

# Tartalomjegyzék

1. Bevezetés	2
2. Fényelhajlás Schwarzschild téridőben első rendig	3
3. Gyenge gravitációs lencsézés	6
4. Az elhajlási szög meghatározása másodrendig	8
4.1. Schwarzschild fekete lyuk . . . . .	8
4.2. Reissner -Nordström fekete lyuk . . . . .	10
5. Einstein elhajlási szög kiszámítása általános sztatikus gömbszimmetrikus metrikára	11
6. Brán-világok	12
7. Fekete lyukak a bránon	13
7.1. Fényterjedés . . . . .	14
7.2. Perturbatív megoldás . . . . .	14
8. Gyenge gravitációs lencsézés brán fekete lyuknál	16
9. Gravimágneses effektus	17
10.Összefoglalás	18
11.Köszönetnyilvánítás	18
12.Hivatkozások	19

# 1. Bevezetés

Az általános relativitáselmélet szerint az elektromágneses sugárzás, így a fény is, amikor elhalad egy tömegpont mellett, a tér görbületét követve elhajlik. Az elhajlás mértéke kicsi, azonban nagy tömegek esetén kimutatható lehet. Einstein általános relativitáselméleti jóslata pontosan kétszerese annak, amit a newtoni gravitációelmélet jósol a részecskének tekintett fény elhajlására. Az 1919-es napfogyatkozás alkalmával Eddington-nak sikerült kísérletileg is kimutatni ezt a jelenséget: távoli csillagoknak a Hold által letakart Nap mellett elhaladó fénysugarai 1,74 ívmásodperces elhajlást szenvedtek a Nap gravitációjának hatására.[1]

Abban az esetben, ha mind a háttérobjektum (a fényforrás), mind pedig az előtér-objektum (például egy galaxis) távol van, a gravitációs fényelhajlás következtében több olyan fénysugár is elérheti a földi megfigyelőt, mely eredetileg különböző irányokba indult. A földi megfigyelő ezért több (alapesetben két) példányban is látja a fényforrást. A távoli fényforrás sugarainak ezt a fókuszálását gravitációs lencsejelenségnek nevezzük, az elhajlást okozó objektumot pedig gravitációs lencsének. Az optikai analógia csupán formális, a gravitációs lencse nem egy pontba, hanem egy egyenesre fókuszál.

Chwolson 1924-ben mutatott rá arra [2], hogy abban az esetben, ha egy háttércsillag (fényforrás), egy előtér objektum (gravitációs lencse) és a megfigyelő tökéletesen egy vonalban vannak, a tengelyszimmetria miatt nem két kép, hanem az ún. Einstein gyűrű keletkezik. 1936-ban Einstein[3] meghatározta a csillag fókuszált képének luminozitását. Megállapította, hogy amennyiben a forrás, a lencse és a megfigyelő egy vonalban vannak, akkor a keletkező kép fényesebb. Azonban akkoriban úgy vélték, hogy az így keletkező képeket lehetetlen optikai távcsővel felbontani, így kicsi az esélye, hogy a gravitációs lencsézés jelenségét megfigyeljék.

Néhány szerző (Eddington [4], Chwolson [5]) már igen korán meghatározta, hogy a fényelhajlás gravitációs lencsézést okoz. Zwicky [6] nagy álma volt a gravitációs lencsézés megfigyelése. Később a gravitációs lencsézést egyre többen tanulmányozták. Klimov[7] a galaxisok lencsézését, míg Liebes[8] a galaxisunkban levő gömbhalmazok csillagainak lencsézését vizsgálta. Refsdal[9] volt az első, aki a geometriai optikát használta fel a gravitációs lencsézés vizsgálatára.

A kvazárok ideális források az adott jelenség tanulmányozására, nagy luminozitásuk, pontszerű képük, spektrális jellemzőik és Földtől való, csillagászati léptékkel mérten is nagy távolságuk miatt.

Zwicky nagy álma akkor teljesült, amikor Walsh, Carswell és Weymann[10] felfedezték az első gravitációsan lencsézett kvazárt, a QSO 1957+561-et. A kvazár két képe egymástól hat ívmásodpercre van. Mindkét képnek hasonló az optikai spektruma, és találtak egy galaxist is a két kép között. A képek fluxus-aránya ugyanannyinak adódott mind optikai, mind rádió tartományokban, és a VLBI mérések is találtak hasonlóságot a két rádió kép között.

A VLBI eredményeket Narasimha és munkatársai[11] modellezték, kimutatva, hogy egy halmaz ,továbbá egy óriás elliptikus galaxis szükséges a megfigyelt eredményekhez.

További kutatások eredményeképpen több mint egy tucat ilyen fajtájú többszörös képű kvazárt fedeztek fel, valamint még hat gyűrű alakot formáló rádió képet találtak.

Az első Einstein gyűrűket Hewitt és munkatársai találták[12] 1987-ben. Cheng és Refsdal (1979, 1984)[13][14] kifejlesztették a mikrolencsézés elméletét, hogy megmagyarázzák a fluxus változását a képeken. Új lencse-jelenségek, név szerint óriás luminozitású körívek,

és a mikrolencsézés megfigyelései robbanásszerűen sokasodtak és sokasodnak napjainkban is.

A gravitációs lencsehatás igen fontos módszer távoli, akár elektromágneses spektrumban sötét objektumok detektálására is, gravitációs hatásuk alapján. Az Univerzum szerkezetének feltérképezéséhez igen hasznos módszer. Jelenleg több kutatócsoport is dolgozik a világító anyagnál több mind tízszer több sötét anyag eloszlásának feltérképezésén, a gravitációs lencse-hatás statisztikai feldolgozása alapján.

A legtöbb esetben a lencse nem elég erős ahhoz, hogy többszörös képet vagy hatalmas készítsen. Ezt nevezzük gyenge gravitációs lencsézésnek. A többszörös képek és ívek az ún. erős gravitációs lencsézés esetén keletkeznek. Ezzel a témával sok szerző foglalkozott.[15]

A bránok fogalma a húrelméleti megfontolásokból származik. Ebben az elméletben a világunkat egy hártyszerű képződménynek, ún. bránnak képzelik el. A látható anyag és a fény erre a bránra van korlátozódva.

Dolgozatomban ismertetem a fény elhajlását, valamint a gravitációs lencsézést gömb-szimmetrikus téridőkben, előbb Schwarzschild, majd Reissner-Nordström téridők esetén. Utóbbi elektromos töltéssel rendelkező fekete lyukat ír le, melyet újabban asztrofizikai fekete lyukak modellezésére használnak.

Új eredményképpen bemutatom a fényelhajlást és gravitációs lencsézést a brán-elméletekben megjelenő, tömeg és árapály töltés által jellemzett fekete lyuk körül. Végül a lencséző objektum mozgásának másodrendben megjelenő korrekcióit ismertetem.

A dolgozat egészében  $G = 1 = c$  egységeket használtam az analitikus eredmények bemutatásában; a numerikus eredmények megadásakor azonban  $G$  és  $c$  dimenzionális analízis segítségével visszakérült és ezek SI értékét felhasználtam.

## 2. Fényelhajlás Schwarzschild téridőben első rendig

Az általános relativitáselméletben a gömbszimmetrikus, sztatikus csillagok külső gravitációs terét az Einstein egyenletek Schwarzschild megoldása adja meg:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad (1)$$

ahol  $M$  a csillag tömege,  $t$  a Schwarzschild idő,  $r$  pedig a Schwarzschild radiális koordináta és a fénysebességet és a gravitációs állandót 1-re normáltuk ( $c = 1, G = 1$ ). A Schwarzschild téridőben levezethető a lencséző objektum mellett elhaladó elektromágneses sugárzás elhajlási szöge.

