

SZEGEDI TUDOMÁNYEGYETEM
Természettudományi és Informatikai Kar

ELMÉLETI FIZIKA TANSZÉK

Fizika BSc

Szakdolgozat

Gravitációs fényelhajlás gömbszimmetrikus téridőkben

Deák Bence

Témavezető:

Dr. Keresztes Zoltán

2016

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés	2
2. Reissner-Nordström fekete lyuk	2
3. Fényelhajlás Reissner-Nordström téridőben másodrendig	3
3.1 Lagrange formalizmus	3
3.2 Geodetikus egyenletek	8
4. A kozmológiai konstans szerepe a fényelhajlásban	11
5. Schwarzschild metrika Eddington-Finkelstein koordinátákban	14
5.1 Fényelhajlás Eddington-Finkelstein koordináta rendszerben	15
6. Vaidya metrika	18
6.1 Fényelhajlás Vaidya téridőben	19
7. Összefoglalás	25
8. Köszönetnyilvánítás	25
9. Források	26
10. Nyilatkozat	26

1. Bevezetés

Az Einstein által 1915-ben megalkotott általános relativitáselméletben a fény egy tömegpont mellett elhaladva, a tér görbületét követve elhajlik, a fény pályája geodetikus pálya. Ezt a jelenséget Albert Einstein jósolta meg, majd Eddingtonnak sikerült kimutatnia, az 1919-es napfogyatkozáskor. A távoli csillagoknak a Hold által letakart Nap mellett elhaladó fénysugarai 1,74 ívmásodperces elhajlást szenvedtek a Nap gravitációjának hatására, ahogy azt az általános relativitáselmélet előre jelezte. (A Newton fény-golyó elmélet ennek az értéknek a felét adta.)

A téridő egyenlet az anyag energia-impulzus tenzorával (T_{ab}) összekapcsolódó Einstein egyenlet:

$$G_{ab} + \Lambda g_{ab} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{ab}, \quad (1)$$

ahol $G_{ab} = R_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}R$ az Einstein-tenzor, ahol g_{ab} a metrikus tenzor, $R = R_{ab}g^{ab}$ a görbületi-skalár, Λ pedig a kozmológiai állandó. Az Einstein-egyenletek azt fejezik ki, hogy az anyag hogyan görbíti maga körül a teret.

A kozmológiai konstans Einstein vezette be, hogy az Univerzum sztatikus lehessen. A sztatikus Univerzum modellje, Hubble felfedezésével tévesnek bizonyult. Edwin Hubble amerikai csillagász 1929-ben felfedezte, hogy a galaxisok távolodnak tőlünk. Minél távolabb van tőlünk egy galaxis, annál nagyobb a vörös eltolódása, azaz annál nagyobb sebességgel távolodik tőlünk, ebből az következik, hogy táguló Univerzumban élünk. A Λg_{ab} -tag tévedésnek bizonyult egészen 2011-ig, amikor kiderült, hogy a Λ fontos paraméter az Univerzum fejlődése szempontjából. Ha az Einstein-egyenletben a Λg_{ab} dominál, akkor egy exponenciálisan táguló Univerzumot kapunk, ez a de Sitter Univerzum.

Dolgozatomban $c=1=G$ egységet használtam a számolási eredmények bemutatásában.

2. Reissner-Nordström de Sitter fekete lyuk

Ebben a fejezetben a fényelhajlást ismertetem gömbszimmetrikus Reissner-Nordström téridőben. A Reissner-Nordström fekete lyukat az m tömeg és a Q töltés paraméter jellemzik. Metrikája a következő:

$$ds^2 = -f dt^2 + f^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega, \quad (2)$$

ahol $d\Omega^2 = d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\varphi^2$. f pedig

$$f(r) = 1 - \frac{2m}{r} + \frac{Q^2}{r^2} - \frac{\Lambda}{3}r^2. \quad (3)$$

A $\Lambda = 0$ a Reissner-Nordström metrika. A számolásokat ε és η paraméterek bevezetésével végzem el:

$$\varepsilon = mb^{-1}, \eta = qb^{-2}. \quad (4)$$

Ezek a dimenziótlan paraméterek kicsik, bennük másodrendig fogunk sorfejtteni.

A Q^2 elektromos töltés helyett tekinthetünk egy q pozitív és negatív értéket egyaránt felvehető paramétert. Brán fekete lyukak esetében egy ilyen q ún. árapálytöltés paraméter jelenik meg.

A fekete lyukhoz közel a q/r^2 –es tag dominál. Nagy távolságra a fekete lyuktól a Λ kozmológiai konstansos tag fog dominálni, van egy kozmológiai horizont az $r = \sqrt{3/\Lambda}$ –nál. Ez az a távolság, amelynél messzebből részecske a feketelyuk közeléből nem távozhat. Ha a kozmológiai konstansos tag nem szerepelne az $f(r)$ –ben, akkor a metrika $r \rightarrow \infty$ esetben a Minkowski-metrikával egyezik meg.

