Fukuyama: Neutrino Pair Annihilation in the Gravitation of Gamma-Ray Burst Sources, The Astrophysical Journal, 2000 , 531: 949-955
- [3] L. D. Landau and E. M. Lifshitz: Classical Theory of Fields (London: Pergamon) 1979
- [4] Z. Kovács, K. S. Cheng, T. Harko: Mon. Not. Roy. Astron. Soc., 2010, 402 1714
- [5] L. Á. Gergely, Z. Keresztes és M. Dwornik, Class. Quant. Grav. 26 145002, (2009); e-print: arXiv:0903.1558
- [6] Hobson M., Efstathiou G., Lasenby A. General relativity An introduction for physicists (CUP, 2006)(ISBN 0521536391)
- [7] Érdi Bálint: Égi Mechanika, Nemzeti tankönyvkiadó 1996
- [8] http://en.wikipedia.org/wiki/Riemann_zeta_function
- [9] Dwornik Marek: Eikonál-módszer az árapály-töltésű fekete lyukak gravitációs lencsésítésében, Diplomamunka, 2009, SZTE
- [10] Hawking S. Ellis G.F. : The Large Scale Structure of Space-Time (1973)(CUP)(399s)

NYILATKOZAT

Alulírott *Bombolya László* Fizika BSc szakos hallgató (ETR azonosító: BOLQAAT.SZE) a *Eikonál egyenlet az általános relativitáselméletben* című szakdolgozat szerzője fegyelmi felelősségem tudatában kijelentem, hogy dolgozatom önálló munkám eredménye, saját szellemi termékem, abban a hivatkozások és idézések általános szabályait következetesen alkalmaztam, mások által írt részeket a megfelelő idézés nélkül nem használtam fel.

Szeged, 2011. május

.....

a hallgató aláírása