Választunk egy  $\lambda$  időszerű paramétert. A fény terjedését leíró Lagrange függvényt a következő összefüggés adja meg

$$2L = ds^2/d\lambda^2 = 0, \quad (2)$$

ahol az utolsó egyenlőség annak köszönhető, hogy az elektromágneses sugárzás a fénykúpon terjed, ezért a négyestávolság  $ds^2 = 0$ . Ezt a feltételt viszont a hatásban nem, hanem csak a mozgásegyenletekben használhatjuk ki. A Lagrange-függvény tehát

$$2L = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \dot{t}^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \dot{r}^2 + r^2(\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2), \quad (3)$$

ahol a pont a  $\lambda$  szerinti deriválást jelöli.

A  $(t, r, \theta, \varphi)$  változókra szeretnénk felírni az Euler-Lagrange egyenletet. Először tegyük ezt meg  $\theta$ -ra :

$$2r^2 \sin \theta \cos \theta \dot{\varphi}^2 - (2r^2 \dot{\theta})' = 0 \quad (4)$$

Ha a fenti egyenletben  $\theta_0 = \pi/2$  választással élünk (egyenlítői síkból induló pálya), akkor  $(r^2 \dot{\theta})' = 0$ , amiből az következik, hogy  $r^2 \dot{\theta} = \text{állandó}$ . Valamint, ha  $\dot{\theta}_0 = 0$  (egyenlítő mentén indítjuk) is kezdőfeltétel, akkor  $r^2 \dot{\theta} = 0$ , amiből  $\dot{\theta} = 0$  következik. Tehát ha az egyenlítő mentén indított próbarészecske egyenlítői síkban marad. Ha ugyanis a részecske eltérülne felfelé vagy lefelé, akkor sérülne az egyenlítő menti tükrözési szimmetria.

Mivel a téridő forgásszimmetrikus, minden pályát átforgathatunk egyenlítői síkba. Így tetszőleges pálya Lagrange függvényébe is  $\theta_0 = \pi/2$  helyettesíthető

$$2L = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \dot{t}^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2. \quad (5)$$

Látható, hogy  $t$ -től és  $\varphi$ -től nem függ a fenti kifejezés, azaz azt mondhatjuk, hogy  $t$  és  $\varphi$  ciklikus változók. Az Euler- Lagrange egyenlet általános alakjából

$$\frac{\partial L}{\partial x^a} - \frac{d}{d\lambda} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^a} = 0. \quad (6)$$

látható, hogy a ciklikus koordinátákhoz tartozó általánosított impulzusok megmaradnak. Tehát

$$\dot{t} \left(1 - \frac{2M}{r}\right) = E. \quad (7)$$

és

$$r^2 \dot{\varphi} = J \quad (8)$$

megmaradó mennyiségek, amelyek kapcsolatban állnak az energiával és az impulzusmomentummal.

Használjuk most ki, hogy  $ds^2 = 0$ . Ekkor

$$0 = \dot{r}^2 - E^2 + \frac{J^2}{r^2} \left(1 - \frac{2M}{r}\right). \quad (9)$$

A fenti egyenlet felfogható egyfajta radiális egyenletként is (a tulajdonképpeni radiális egyenlet első integrálja). Mivel ebben az alakban nem tudjuk integrálni, ezért áttérünk a  $\varphi$  szerinti deriválásra és  $r$  helyett az  $u = 1/r$  változóra. Ekkor az egyenlet a következőképpen alakul:

$$0 = u'^2 - \frac{E^2}{J^2} + u^2(1 - 2Mu). \quad (10)$$

Deriváljuk fenti egyenletet:

$$0 = u'(u'' + u - 3Mu^2). \quad (11)$$

Látjuk, hogy két eset lehetséges:

1.eset

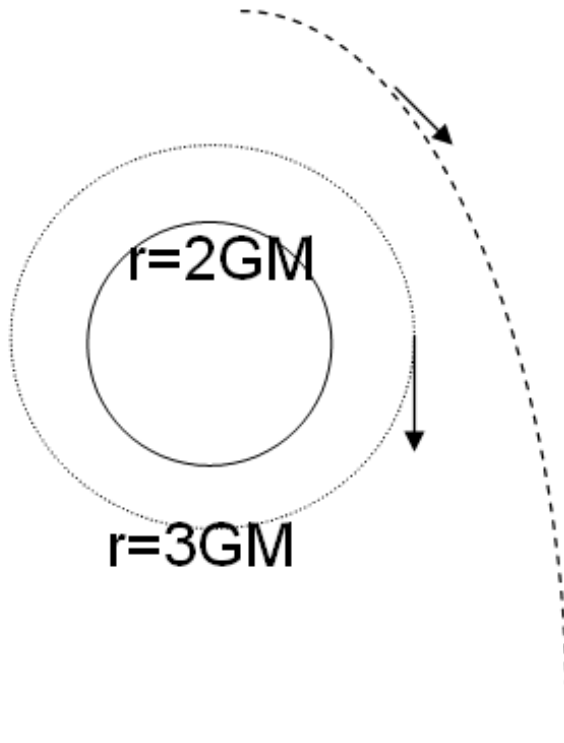
$u' = 0 \rightarrow r' = 0$  tehát  $r = \text{állandó}$ . A foton körpályán mozog a csillag körül.

2.eset

$$u'' + u = 3Mu^2. \quad (12)$$

Tekintsünk most olyan fotonpályákat, amelyek majdnem körpályák. Ekkor  $u'' \sim 0$ , azaz  $r \sim 3M$ . Határesetben kimondhatjuk, hogy a körpálya sugara  $3M$ . Ez nagyobb, mint a Schwarzschild sugár,  $r_S = 2M$

Gravitációs potenciált elhagyó fény gravitációs vöröseltolódást szenved. Ha a tömeg elég kompakt, hogy a sugara kisebb legyen, mint  $r_S$ , akkor fekete lyuk keletkezik, melynek  $r_S$  az eseményhorizontja. Az eseményhorizonton a vöröseltolódás végtelen. Ha a fény el szeretné hagyni az eseményhorizontot, akkor folyamatosan elveszíti a teljes energiáját, így nem tud kijutni a fekete lyuk környezetéből. A Nap esetén  $r_S \approx 3$  km, jóval a Nap felszínén belül. Csillagok körül tehát nem valósulnak meg a kör alakú fotonpályák, de fekete lyuk körül lehetséges, mert nagyon görbült a tér. Az  $r = 3M$  viszont instabil körpálya.



1. ábra. Stabil és instabil pályák

Oldjuk meg a homogén egyenletet:

$$u'' + u = 0. \quad (13)$$

Ez egy oszcillátor egyenlet, amelynek általános megoldása:

$$u = A \sin \varphi + B \cos \varphi. \quad (14)$$

A két konstans a következő módon választjuk meg. 1. Ha  $\varphi = 0$ , akkor  $u = 1/b$ . 2. Ha  $\varphi \rightarrow -\pi/2$ , akkor  $u = 0$ . Így a két konstans értéke  $A = 0$  és  $B = 1/b$ , ahol  $b$  az ún.

impakt vagy ütközési paraméter. A  $b$  adja meg az el nem térített sugár és az objektum távolságát. Tehát a homogén egyenlet megoldása:

$$u = \frac{1}{b} \cos \varphi. \quad (15)$$

Térjünk vissza az eredeti egyenlethez, ennek megoldását keressük következő alakban:

$$u = \frac{1}{b} \cos \varphi + \varepsilon v(\varphi), \quad (16)$$

ahol

$$\varepsilon = \frac{M}{b}. \quad (17)$$

poszt-newtoni paraméter. Az elsőrendű  $v$  függvényre a következő adódik

$$v = \frac{1}{2b}(3 - \cos 2\varphi). \quad (18)$$

Tehát az eredeti egyenlet megoldása:

$$u = \frac{1}{b \cos \varphi} + \frac{M}{2b^2}(3 - \cos 2\varphi). \quad (19)$$

A fényelhajlás  $\delta\varphi$  szögét a következő megfontolásból kaphatjuk meg. Ha  $r \rightarrow \infty$ , akkor  $u = 0$  és  $\varphi = \pi/2 + \delta\varphi/2$ , tehát

$$0 = \frac{1}{b} \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\delta\varphi}{2}\right) + \frac{M}{2b^2}(3 - \cos \pi).$$

Az első tagot Taylor sorba fejtvé  $\delta\varphi$ -re a következő kifejezést kapjuk:

$$\delta\varphi = \frac{4M}{b}. \quad (20)$$

Ez a kifejezés lesz az elhajlás szöge, vezető (0.-ad rendben).