A $q > 0$ esetében a metrika megegyezik a Reissner-Nordström téridővel. A $q < m^2$ esetenél a fekete lyuknak két eseményhorizontja van: $r_h = m \pm \sqrt{m^2 - q}$. A $q = m^2$ esetben a két eseményhorizont egybeesik (extremális Reissner-Nordström téridő): $r_h = m$. A $q > m^2$ a téridő egy csupasz szingularitást ír le. Brán fekete lyuk és $q < 0$ esetén csak egy horizont van: $r_h = m + \sqrt{m^2 + |q|}$

3. Fényelhajlás Reissner-Nordström téridőben másodrendig

3.1 Lagrange formalizmus

Ezt a fejezetet a [3] és az [1] forrás felhasználásával dolgoztam fel. A Reissner-Nordström-metrikát Hans Reissner és Gunnar Nordström nevéhez kapcsoljuk.

A fény terjedése az alábbi Lagrange függvény segítségével számolható:

$$2L = \frac{ds^2}{d\lambda} = -ft^2 + f^{-1}r^2 + r^2(\dot{\vartheta}^2 + \sin^2\vartheta\dot{\varphi}^2), \quad (5)$$

ahol λ egy időszerű paraméter és a pont a λ szerinti deriválást jelöli.

Mivel az elektromágneses sugárzás a fénykúpon terjed, ahol $ds^2 = 0$, így $2L = 0$. Ezt azonban csak a variáció elvégzését követően az Euler-Lagrange mozgás egyenletekben szabad felhasználni.

A $(t; r; \vartheta; \varphi)$ változókra felírva az Euler-Lagrange egyenletek.

$$\frac{\partial L}{\partial x^a} - \frac{d}{d\lambda} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^a} = 0. \quad (6)$$

Először t -re:

$$-(2ft)' = 0, \quad (7)$$

Amelyből $ft = E$ következik. E az energiával áll kapcsolatban.

$r - r$ felírva:

$$-\frac{\partial f}{\partial r} \dot{t}^2 + 2r(\dot{\vartheta}^2 + \sin^2 \vartheta \dot{\varphi}^2) - (2f^{-1}r)' = 0, \quad (8)$$

$\vartheta - r$

$$2r^2 \sin \vartheta \cos \vartheta \dot{\varphi}^2 - (2r^2 \dot{\vartheta})' = 0. \quad (9)$$

A gömbszimmetria miatt az egyenlítői sík megválasztható oly módon, hogy $\vartheta_0 = \pi/2$ és $\dot{\vartheta}_0 = 0$ kezdőfeltételek teljesüljenek. Ekkor $(r^2 \dot{\vartheta})' = 0$, tehát $r^2 \dot{\vartheta}$ állandó. Ha a $\dot{\vartheta}_0 = 0$ kezdőfeltételt használjuk, akkor $r^2 \dot{\vartheta} = 0$, amiből $\dot{\vartheta} = 0$ következik. Tehát a részecske az egyenlítői síkban marad (Ha eltérülne fel vagy lefelé, akkor sérülne a tükrözési szimmetria.). Másképpen, mivel a téridő forgásszimmetrikus, ezért minden pályát átforgathatunk egyenlítői síkra. Ekkor a Lagrange függvény a következő alakú lesz.

$$0 = 2L = -f\dot{t}^2 + f^{-1}\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2. \quad (10)$$

Látható, hogy t -től és φ -től nem függ a kifejezés, t és φ ciklikus változók.

φ -re:

$$-(2r^2 \dot{\varphi})' = 0. \quad (11)$$

A (11)-es egyenlet integrálása után látszik, hogy $r^2 \dot{\varphi} = J$, ami az impulzusmomentummal áll kapcsolatban és megmarad a pálya mentén.

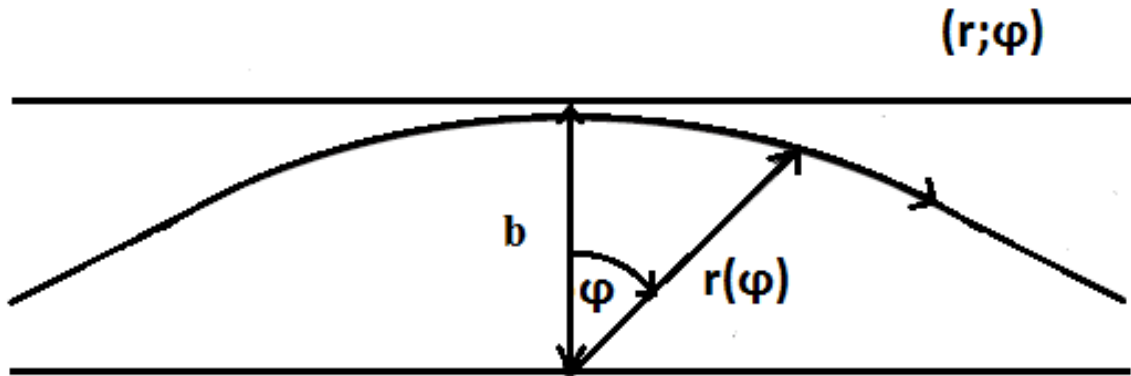
Kihasználva, hogy $ds^2 = 0$, a radiális egyenlet:

$$0 = \dot{r}^2 - E^2 + \frac{J^2}{r^2} f. \quad (12)$$

Áttérve a λ szerinti deriválásról egy $\tilde{\varphi}$ változó szerinti deriválásra, amelyre $\frac{d\tilde{\varphi}}{d\varphi} = 1$ teljesül és bevezetve az r helyett az $u = 1/r$ függvényt kapjuk, hogy

$$0 = u'^2 - \frac{E^2}{J^2} + u^2 f(u). \quad (13)$$

Mivel $\tilde{\varphi}$ és φ csak konstansban különbözik, így továbbiakban nem teszünk különbséget $\tilde{\varphi}$ és φ között. A vessző a φ szerinti deriválást jelöli. A fényelhajlás geometriája az 1. ábrán látható.



1. ábra: Fényelhajlás geometriája.

Az egyenletet φ szerint újra deriválva kapjuk, hogy

$$0 = u' \left(u'' + u f + \frac{u^2}{2} \frac{df}{du} \right). \quad (14)$$

Körpályák kivételével, amikor $u' = 0$.

$$u'' + uf + \frac{u^2}{2} \frac{df}{du} = 0, \quad (15)$$

ahol

$$f = 1 - 2mu + qu^2, \quad (16)$$

$$\frac{u^2}{2} \frac{df}{du} = -mu^2 + qu^3, \quad (17)$$

$$uf + \frac{u^2}{2} \frac{df}{du} = u - 3mu^2 + 2qu^3. \quad (18)$$

A fentiek behelyettesítése után az

$$u'' + u = 3mu^2 - 2qu^3 \quad (19)$$

eredményt kapjuk. Látható, hogy a kozmológiai állandót tartalmazó tag kiesik.

Oldjuk meg a:

$$u'' + u = 0 \quad (20)$$

homogén egyenletet. Ennek egy általános megoldása:

$$u = A \sin \varphi + B \cos \varphi. \quad (21)$$

Az integrálási konstansok a következő módon határozhatók meg. Ha $\varphi \rightarrow \pi/2$, akkor $r \rightarrow \infty, u \rightarrow 0$. Ezért $A = 0$. Amikor a $\varphi = 0$, akkor a foton és a feketelyuk centrumától való távolságot jelöljük b -vel, ami az úgynevezett impakt vagy ütközési paraméter. Így $B = 1/b$. Tehát a homogén egyenlet megoldása:

$$u_0 = \frac{\cos \varphi}{b}. \quad (22)$$

A (19) egyenlet perturbatív megoldását keressük a következő alakban, ε és η kis paraméterek felhasználásával:

$$u = u_0 + \varepsilon u_1 + \eta v_1 + \varepsilon^2 u_2 + \eta^2 v_2 + \varepsilon \eta w_2 + O(\varepsilon^3; \eta^3; \varepsilon \eta^2; \varepsilon^2 \eta). \quad (23)$$

Ezt beírva a (19)-es egyenletben, az $u_0 - s$ tagok kiesnek.

$$\varepsilon : u_1'' + u_1 = 3b^{-1}\cos^2\varphi, \quad (24)$$

$$\eta : v_1'' + v_1 = -2b^{-1}\cos^3\varphi,$$

$$\varepsilon^2 : u_2'' + u_2 = 3u_1[u_1(m - 2qb^{-1}\cos\varphi) + 2\cos\varphi],$$

$$\eta^2 : v_2'' + v_2 = 3v_1[v_1(m - 2qb^{-1}\cos\varphi) + 2\cos^2\varphi],$$

$$\varepsilon\eta : w_2'' + w_2 = 6[u_1v_1(m - 2qb^{-1}\cos\varphi) + v_1\cos\varphi + u_1\cos^2\varphi],$$