A Nap esetében ez az elhajlási szög  $r_{\min} = r_{\odot}$  és  $M = M_{\odot}$  esetén számolva

$$\delta\varphi_{\odot} = 1,75'' . \quad (21)$$

Ezt az értéket mérte ki Eddington, igazolva Einstein számításait.

### 3. Gyenge gravitációs lencsézés

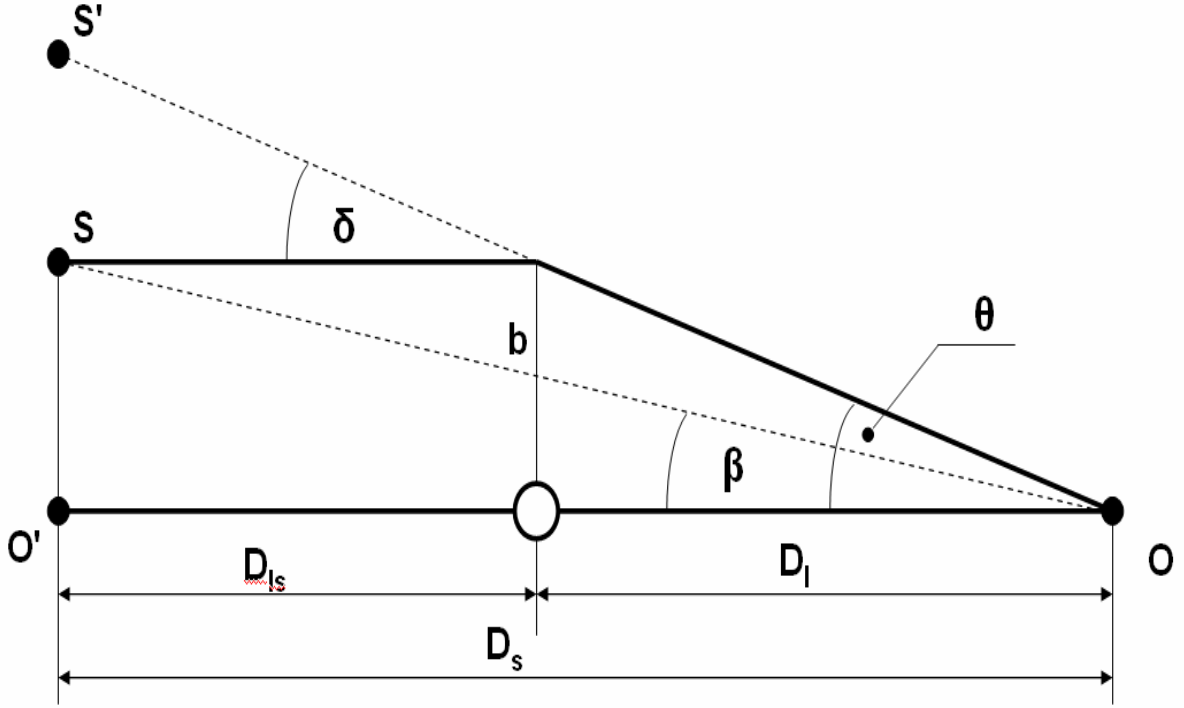
Írjuk fel a Schwarzschild metrikát egy radiálisan terjedő foton pályájának két pontjára:

$$ds^2 = 0 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 \quad (22)$$

Számoljuk ki, mennyi a fény terjedési sebessége ezekben a koordinátákban

$$c(r) = \frac{dr}{dt} = 1 - \frac{2M}{r}. \quad (23)$$

Ez a vákuumbeli fénysebességnél kisebb érték. Ez a fénynek nem a tényleges, hanem a  $(t, r)$  koordinátákban mért látszólagos sebessége.



2. ábra. A lencsésítés geometriája

Bevezethető az alábbi paraméter:

$$n = \frac{c}{c(r)} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \approx 1 + \frac{2M}{r} \quad (24)$$

A fény elhajlását okozó tömeg tehát úgy viselkedik, mint egy lencse, amelynek  $n$  a törésmutatója. A törésmutató függ  $r$ -től.

A fény elhajlása az objektumok képeinek megsokszorozódását okozhatja. Ha a három test pontosan egy egyenesen van, akkor a képek gyűrűt alkotnak, amit Einstein gyűrűnek neveznek.

A Nap által okozott fényelhajlás miatt nem láthatunk Einstein-gyűrűket a Földön. A Nap által okozott Einstein-gyűrűt csak a Naptól mért

$$d = \frac{r_{\odot}}{\tan\left(\frac{\delta\varphi_{\odot}}{2}\right)} \approx 1000 C_s E \quad (25)$$

távolságban láthatnánk.

A következőkben levezetjük a gravitációs lencse alapegyenletét. Mint eddig is, a fényt sugárnak tekintjük, hullámjellegével nem foglalkozunk. Ezenkívül a vékony lencse közelítést alkalmazunk, mely szerint a forrás, az objektum és a megfigyelő egymáshoz viszonyított relatív sebességei sokkal kisebbek, mint a fénysebesség. Valamint a megjelenő szögeket kis szögeknek tekintjük.

A geometriából látszik, hogy

$$SS^I = D_{ls}\delta$$

valamint

$$SS^I = S^I O^I - SO^I = D_s \Theta - D_s \beta = D_s (\Theta - \beta).$$

Így

$$\beta = \theta - \frac{D_{ls}}{D_s} \delta, \quad (26)$$

a  $\delta = 4GM/c^2 b$  és  $b = D_l \theta$  összefüggések behelyettesítése után  $\theta$ -ra egy másodfokú egyenlet adódik, melynek gyökei:

$$\theta_{1,2} = \frac{\beta}{2} \pm \frac{\sqrt{\Delta}}{2}, \quad (27)$$

ahol

$$\Delta = \beta^2 + \frac{D_{ls}}{D_s D_l} 16M. \quad (28)$$

Ha  $\beta = 0$ , a két gyök egybeesik

$$\theta_E = 2\sqrt{M} \sqrt{\frac{D_{ls}}{D_s D_l}} \quad (29)$$

helyen. Azonban a probléma tengelyszimmetrikus jellege miatt a nemcsak két kép keletkezik, hanem az összes többi azimutális szög irányában. Ezért  $\theta_E$  nem más, mint az Einstein gyűrű radiánban kifejezett sugara.

## 4. Az elhajlási szög meghatározása másodrendig

### 4.1. Schwarzschild fekete lyuk

Már korábban is megkaptuk az alábbi egyenletet ( $G=1, c=1$ ) [15]:

$$\frac{d^2 u}{d\varphi^2} + u = 3Mu^2 \quad (30)$$

Keressük a másodrendben érvényes megoldást a következő alakban

$$u = u_0 + \epsilon u_1 + \epsilon^2 u_2 + \dots \quad (31)$$

majd írjuk vissza a fenti differenciálegyenletbe.