Az mu_1 és az mv_1 mennyiségek ε rendűek, amíg $qb^{-1}u_1$ és $qb^{-1}v_1$ mennyiségek η rendűek. A (24)-es egyenletekben speciális zavaró függvények szerepelnek, amelyekben a differenciálegyenlet partikuláris megoldása a zavaró függvényhez hasonló szerkezetű lesz. Ezért általános alakban próbálkozunk felírni a zavaró függvényhez hasonló megoldást, majd az egyenletbe helyettesítve azt, a megfelelő együtthatók meghatározásával megkapjuk az inhomogén rész megoldását:

$$u_1 = b^{-1} \left[C_\varepsilon \cos \varphi + \frac{1}{2} (3 - 2 \cos 2\varphi) \right], \quad (25)$$

$$v_1 = b^{-1} \left[C_\eta \cos \varphi + \frac{1}{16} (\cos 3\varphi - 12\varphi \sin \varphi) \right],$$

$$u_2 = b^{-1} \left[C_{\varepsilon^2} \cos \varphi + C_\varepsilon (3 - \cos 2\varphi) + \frac{3}{16} (\cos 3\varphi + 20\varphi \sin \varphi) \right],$$

$$v_2 = b^{-1} \left[C_{\eta^2} \cos \varphi + \frac{3}{16} C_\eta (\cos 3\varphi + 12\varphi \sin \varphi) + \frac{1}{256} (-21 \cos 3\varphi + \cos 5\varphi + 60\varphi \sin \varphi - 36\varphi \sin 3\varphi - 72\varphi^2 \cos \varphi) \right],$$

$$w_2 = b^{-1} \left[C_{\varepsilon\eta} \cos \varphi + C_\eta (3 - \cos 2\varphi) + \frac{3}{16} C_\varepsilon (\cos 3\varphi - 12\varphi \sin \varphi) + \frac{1}{16} (-60 + 31 \cos 2\varphi - \cos 4\varphi + 12\varphi \sin 2\varphi) \right].$$

Az integrációs konstansok: $C_\varepsilon = C_{\varepsilon\eta} = 0, C_\eta = -\frac{9}{16}, C_{\varepsilon^2} = \frac{37}{16}, C_{\eta^2} = \frac{271}{256}$.

Így (24)-es egyenleteket megoldva a következő eredményt kapjuk:

$$\begin{aligned}
bu &= \cos\varphi + \frac{\varepsilon}{2}(3 - \cos 2\varphi) - \frac{\eta}{16}(9\cos\varphi - \cos 3\varphi + 12\varphi\sin\varphi) \\
&+ \frac{\varepsilon^2}{16}(37\cos\varphi + 3\cos 3\varphi + 60\varphi\sin\varphi) + \frac{\eta^2}{256}(271\cos\varphi - 48\cos 3\varphi \\
&+ \cos 5\varphi + 384\varphi\sin\varphi - 36\varphi\sin 3\varphi - 72\varphi^2\cos\varphi) \\
&+ \frac{\varepsilon\eta}{16}(-87 + 40\cos 2\varphi - \cos 4\varphi + 12\varphi\sin 2\varphi). \tag{26}
\end{aligned}$$

Ha a fénysugarak a végtelenből érkeznek, akkor azt mondhatjuk, hogy $u = 0$ ($r \rightarrow \infty$) és a fénysugár eltérése az egyenes vonalú mozgástól nagyon kicsi lesz: $\varphi = \pi/2 + \frac{\delta\varphi}{2}$, ahol $\delta\varphi$ az elhajlítás szöge. Másodrendű közelítésben a következő alakban keressük:

$$\delta\varphi = \varepsilon\alpha_1 + \eta\beta_1 + \varepsilon^2\alpha_2 + \eta^2\beta_2 + \varepsilon\eta\gamma_2 + O(\varepsilon^3; \eta^3; \varepsilon^2\eta; \varepsilon\eta^2). \tag{27}$$

Az nulladrendű tagot Taylor sorba fejtve $\delta\varphi$ -re és a (26)-ös egyenletbe $\varphi = \frac{\pi}{2}$ -t helyettesítve a következő kifejezést kapjuk a fény elhajlására:

$$\delta\varphi = 4\varepsilon - \frac{3\pi}{4}\eta + \frac{15\pi}{4}\varepsilon^2 + \frac{105\pi}{64}\eta^2 - 16\varepsilon\eta \tag{28}$$

3.2 Geodetikus egyenletek

Ebben a fejezetben az [1]-es forrás eredményeit számolom ki egy másik módszerrel.

Ha egy részecske csak a gravitáció hatása alatt áll, akkor geodetikus pályákon fog mozogni. Ezek azok a pályák, amelyek az adott geometrián a leginkább egyenesnek tekinthetők. A geodetikus egyenlet azt fejezi ki, hogy a részecske hogyan mozog a görbült téridőben. A geodetikus egyenlet kovariáns alakja:

$$V^a \nabla_a V^b = 0. \tag{29}$$

Amely a következő alakba írható át:

$$\frac{d^2 X^a}{d\lambda^2} + \Gamma_{bc}^a \frac{dX^b}{d\lambda} \frac{dX^c}{d\lambda} = 0, \tag{30}$$

ahol $a = 0; 1; 2; 3$, λ a görbe paramétere. Γ_{bc}^a -t pedig Christoffel szimbólumnak nevezzük.

$$\Gamma_{bc}^a = \frac{1}{2} g^{ad} (\partial_c g_{db} + \partial_b g_{cd} - \partial_d g_{bc}). \quad (31)$$