A homogén egyenlet megoldása  $u_0 = u_N \cos \varphi$ , ahol az  $u_N = 1/b$ , vagyis a  $b$  impakt paraméter reciproka. Az  $\epsilon = Mu_N$  kis paraméter, amit szintén visszaírunk az egyenletbe. A következőt kapjuk:

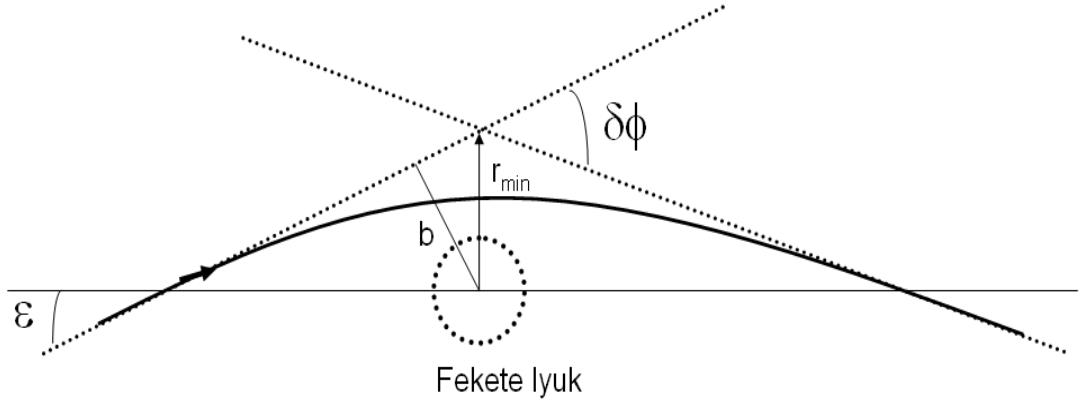
$$(u_0'' + u_0) + \epsilon(u_1'' + u_1 - 3u_N \cos^2 \varphi) + \epsilon^2(u_2'' + u_2 - 6u_1 \cos \varphi + 6Mu_1^2) + \dots = 0 \quad (32)$$

Írjuk össze az  $\epsilon$  és  $\epsilon^2$ -es tagokat:

$$u_1'' + u_1 = 3u_N \cos^2 \varphi \quad (33)$$

$$u_2'' + u_2 = 6u_1 \cos \varphi + 6Mu_1^2 \quad (34)$$





3. ábra. A fény elhajlása

Ezeket megoldva meg lehet határozni a megoldást:

$$u \sim u_N \left[ \cos \varphi + \frac{1}{2} M u_N (3 - \cos(2\varphi)) + \frac{3}{16} M^2 u_N^2 (20\varphi \sin \varphi + \cos(3\varphi) + 10 \cos \varphi) \right] \quad (35)$$

Ha a fénysugár a végtelenből érkezik, akkor azt mondhatjuk, hogy  $u = 0$  és a fénysugár eltérése az egyenes vonalú mozgástól nagyon kicsi lesz  $\varphi = \pi/2 + \delta\varphi/2$ . A  $\delta\varphi$  kicsi, így a trigonometrikus tagok sorba fejthetők. Ekkor az elhajlási szögre a következőt kapjuk:

$$\delta\varphi \approx \frac{4M}{b} + \frac{M^2}{b^2} \frac{15}{4} \pi \quad (36)$$

Ha a legközelebb vagyunk a lencséző objektumhoz, akkor  $u = 1/r_{\min}$ ,  $\varphi = 0$  és  $u_N = 1/r_{\min} [1 - M/r_{\min} - 1/16M/r_{\min}]$ . Az elhajlási szög másodrendig tehát:

$$\delta\varphi \approx \frac{4M}{r_{\min}} + \frac{M^2}{r_{\min}^2} \left( \frac{15}{4} \pi - 4 \right) \quad (37)$$

Nap esetén az elhajlás szögének első és másodrendű járulékei:

$$\delta\varphi_0 \approx 1.75000914'' , \quad (38)$$

$$\delta\varphi_1 \approx 7.22'' \times 10^{-6} . \quad (39)$$

Látható, hogy a járulék nagyon kicsi lesz az első vezető taghoz képest.

Kompakt égitest esetében azonban már más a helyzet. Például egy  $10 M_{\odot}$  fekete lyukra nézve,  $b = 100 M_{\odot}$  impakt paraméter esetén viszont a másodrendű korrekció már nem elhanyagolható:

$$\delta\varphi_0 \approx 22.918^\circ , \quad (40)$$

$$\delta\varphi_1 \approx 6.750^\circ . \quad (41)$$

## 4.2. Reissner -Nordström fekete lyuk

A Reissner-Nordström fekete lyukat az  $M$  tömege és  $Q$  elektromos töltés paramétere jellemzi[19]. Metrikája a következő:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)^{-1}dr^2 + r^2d\Omega^2$$

Ugyanazt a procedúrát elvégezve, mint a Schwarzschild eseténél, a következő egyenletet kapjuk:

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = 3Mu^2 - 2Q^2u^3. \quad (42)$$

Az előző számoláshoz hasonlóan beírjuk az egyenletbe a  $u = u_0 + \epsilon u_1 + \epsilon^2 u_2 + \dots$  kifejezést és a következőt kapjuk:

$$(u_0'' + u_0) + \epsilon(u_1'' + u_1 - 3u_N \cos^2 \varphi) + \epsilon^2(u_2'' + u_2 - 6u_1 \cos \varphi + 6Mu_1^2 + 2\frac{Q^2}{M^2} \cos^3 \varphi) + \dots = 0 \quad (43)$$

Ismét oldjuk meg  $\epsilon$  és  $\epsilon^2$ -re

$$u_1'' + u_1 = 3u_N \cos^2 \varphi \quad (44)$$

$$u_2'' + u_2 = 6u_1 \cos \varphi + 6Mu_1^2 - 2\frac{Q^2}{M^2} \cos^3 \varphi \quad (45)$$

Ezeket az egyenleteket megoldva:

$$u \approx u_N \left[ \cos \varphi + \frac{1}{2}Mu_N(3 - \cos 2\varphi) + \frac{3}{16}M^2u_N^2 \left[ \left(20 - \frac{4Q^2}{M^2}\right) \varphi \sin \varphi + \left(1 + \frac{Q^2}{3M^2}\right) \cos 3\varphi \right] \right] \quad (46)$$

Az elhajlás szöge

$$\delta\varphi \approx 4M/r_{\min} + M^2/r_{\min}^2(15/4\pi - 4) - 3/4\frac{Q^2}{r_{\min}^2}\pi \quad (47)$$

Az impakt paraméterrel kifejezve:

$$\delta\varphi \approx \frac{4M}{b} + \frac{M^2}{b^2} \frac{15}{4}\pi - \frac{3}{4} \frac{Q^2}{b^2}\pi \quad (48)$$

Asztrofizikai fekete lyukaknak nem ismert nettó elektromos töltése, azonban egyes modellek szerint akkréciós koronggal ellátott fekete lyuk modellezhető Reissner-Nordström téridővel.

## 5. Einstein elhajlási szög kiszámítása általános sztatikus gömbszimmetrikus metrikára

Felírjuk egy általános sztatikus és gömbszimmetrikus (nem feltétlenül vákuum) téridőnek az ívelemnégyzetét[16]:

$$ds^2 = B(r)dt^2 - A(r)dr^2 - D(r)r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \quad (49)$$

ahol  $A, B, D$  tetszőleges függvények. A null geodetikus egyenletek

$$\frac{dv^i}{dk} + \Gamma_{jk}^i v^j v^k = 0 \quad (50)$$

ahol

$$g_{ij}v^j v^j = 0 \quad (51)$$

$v^i = \frac{dx^i}{dk}$  a tangens vektora a null geodetikusnak.  $k$  az affin paraméter.