A nem nulla Christoffel szimbólumok:

$$\Gamma_{rt}^t = \Gamma_{tr}^t = -\frac{1}{2f} \frac{df}{dr}, \quad (32)$$

$$\Gamma_{tt}^r = -\frac{f}{2} \frac{df}{dr}; \Gamma_{rr}^r = -\frac{f}{2}; \Gamma_{\vartheta\vartheta}^r = -rf; \Gamma_{tt}^r = -rf \sin^2 \vartheta,$$

$$\Gamma_{\vartheta r}^{\vartheta} = \Gamma_{r\vartheta}^{\vartheta} = \frac{1}{r}; \Gamma_{\varphi\varphi}^{\vartheta} = -\sin\vartheta \cos\vartheta,$$

$$\Gamma_{\varphi r}^{\varphi} = \Gamma_{r\varphi}^{\varphi} = \frac{1}{r}; \Gamma_{\varphi\vartheta}^{\varphi} = \Gamma_{\vartheta\varphi}^{\varphi} = \cot\vartheta.$$

A nem nulla Christoffel szimbólumok geodetikus egyenletbe való behelyettesítés után a következő egyenleteket kapjuk, $a=0$ -ra:

$$\frac{d^2 t}{d\lambda^2} + \frac{1}{f} \frac{df}{dr} \frac{dt}{d\lambda} \frac{dr}{d\lambda} = 0. \quad (33)$$

Ez az egyenlet átírható a következő alakba.

$$\frac{d}{d\lambda} \ln \left| \frac{dt}{d\lambda} f \right| = 0, \quad (34)$$

ahol

$$\frac{dt}{d\lambda} f = E. \quad (35)$$

E az energiával áll kapcsolatban és megmarad a pálya mentén.

$a=1$ -re:

$$\frac{d^2 r}{d\lambda^2} + \frac{f}{2} \frac{df}{dr} \left(\frac{dt}{d\lambda} \right)^2 - \frac{1}{2f} \frac{df}{dr} \left(\frac{dr}{d\lambda} \right)^2 - fr \left[\left(\frac{d\vartheta}{d\lambda} \right)^2 + \sin^2 \vartheta \left(\frac{d\varphi}{d\lambda} \right)^2 \right] = 0, \quad (36)$$

a=2-re:

$$\frac{d^2\vartheta}{d\lambda^2} - \cos\vartheta\sin\vartheta \left(\frac{d\varphi}{d\lambda}\right)^2 + \frac{2}{r} \frac{dr}{d\lambda} \frac{d\vartheta}{d\lambda} = 0, \quad (37)$$

a=3-ra:

$$\frac{d^2\varphi}{d\lambda^2} + 2 \left(\cot\vartheta \frac{d\vartheta}{d\lambda} + \frac{1}{r} \frac{dr}{d\lambda} \right) \frac{d\varphi}{d\lambda} = 0. \quad (38)$$

Az utóbbi átírható:

$$\frac{d}{d\lambda} \ln \left| \frac{d\varphi}{d\lambda} r^2 \sin^2\vartheta \right| = 0 \quad (39)$$

alakba, ahol:

$$\frac{d\varphi}{d\lambda} r^2 \sin^2\vartheta = J. \quad (40)$$

J az impulzuszmomentummal áll kapcsolatban és megmaradó mennyiség.

Felhasználva a gömbszimmetriát, a $\vartheta_0 = \frac{\pi}{2}$ és a $\dot{\vartheta}_0 = 0$ kezdeti feltételeket kapjuk, hogy $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ bármely λ esetén. Tehát mindig az egyenlítői síkban történő mozgásokra hivatkozhatunk, ahogy ezt már az előző fejezetben is tettük. A további számolásokat a (36)-os egyenletből kiindulva végezzük el. E és J behelyettesítése után kapjuk, hogy:

$$\frac{d^2r}{d\lambda^2} + \frac{E^2}{2f} \frac{df}{dr} + \frac{1}{2f} \frac{df}{dr} \left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 - \frac{f}{r^3} J^2 = 0. \quad (41)$$

A (41)-es egyenletet szorozva $\frac{2}{f} \frac{dr}{d\lambda}$ -val, a következő alakba írható:

$$\frac{d}{d\lambda} \left[\frac{1}{f} \left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 - \frac{E^2}{f} + \frac{J^2}{r^2} \right] = 0. \quad (42)$$

A kapcsos zárójelben szereplő rész konstans és az a $ds^2 = 0$ miatt nullával egyenlő:

$$\frac{1}{f} \left(\frac{dr}{d\lambda} \right)^2 - \frac{E^2}{f} + \frac{J^2}{r^2} = 0. \quad (43)$$

Áttérve a λ szerinti deriválásról a φ szerinti deriválásra és az $u = \frac{1}{r}$ változóra:

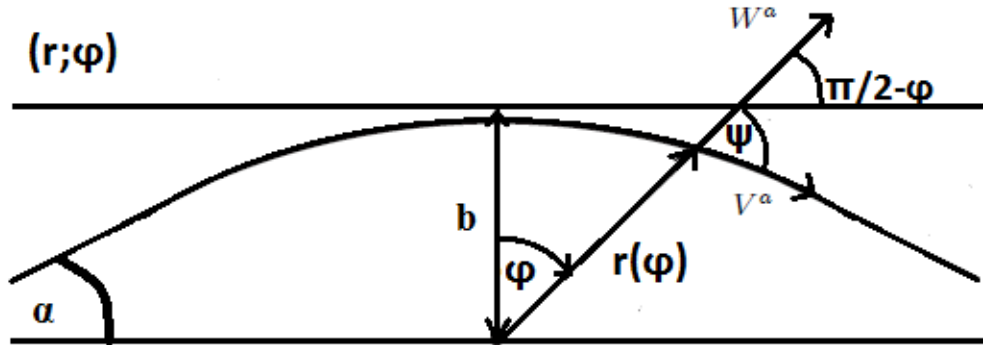
$$u'' + uf + \frac{u^2}{2} \frac{df}{du} = 0. \quad (44)$$

Ez az eredmény megegyezik a Lagrange-függvénnyel kapott (15)-ös egyenlettel.

4. A kozmológiai konstans szerepe a fényelhajlásban

Ezt a fejezetet a [2] forrás felhasználásával dolgoztam fel, Reissner-Nordström de Sitter téridőben. A geodetikus és az Euler-Lagrange egyenletekből származtatott (19)-es pálya egyenletben a Λ nem jelenik meg. Azonban, ahogy látni fogjuk a következő szakaszban, a kozmológiai állandó mégis szerepet játszik a fény elhajlásában.

Az elhajlási szög meghatározásához a fény pályáját paraméterezzük $r(\varphi)$ és $\tilde{\varphi}$ -vel, ahol $\tilde{\varphi}$ egy paraméter a görbe mentén úgy, hogy $\frac{d\tilde{\varphi}}{d\varphi} = 1$. Jelölje W^a a pályához húzott koordináta érintő vektorát, míg, V^a pedig a pályagörbe érintő vektorát. A 2. ábrán lévő Ψ szög meghatározható a radiális és az érintő vektorok skaláris szorzatából:



2. ábra: A fényelhajlás geometriája, a V^a és W^a érintő vektorok és a közbetett Ψ szög

$$\cos \psi = \frac{g_{ab} V^a W^b}{\sqrt{g_{ab} W^a W^b} \sqrt{g_{ab} V^a V^b}}. \quad (45)$$

Itt

$$W^a = \frac{dx^a}{dr}, \quad (46)$$

vagyis $W^r = 1$; $W^\varphi = 0$, és

$$V^a = \frac{dx^a}{d\tilde{\varphi}}, \quad (47)$$

amelyből $V^r = \frac{dr}{d\tilde{\varphi}}$, és $V^\varphi = \frac{d\varphi}{d\tilde{\varphi}} = 1$. Ezért:

$$g_{rr}W^rW^r = \frac{1}{f}; \quad g_{\varphi\varphi}W^\varphi W^\varphi = 0, \quad (48)$$

$$g_{rr}V^rV^r = \frac{1}{f}\left(\frac{dr}{d\tilde{\varphi}}\right)^2; \quad g_{\varphi\varphi}V^\varphi V^\varphi = r^2, \quad (49)$$

$$g_{rr}V^rW^r = \frac{1}{f}\frac{dr}{d\tilde{\varphi}}; \quad g_{\varphi\varphi}V^\varphi W^\varphi = 0. \quad (50)$$

A behelyettesítések elvégzése után a következő eredményt kapjuk:

$$\cos\psi = \frac{\frac{1}{f}\frac{dr}{d\tilde{\varphi}}}{\sqrt{\frac{1}{f}}\sqrt{\frac{1}{f}\left(\frac{dr}{d\tilde{\varphi}}\right)^2 + r^2}} = \frac{\left(\frac{dr}{d\tilde{\varphi}}\right)}{\left[\left(\frac{dr}{d\tilde{\varphi}}\right)^2 + r^2f\right]^{\frac{1}{2}}}, \quad (51)$$

amely átírható

$$\tan\psi = \sqrt{\frac{1 - \cos^2\psi}{\cos^2\psi}} = \frac{rf^{\frac{1}{2}}}{\frac{dr}{d\tilde{\varphi}}} \quad (52)$$

alakba.