A fenti egyenletek értelmében

$$B \frac{dt}{dk} = K \quad (52)$$

$$Dr^2 \sin^2\theta \frac{d\varphi}{dk} = J \quad (53)$$

$$\frac{d^2\theta}{dk^2} + \left(\frac{2}{r} + \frac{D'}{D}\right) \frac{dr}{dk} \frac{d\theta}{dk} - \sin\theta \cos\theta \left(\frac{d\varphi}{dk}\right)^2 = 0 \quad (54)$$

és

$$\frac{d^2r}{dk^2} + \frac{A'}{2A} \left(\frac{dr}{dk}\right)^2 - \frac{D'r^2 + 2Dr}{2A} \left[ \left(\frac{d\theta}{dr}\right)^2 + \sin^2\theta \left(\frac{d\varphi}{dr}\right)^2 \right] + \frac{B'}{2A} \left(\frac{dt}{dk}\right)^2 = 0 \quad (55)$$

$K$  és  $J$  integrációs konstansok. Felírható még:

$$\frac{dt}{dk} = \frac{1}{B} \quad (56)$$

Kihasználható a metrika gömbszimmetriája, válasszuk  $\theta = \pi/2$ -nek. Weinberg munkája nyomán megkapjuk a foton pályáját:

$$\varphi(r) - \varphi_\infty = \int_r^\infty \left(\frac{A(r)}{D(r)}\right)^{1/2} \left[ \left(\frac{r}{r_0}\right)^2 \frac{D(r)}{D(r_0)} \frac{B(r_0)}{B(r)} - 1 \right]^{1/2} \frac{dr}{r} \quad (57)$$

ahol  $r_0$  a legközelebbi távolság, amelyre megközelíti a fény az objektumot. Az integrációs konstans  $J$  pedig:

$$J = r_0 \sqrt{\frac{D(r_0)}{B(r_0)}} \quad (58)$$

Az Einstein eltérítési szögre ezek után a következő adódik

$$\delta\varphi(r_0) = 2|\varphi(r_0) - \varphi_\infty| - \pi$$

## 6. Brán-világok

Négy különböző alapvető kölcsönhatást ismerünk, amelyek az elemi részecskék között fel-lephetnek: az elektromágneses kölcsönhatást, ami igen nagy szerepet játszik hétköznapjainkban, a gyenge kölcsönhatást, amely a neutron úgynevezett  $\beta$ -bomlásáért felelős, az erős kölcsönhatást, ez tartja egyben az atommagot, és természetesen a gravitációt, ami a részecskék tömegével arányos vonzóerőt ad. Az elmúlt harminc évben kiderült, hogy az elektromágnességet és a gyenge kölcsönhatásokat egyetlen egyesített elmélettel lehet leírni, ez az elektroyenge-elmélet (más néven a Standard Modell). Ennek alapvető energiaskáláját a kölcsönhatást közvetítő részecskék (W- és Z-mértékbozonok) tömege határozza meg, és értéke hozzávetőlegesen 100 GeV, vagyis a proton tömegének 100-szorosa. Ezen kívül az is világossá vált, hogy az erős kölcsönhatás is igen jól beilleszthető a Standard Modellbe, ha az erős kölcsönhatás kvarkok között hat, amely kvarkok a proton és a neutron elemi építőkövei. Tehát az elektroyenge és az erős kölcsönhatások egyetlen egyesített elmélettel, a részecskefizika Standard Modelljével írhatók le, és az elmélet alapvető elemi skálája 100 GeV körüli.

A gravitációs skála hatalmas értéke okozza a részecskefizika egyik legnagyobb dilemmáját: hogyan lehetséges, hogy a két elmélet (amelyek remélhetőleg egyetlen alapvető elmélet két különböző megnyilvánulásai) skálája ilyen mértékben különbözzön egymástól. A kvantumelméleti effektusok (hurokkorrekciók) még súlyosabbá teszik ezt a problémát: a Standard Modellben ugyanis létezik egy (mindmáig kísérletileg nem észlelt) részecske, a Higgs-bozon, ami alapvető szerepet játszik az elméletben, hiszen az összes többi részecske a Higgs-bozonnal való kölcsönhatás révén „kap” tömeget. Tehát ennek a Higgs-bozonnak a tömege és a kölcsönhatásai határozzák meg a modell összes többi részecskéjének a tömegét. A kvantumeffektusok (hurokeffektusok) révén viszont a Higgs-bozon tömege  $M_P$  (Planck tömeg) nagyságú korrekciókat kapna. Vagyis a Standard Modellben az elektroyenge-elmélet skálája destabilizálódik a kvantumeffektusok révén, és ez a gravitációs kölcsönhatás Planck-skálája és az elektroyenge-skála közti óriási különbség következménye. Ezt nevezik hierarchia problémának, ami a részecskefizika egyik legmélyrehatóbb kérdése. Az elmúlt két év új extra dimenziós elméleteinek egyik fő célja, hogy magyarázatot találjanak erre az izgalmas kérdésre.

A húrelméletben az alapvető részecskék szerepét egy apró rezgő húr veszi át. Ez a hipotézis azért izgalmas, mert a húr elemi gerjesztései (amelyek az elemi részecskéknek felelnek meg) automatikusan tartalmazzák a gravitáció kvantumát, a 2-es spinű gravitont. A húrelmélet egy véges kvantumelmélet

Kutatók felismerték azt, hogy a húrelméletben létezhetnek kiterjedt objektumok, amelyek membránokhoz hasonlítanak. Az elnevezésük innen származik: brán. A brán nem szükségszerűen kétdimenziós, lehet magasabb dimenziójú is. Ezek alapján a membránt 2-bránnak, a húr 1-bránnak hívjuk. A legérdekesebb a 3-brán, hiszen ennek három térdimenziója van és mi is a világunkban csak három dimenziót érzékelünk.

Az anyag (azaz mi is) egy három dimenziós bránon létezik. A gravitáció azonban maga a tér deformációja, tehát a gravitáció szükségszerűen az összes téridő dimenzióban terjed. Így a gravitációs állandó nem valódi természeti állandó, csak egy effektív paraméter, amit a jelenleg elérhető energiákon mérünk.

Amennyiben elég nagy energiákat (vagyis kis távolságokat) próbálnánk ki, akkor az extra dimenziók „megnyílnának” előttünk, és a valós fundamentális természeti állandót mérhetnénk meg.[17]

Húrelméleti elképzelések megmutatták, hogy ha míg az anyagi mező egy 3-bránon van lokalizálva 1+3+d dimenzióban, addig a gravitáció behatolhat az extra dimenziókba. Ezeknek az extra dimenzióknak nem muszáj kompaktnak lenniük. Ez adhat magyarázatot arra, miért olyan gyenge a gravitációs kölcsönhatás a másik három kölcsönhatáshoz képest.

Ha nincs kozmológiai konstans, akkor a vákuum bránon a módosított Einstein egyenlet:

$$G_{ab} = -\varepsilon_{ab} , \quad (59)$$

ahol  $\varepsilon_{ab}$  az ötdimenziós tér (a bulk) Weyl görbületének elektromos része.

## 7. Fekete lyukak a bránon

Ha az anyag a gravitáció hatására összezuhan a 3-bránon és nem feltesszük, hogy nem forog, akkor fekete lyukká alakul. Ezt a fekete lyukat a Schwarzschild metrika írja le helyesen az általános relativitáselmélet szerint.

Ebben a részben egy olyan fekete lyuk megoldást tárgyalunk, amely formailag hasonlít a Reissner-Nördstrom fekete lyuk megoldásra, azonban nem szerepel benne elektromos töltés. A Schwarzschild potenciál  $\Phi = -M/(M_p^2 r)$ - ahol  $M_p$  a Planck tömeg- a következőképpen módosul:

$$\Phi = -\frac{M}{r} + \frac{q}{2r^2} ,$$

ahol  $q$  konstans paraméter az ún. árapály-töltés, amelynek értéke lehet pozitív vagy negatív.

Megmutatható, hogy az effektív mezőegyenletek egy ekzakt fekete lyuk megoldása a bránon az alábbi indukált metrikából adódik:

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + f^{-1}(r)dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) , \quad (60)$$

ahol

$$f(r) = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{q}{r^2} . \quad (61)$$

Az ilyen fekete lyukakat két paraméter jellemzi: az  $M$  tömeg és a  $q$  árapály-töltés.

Formálisan a fenti metrika a Reissner-Nordström megoldása a gömbszimmetrikus Einstein-Maxwell rendszernek az általános relativitáselméletben. A különbség a kettő között, hogy Reissner-Nordström metrikában  $q$  árapály paraméter helyett az elektromos töltés  $Q$  négyzete szerepel.  $q = Q^2$ , így ez mindig pozitív. Brán világoknál viszont a  $q$  bármely értéke megengedett.

Abban az esetben, ha  $q > 0$ , akkor a metrika teljesen megegyezik az általános relativitáselméletbeli Reissner-Nordström metrikával. A  $q < m^2$  leírja az árapály töltésű fekete lyukat két horizonttal:  $r_h = M \pm \sqrt{(M^2 - q)}$ , mindkettő a Schwarzschild sugáron belül.  $q = M^2$  esetén a két horizont egybeesik  $r_h = M$  -nél (ez az eset analóg a külső Reissner-Nordström fekete lyukkal).

Ezekben az esetekben evidens, hogy a gravitációs fényelhajlás és a gravitációs lencsézés csökken a  $q$ -val.  $q > M^2$  esetén a metrika csupasz szingularitást ír le. Az árapály töltés  $q$  lehet kisebb vagy nagyobb a bránon.

Bármely  $q < 0$  esetben csak egy horizont van  $r_h = M + \sqrt{(M^2 + |q|)}$ . Ezeknél a fekete lyukaknál a gravitációt növeli a bránon levő árapály töltés. A fényelhajlás és a gravitációs lencsézés erősebb, mint a Schwarzschild megoldásnál.

A metrika leírhat még kompakt sztelláris objektumokat is.[17]

## 7.1. Fényterjedés

A fény követi a metrika null geodetikusait. A mozgásegyenletek megkaphatók mind a geodetikus egyenletekből, mind pedig a Lagrange függvényből  $2L = ds^2/d\lambda^2$  (ahol  $\lambda$  egy paramétere a null geodetikus görbéknek). Az egyenlítői síkon keresztül a gömbi és tükrözési szimmetria miatt  $\theta = \pi/2$ -nek választható. Ezek után:

$$0 = 2L = -f(r)\dot{t}^2 + f^{-1}(r)\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 \quad (62)$$

A ciklikus koordináták  $t$  és  $\varphi$  adják a mozgás megmaradó mennyiségeit  $E$  és  $J$ -t.

$$E = f\dot{t} \quad (63)$$

$$J = r^2\dot{\varphi} \quad (64)$$

Visszaírva ezeket az egyenletekbe és bevezetve egy új radiális változót  $u = 1/r$  és úgy tekintünk  $\varphi$ -re, mint független változóra azt kapjuk, hogy

$$(u')^2 = \frac{E^2}{J^2} - u^2 f(u) \quad (65)$$

Hacsak  $u' = 0$  (amely a foton körpályája), a fenti egyenlet a következőképpen alakul

$$u'' = -uf - \frac{u^2}{2} \frac{df}{du} \quad (66)$$

$f = 1$  esetre, mikor nincs gravitáció (a metrika sík lesz) a fent említett egyenlet egyszerűsödik

$$u'' + u = 0 \quad (67)$$

amelynek megoldása  $u = u_0 = b^{-1} \cos \varphi$ . Az impakt paraméter  $b$  reprezentálja azt a legközelebbi távolságot, amelyre a fény megközelíti a csillagot. A polár szög  $\varphi$  pedig az a szög, amely a csillag középpontjától húzott vonal a legközelebbi távolság felé. Ha  $u' = 0$ , akkor adódik egy aszimptotikus limit  $u = b^{-1}$ , valamint  $M = 0 = q$  és  $b = J/E$ .

## 7.2. Perturbatív megoldás

A másodrendű járulékok figyelembevételével a következő egyenlet adódik [18]:

$$u'' + u = 3Mu^2 - 2qu^3. \quad (68)$$

Hogy tanulmányozni tudjuk a gyenge lencsézést, keresünk egy perturbatív megoldást a következő kis paramétereket felhasználva:

$$\varepsilon = Mb^{-1}, \quad (69)$$

$$\eta = qb^{-2}. \quad (70)$$

Ebben a formában:

$$u = b^{-1} \cos \varphi + \varepsilon u_1 + \eta v_1 + \varepsilon^2 u_2 + \eta^2 v_2 + \varepsilon \eta w_2 + O(\varepsilon^3, \eta^3, \varepsilon \eta^2, \varepsilon^2 \eta). \quad (71)$$

Írjuk fel az ismeretlenek  $u_1$ ,  $u_2$ ,  $v_1$ ,  $v_2$  és  $w_2$  együtthatóik szerint:

$$\varepsilon : u_1'' + u_1 = 3b^{-1} \cos^2 \varphi. \quad (72)$$

$$\eta : v_1'' + v_1 = -2b^{-1} \cos^3 \varphi. \quad (73)$$

$$\varepsilon^2 : u_2'' + u_2 = 3u_1[u_1(M - 2qb^{-1} \cos \varphi) + 2 \cos \varphi]. \quad (74)$$

$$\eta^2 : v_2'' + v_2 = 3v_1[v_1(M - 2qb^{-1} \cos \varphi) - 2 \cos^2 \varphi]. \quad (75)$$

$$\varepsilon\eta : w_2'' + w_2 = 6[u_1v_1(M - 2qb^{-1} \cos \varphi) + v_1 \cos \varphi - u_1 \cos^2 \varphi]. \quad (76)$$

Az első rendű egyenletek megoldásai:

$$u_1 = \frac{b^{-1}}{2}(3 - \cos 2\varphi). \quad (77)$$

$$v_1 = -\frac{b^{-1}}{16}(9 \cos \varphi - \cos 3\varphi + 12\varphi \sin \varphi). \quad (78)$$

Az  $mu_1$  és  $mu_2$  mennyiségek  $\varepsilon$  rendűek, amíg  $qb^{-1}u_1$  és  $qb^{-1}v_1$  mennyiségek  $\eta$  rendűek. A maradék három tag megoldása:

$$u_2 = \frac{3b^{-1}}{16}(10 \cos \varphi + \cos 3\varphi + 20\varphi \sin \varphi). \quad (79)$$

$$v_2 = \frac{b^{-1}}{256}(192 \cos \varphi - 48 \cos 3\varphi + \cos 5\varphi + 384\varphi \sin \varphi - 36\varphi \sin 3\varphi - 72\varphi^2 \cos \varphi). \quad (80)$$

$$w_2 = \frac{b^{-1}}{16}(-87 + 40 \cos 2\varphi - \cos 4\varphi + 12\varphi \sin 2\varphi). \quad (81)$$