Számoljuk ki az elhajlási szöget. $2\psi_0 = 2\psi|_{\varphi=\frac{\pi}{2}}$. A kettes szorzó a pálya szimmetriája miatt jelenik meg.

$$\tan \psi_0|_{\varphi=\frac{\pi}{2}} \approx \psi_0|_{\varphi=\frac{\pi}{2}} = \frac{rf(r)^{\frac{1}{2}}}{\frac{dr}{d\tilde{\varphi}}}|_{\varphi=\frac{\pi}{2}}. \quad (53)$$

A (26)-os egyenlet felhasználásával kapjuk, hogy:

$$\frac{b}{r}|_{\varphi=\pi/2} = bu|_{\varphi=\pi/2} = 2\varepsilon - \frac{3\pi}{8}\eta + \frac{15\pi}{8}\varepsilon^2 + \frac{105\pi}{128}\eta^2 - 8\varepsilon\eta, \quad (54)$$

$$\frac{dr}{d\varphi}|_{\varphi=\pi/2} = -\frac{r^2}{b} \frac{dbu}{d\tilde{\varphi}}|_{\varphi=\frac{\pi}{2}} = -\frac{r^2}{b} \left[-1 + 2\varepsilon^2 + \frac{9\pi}{128}\eta^2 - \frac{3\pi}{4}\varepsilon\eta \right], \quad (55)$$

$$f(r)|_{\varphi=\frac{\pi}{2}} = \left(1 - 2mu + qu^2 - \frac{\Lambda}{3} \frac{1}{u^2} \right)|_{\varphi=\frac{\pi}{2}}, \quad (56)$$

A behelyettesítéseket elvégezve és az egyszerűsítések után kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \psi_0|_{\varphi=\frac{\pi}{2}} &= bu|_{\varphi=\frac{\pi}{2}} \frac{\left(1 - 2mu + qu^2 - \frac{\Lambda}{3} \frac{1}{u^2} \right)^{\frac{1}{2}}}{\left[1 - 2\varepsilon^2 - \frac{9\pi}{128}\eta^2 + \frac{3\pi}{4}\varepsilon\eta \right]}|_{\varphi=\frac{\pi}{2}} = \\ &= \left(2\varepsilon - \frac{3\pi}{8}\eta + \frac{15\pi}{8}\varepsilon^2 + \frac{105\pi}{128}\eta^2 - 8\varepsilon\eta \right) \frac{\left(1 - 4\varepsilon^2 + \frac{6\pi}{8}\varepsilon\eta - \frac{\Lambda b^2}{3 \left(2\varepsilon - \frac{3\pi}{8}\eta \right)^2} \right)^{\frac{1}{2}}}{\left[1 - 2\varepsilon^2 - \frac{9\pi}{128}\eta^2 + \frac{3\pi}{4}\varepsilon\eta \right]} \quad (57) \end{aligned}$$

Az ε és η kis paraméterek szerinti sorfejtések elvégzése után a következő formulát kapjuk a fényelhajlásra.

$$\psi_0 \approx \left(2\varepsilon - \frac{3\pi}{8}\eta + \frac{15\pi}{8}\varepsilon^2 + \frac{105\pi}{128}\eta^2 - 8\varepsilon\eta \right) \left(1 - \frac{\Lambda b^2}{6 \left(2\varepsilon - \frac{3\pi}{8}\eta \right)^2} \right). \quad (58)$$

A pálya szimmetriája miatt a fénysugár teljes elhalási szöge a $2\psi_0$ – val egyezik meg. A kozmológiai konstans jelenléte miatt az r radiális távolság nem haladhatja meg a kozmológiai

horizont értékét $r_h = \sqrt{3/\Lambda}$. A forrás, az elhajlító objektum és a megfigyelő is a kozmológiai horizonton belül helyezkedik el.

5. Schwarzschild metrika Eddington-Finkelstein koordinátákban

Ez a fejezet a Vaidya téridő tárgyalásához nyújt segítséget és a [3] forrás alapján írtam meg. A Schwarzschild-metrika az Einstein-egyenletek statikus és gömbszimmetrikus megoldása. A Schwarzschild megoldást Karl Schwarzschild tiszteletére nevezzük Schwarzschild metrikának, mert ő volt aki először (1916-ban) talált egzakt megoldást az Einstein által publikált általános relativitáselméletben. A Schwarzschild fekete lyukat az m tömege jellemzi. Metrikája a következő alakú:

$$ds^2 = -f dt^2 + \frac{dr^2}{f} + r^2(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\varphi^2), \quad (59)$$

ahol $f = 1 - \frac{2m}{r}$.