Messze a lencsézó objektumtól  $u = 0$  és  $\varphi = \pi/2\pi + \delta\varphi/2$ , ahol  $\delta\varphi$  reprezentálja azt a szöveget, amely az  $M$  tömegű és  $q$  árapálytöltésű objektum eltéríti az arra érkező fénysugarat. Másodrendű közelítésben  $\delta\varphi$  az alábbi alakot ölti:

$$\delta\varphi = \varepsilon\alpha_1 + \eta\beta_{r_1} + \varepsilon^2\alpha_2 + \eta^2\beta_2 + \varepsilon\eta\gamma_2 + O(\varepsilon^3, \eta^3, \varepsilon\eta^2, \varepsilon^2\eta). \quad (82)$$

Az elhajlás alakja pedig a számolások után a következő lesz:

$$\delta\varphi = 4\varepsilon - \frac{3\pi}{4}\eta + \frac{15\pi}{4}\varepsilon^2 + \frac{105\pi}{64}\eta^2 - 16\varepsilon\eta. \quad (83)$$

Az első három tagját a fenti kifejezésnek már korábban meghatározták [16] a Reissner-Nordström fekete lyukra.

Az elhajlás szögét megadhatjuk a Minkowski impakt paraméter függvényeként. Azonban hasznosabb megadni a legközelebbi távolság  $r_{\min}$  függvényében. Az  $r_{\min}$  értékét megkapjuk, ha beírjuk  $u = 1/r_{\min}$  és  $\varphi = 0$ .

$$r_{\min} = b(1 - \varepsilon + \frac{1}{2}\eta - \frac{17}{16}\varepsilon^2 - \frac{81}{256}\eta^2 + 2\varepsilon\eta). \quad (84)$$

Invertálva ezt a formulát megkapjuk a másodrendű pontossággal:

$$\frac{1}{b} = \frac{1}{r_{\min}} \left( 1 - \frac{M}{r_{\min}} + \frac{q}{2r_{\min}^2} - \frac{M^2}{16r_{\min}^2} + \frac{47q^2}{256r_{\min}^4} + \frac{Mq}{2r_{\min}^3} \right). \quad (85)$$

Az elhajlás szöge csak első és másodrendű járulékokból áll, a fenti formula csak elsőrendű

$$\delta\varphi = \frac{4M}{r_{\min}} - \frac{3\pi q}{4r_{\min}^2} + \frac{(15\pi - 16)M^2}{4r_{\min}^2} + \frac{57\pi q^2}{64r_{\min}^4} + \frac{(3\pi - 28)Mq}{2r_{\min}^3}. \quad (86)$$

## 8. Gyenge gravitációs lencsézés brán fekete lyuknál

A továbbiakban vizsgáljuk meg mi történik  $q$  különböző értékeinél. Használjuk fel a gyenge gravitációs lencsézésnél  $\theta$ -ra kapott (26) összefüggést, melynek nyomán egy harmadfokú egyenletet áll elő:

$$\theta^3 - \beta\theta^2 - b\theta - c = 0, \quad (87)$$

ahol

$$b = 4M \frac{D_{ls}}{D_s D_l},$$

$$c = (5M^2 - q) \frac{3\pi D_{ls}}{4D_s D_l^2}.$$

Az egyenlet három gyöke:

$$\theta_1 = \frac{\beta}{3} + \frac{\beta^2 + 3b}{9T} + T,$$

$$\theta_2 = \frac{\beta}{3} - \frac{1}{2} \left( \frac{\beta^2 + 3b}{9T} + T \right) - i \frac{\sqrt{3}}{2} \left( \frac{\beta^2 + 3b}{9T} - T \right),$$

$$\theta_3 = \frac{\beta}{3} - \frac{1}{2} \left( \frac{\beta^2 + 3b}{9T} + T \right) + i \frac{\sqrt{3}}{2} \left( \frac{\beta^2 + 3b}{9T} - T \right).$$

ahol

$$T = \sqrt[3]{\frac{1}{2}c + \frac{1}{6}b\beta + \frac{1}{27}\beta^3 + \sqrt{-\frac{1}{27}b^3 - \frac{1}{108}b^2\beta^2 + \frac{1}{6}bc\beta + \frac{1}{4}c^2 + \frac{1}{27}c\beta^3}}$$

Ha  $q$  paraméteret elhanyagolhatónak vesszük és a lencséző test nem nagyon kompakt (azaz a másodrendű effektusok elhanyagolhatók) akkor  $c \approx 0$ . Ekkor

$$T = \sqrt[3]{\frac{1}{6}b\beta + \frac{1}{27}\beta^3 + i \frac{\sqrt{3}b}{9} \sqrt{b + \left(\frac{\beta}{2}\right)^2}}$$

és

$$\frac{\beta^2 + 3b}{9T} - T = \frac{3b + \beta^2 - 9 \left( \frac{1}{6}b\beta + \frac{1}{27}\beta^3 + \frac{1}{18}i\sqrt{3}b\sqrt{\beta^2 + 4b} \right)^{\frac{2}{3}}}{9 \sqrt[3]{\frac{1}{6}b\beta + \frac{1}{27}\beta^3 + \frac{1}{18}i\sqrt{3}b\sqrt{\beta^2 + 4b}}}$$

$$\frac{\beta^2 + 3b}{9T} + T = \frac{3b + \beta^2 + 9 \left( \frac{1}{6}b\beta + \frac{1}{27}\beta^3 + \frac{1}{18}i\sqrt{3}b\sqrt{\beta^2 + 4b} \right)^{\frac{2}{3}}}{9 \sqrt[3]{\frac{1}{6}b\beta + \frac{1}{27}\beta^3 + \frac{1}{18}i\sqrt{3}b\sqrt{\beta^2 + 4b}}}$$



$\beta = 0$  esetben ebből

$$T = \left(\frac{b}{3}\right)^{1/2} \frac{\sqrt{3} + i}{2}$$

(felhasználtuk, hogy  $i^{1/3} = (\sqrt{3} + i)/2$ ) és

$$\begin{aligned} \frac{\beta^2 + 3b}{9T} - T &= -i\sqrt{\frac{b}{3}} \\ \frac{\beta^2 + 3b}{9T} + T &= \sqrt{b} \end{aligned}$$

következik, vagyis a gyökök:

$$\begin{aligned} \theta_1 &= \sqrt{b}, \\ \theta_2 &= -\sqrt{b}, \\ \theta_3 &= 0. \end{aligned}$$

Azt kaptuk, hogy  $\theta_1$  és  $\theta_2$  visszaadja az Einstein gyűrű sugarát, a harmadik pedig nulla.

## 9. Gravimágneses effektus

Ha a fény terjedés közben keresztülhalad egy lassan mozgó tökéletes folyadékon, akkor bevezethető egy effektív refraktív index  $n_{eff}$  paraméter, amely a Raychaudhuri-egyenlet poszt-newtoni kiterjesztéséből származik másodrendben gyengén perturbált téridőre.

$$n_{eff} = 1 - \frac{2}{c^2}\Phi + \frac{4}{c^3}A \cdot e. \quad (88)$$

Itt  $\Phi$  a skalár potenciál és  $A$  a gravitomágneses vektorpotenciál.  $e$  jelöli az egység tangens vektort a fotonpályák mentén. Ebben a közelítésben a metrika figyelembe veszi az anyagsűrűséget  $\rho$  és az áramló anyagsűrűséget  $j = \rho v$ , de elhanyagolja a feszültséget az energia-impulzus tenzorból  $T_{ij} = \rho v_i v_j + p \delta_{ij}$ . Mivel ezek a tagok kicsik, ezért nem lehet őket megfigyelni, azonban érzékenyek a sebességvektorra.

A lassan mozgó testek rendszerének közeli zónájában a retardációnak elhanyagolhatónak kell lennie; ebben az esetben a  $\Phi$  és  $A$  kifejezései a Laplace egyenlet megoldásaiból adódnak:

$$\Delta\Phi(r) = 4\pi G\rho(r) \quad \rightarrow \quad \Phi(r) = -G \int d^3r' \frac{\rho(r')}{|r - r'|}. \quad (89)$$

$$\Delta A(r) = 4\pi\pi G j(r) \quad \rightarrow \quad A(r) = -G \int d^3r' \frac{j(r')}{|r - r'|}. \quad (90)$$

Az elhajlás szöge  $\delta\varphi = e_{initial} - e_{final}$  az integrálból kapható meg:

$$\delta\varphi = \frac{2}{c^2} \int ds \nabla\Phi - \frac{4}{c^3} \int ds e \times rot A. \quad (91)$$

Ebben a kifejezésben a második tag írja le a gravimágneses effektust.[18].Ebben a képletben a második gravimágneses tag elhanyagolható nagyságú az elsőhöz képest.

## 10. Összefoglalás

A gravitációs lencsézés az univerzum egzotikus objektumainak és szerkezetének feltérképezésére, valamint a gravitáció alternatív elméleteinek tesztelésére is felhasználható.

Dolgozatom bevezető részében rövid történeti áttekintést adtam a gravitációs lencsézésről, annak jelentőségéről a kezdetektől a mostani felfedezésekig. Megtudhattuk, hogy kik voltak azok, akik munkái nyomán kiforrott ez az elmélet, valamint képet kaptunk a mostanság is folyó kutatásokról.

Ezután bemutattam a fény elhajlásának elméleti hátterét. Itt a Schwarzschild metrikát használtam kiindulásnak, majd ebből felírtam a Lagrange függvényt. Az Euler-Lagrange egyenletek felírásával megkaptam a megfelelő egyenleteket. Kihasználtam, hogy  $\theta$  konstans értéket vesz fel, valamint hogy  $t$  és  $\varphi$  ciklikus változók. Két esetet lehet megkülönböztetni. Ebből az egyik körpálya megoldást adott, a másikon pedig megoldottam a fennálló egyenletet, így megkaptam az elektromágneses hullám elhajlási szögét Schwarzschild téridőben.

A következő részben a gravitációs lencsézés geometriáját mutattam be, valamint az optikai analógiát. Felírtam a lencseegyenletet és megadtam a képek helyzetét, valamint az Einstein gyűrű sugarárát.

Ezután meghatároztam az elhajlás szögét Schwarzschild, illetve Reissner-Nordström fekete lyukra, másodrendig. Felírtam a korábban már megkapott egyenleteket, és ebbe beírtam a perturbatív megoldást. Utána szétválasztottam az  $\epsilon$  és  $\epsilon^2$  rendű egyenleteket és ezeket megoldva megkaptam az elhajlási szöget az impakt paraméter, valamint a minimális távolság függvényeként, másodrendig.

Általános esetben felírtam az Einstein elhajlási szöget általános sztatikus gömbszimmetrikus téridő esetére.

A dolgozat fő eredményét egy kis bevezető előzi meg a brán világokról. A brán világok a húrelmélet effektív részeiként foghatók fel, ahol már az 5-dimenziós Einstein egyenlet az érvényes. A bránok 4 dimenziós felületek, ahol a 4 dimenzió a 3 tér és 1 idő koordináta. Az anyag és vele együtt mi is a bránra vagyunk korlátozódva, még a fény sem hagyhatja el. A brán egy magasabb dimenziójú sokaságba, a bulk-ba van beleágyazva. A gravitáció viszont elhagyhatja a bránt, így behatolhat a rejtett extra dimenzióba is. Ez lehet a magyarázata annak, hogy a gravitációs kölcsönhatás erőssége eltölpül a másik három kölcsönhatás mellett.

Dolgozatom fő részeként, új eredményként kiszámoltam a lencsézést tömeg és árapály töltés által jellemzett brán fekete lyukra. A számolás hasonló módon történt, mint korábban a Schwarzschild és Reissner-Nordström fekete lyuk esetén, ahol az elhajlás szögét másodrendig számoltuk ki. Ez a téridő sokban hasonlít a Reissner-Nordström fekete lyuk megoldáshoz, csak míg ott a töltés négyzete szerepel, azaz nincs megengedve negatív töltés, addig itt a töltés bármilyen értéket felvehet. Megállapítottuk, hogy negatív árapály töltés esetén egy horizont keletkezik a Schwarzschild sugáron kívül, és a bulk görbülete erősíti a gravitációt a bránon, ezáltal erősebb lencsehatást fog okozni.

Dolgozatom zárásaként megadtam a gravimágneses effektus járulékát az elhajlási szög kifejezésében.

## 11. Köszönetnyilvánítás

Szeretnék köszönetet mondani témavezetőmnek, dr. Gergely Árpád Lászlónak a hasznos tanácsokért, valamint instrukciókért. Továbbá Kálmán Orsolyának és Mikóczi Balázsnak a

technikai részről nyújtott segítségéért.

## 12. Hivatkozások

Az első két rész, a fényelhajlás, valamint a gravitációs lencsézés dr. Gergely Árpád László Asztrofizika előadásai alapján készültek.

Felhasznált cikkek:

- [1]Vibhadra,K.S, Narasimha,D.,Chitre ,S.,M.,1998, A&A, 337, 1
- [2] Chwolson, O., 1924, Astronomische Nachrichten, 221, 329
- [3] Einstein, A., 1936, Sci 84, 506
- [4]Eddington, A.S., 1920, Space, time and gravitation (Cambridge University Press, Cambridge)
- [5]Chwolson, O., 1924, Astronomische Nachrichten, 221, 329
- [5]Zwicky, F.,1937a, Phys.Rev. 51, 290
- [6]Zwicky, F.,1937b, Phys.Rev. 51, 679
- [7]Klimov, Yu. G.,1963, Sov. Phys. Doklady 8, 119
- [8]Liebes, Jr. S., 1964, Phys. Rev. 133, B835
- [9]Refsdal, S., 1964a, MNRAS 128, 295  
Refsdal, S., 1964b, MNRAS 128, 307
- [10]Walsh, D.,Carswell, R. F., Weyman, R. J.,1979 Nat 279, 381
- [11]Narasimha, D., Subramanian, K., Chitre, S. M., 1984, MNRAS 210, 79
- [12]Hewitt, J. N. et al., 1987, ApJ 321, 706
- [13]Cheng, K., Refsdal, S., 1979, Nat 282, 561  
Cheng, K., Refsdal, S., 1984, A&A 132, 168
- [14]Carroll, B.W., Ostlie, D.A., 1996, An introduction to modern astrophysics (Addison Wesley) 1205. o.
- [15]Bozza,V., Phys.Rev. D66 (2002) 103001  
Serenio, M.,Phys.Rev. D69 (2004) 023002
- [16]Briet,J.,Hobill, D.2005 Gravitational lensing by charged black holes, University of Calgary preprint
- [17] Dadhich, N., Maartens,R., Papadopoulos ,P., Rezanian, V.,Phys.Lett. B487 (2000) 1-6, Whisker, R.,Phys.Rev. D71 (2005) 064004
- [18]Schafer,B.M., Bartelmann, M. 2005 astro-ph/0502208
- [19]Csáki, Cs.: Extra dimenziók
- [20]L.Á. Gergely, B. Darázs, Weak gravitational lensing in brane-worlds, FIKUT 2006