Könnyen belátható, hogy a metrikus tenzor komponensei divergálnak az $r = 0$ és az $r = 2m$ pontokban. Az előbbi egy igazi szingularitás (az R görbületi skalár is divergens), utóbbi azonban egy ún. koordináta szingularitás. Például az Eddington–Finkelstein koordinátákban az $r = 2m$ helyen a metrika nem szinguláris. A koordináta transzformációhoz null (fényszerű) koordináták bevezetése szükséges:

$$\tilde{v} = t + r^*, \tilde{u} = t - r^*, \quad (60)$$

ahol \tilde{v} az avanzsált, \tilde{u} pedig a retardált idő, r^* pedig az ún. teknőc-koordináta:

$$r^* = 2m + 2m \cdot \ln|r - 2m|, \quad (61)$$

így

$$dr^* = \frac{dr}{1 - \frac{2m}{r}} \quad (62)$$

A (60)-as egyenleteket egybe foglalva az $\epsilon = \pm 1$ jelölés bevezetésével ($\epsilon = 1$: avanzsált, $\epsilon = -1$: retardált):

$$t = v - \epsilon \left[r + 2m \cdot \ln \left(\frac{r}{2m} - 1 \right) \right] \quad (63)$$

$$dt = dv - \epsilon \frac{dr}{1 - \frac{2m}{r}} \quad (64)$$

A Schwarzschild ívelemnégyzet a t helyett bevezetett v koordinátában:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2m}{r} \right) dv^2 + \epsilon 2dvdr + r^2 (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2). \quad (65)$$

Ahol $\epsilon = \pm 1$. $\epsilon = -1$ kimenő- és $\epsilon = 1$ bemenő null koordináta estén. Ha $\epsilon = 1$, akkor a $v = konstans$ vonalak befelé tartanak, míg az $\epsilon = -1$ eset pedig a kifelé tartó $v = konstans$ vonalakat írja le. Az $\epsilon = -1$ és $v = const$ esetben, ha a t nő, akkor r is növekedni fog. Tehát a $v = const$ vonalak kimenők, így a v koordináta bemenő. Az $\epsilon = 1$ és $v = const$ esetben pedig, ha t nő, akkor r is csökkenni fog. Tehát $v = const$ vonalak bemenők, így v kimenő null koordináta lesz.

5.1 Fényelhajlás Eddington-Finkelstein koordináta rendszerben

Az elhajlási szög meghatározásához először felírjuk a Lagrange-függvényt:

$$2L = g_{ab} \frac{dx^a}{d\lambda} \frac{dx^b}{d\lambda}, \quad (66)$$

ahol λ egy időszerű paraméter. Most

$$2L = -f(r)\dot{v}^2 + 2\epsilon\dot{v}\dot{r} + r^2(\dot{\vartheta}^2 + \sin^2 \vartheta \dot{\varphi}^2). \quad (67)$$

A következő lépésben felírjuk az Euler-Lagrange egyenleteket az $(v; r; \vartheta; \varphi)$ változokra, ahol $x^0 = v$, $x^1 = r$, $x^2 = \vartheta$ és $x^3 = \varphi$. A Számolások során a $\vartheta = \frac{\pi}{2}$, azaz egyenlítői síkon lévő pályákat vizsgálunk. Ez a gömbszimmetria miatt megtehető az általánosság megsérülése nélkül. Így $x^2 = \vartheta$ -ra az Euler-Lagrange egyenlet azonosan teljesül.

Euler-Lagrange egyenletek:

$$\frac{\partial L}{\partial x^a} - \frac{d}{d\lambda} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^a} = 0, \quad (68)$$

a=0-ra:

$$(-2f\dot{v} + 2\epsilon\dot{r})' = 0, \quad (69)$$

így

$$-f\dot{v} + \epsilon\dot{r} = -E. \quad (70)$$

E az energiával áll kapcsolatban és megmaradó mennyiség. Megmutatható (63)-as felhasználásával, hogy:

$$-f\dot{v} + \epsilon\dot{r} = -E = -f\dot{t}. \quad (71)$$

a=1-re:

$$-\frac{\partial f}{\partial r} \dot{v}^2 + 2r\dot{\varphi}^2 - (2\epsilon\dot{v})' = 0, \quad (72)$$

és a=3-ra:

$$-(2r^2\dot{\varphi})' = 0 \quad (73)$$

A (73)-as egyenlet integrálása után kapjuk, hogy $r^2\dot{\varphi} = J$. J az impulzusmomentummal áll kapcsolatban és megmarad a pálya mentén. ($a = 2$ -re kaptuk volna a ϑ -ra vonatkozó Euler-Lagrange egyenletet).

A (72)-es egyenletből kapjuk, hogy:

$$\ddot{v} + \frac{\epsilon}{2} \frac{\partial f}{\partial r} \dot{v}^2 - \epsilon r \dot{\varphi}^2 = 0. \quad (74)$$

Az E-re kapott (70)-es egyenletből kifejezve $\dot{v} - t$ kapjuk, hogy:

$$\dot{v} = -\frac{E}{f} + \frac{\epsilon\dot{r}}{f}. \quad (75)$$

Ezt λ szerint differenciálva:

$$\ddot{v} = \frac{E}{f^2} \frac{\partial f}{\partial r} \dot{r} - \frac{\partial f}{\partial r} \frac{\epsilon \dot{r}^2}{f} + \frac{\epsilon \ddot{r}}{f}. \quad (76)$$

Ezt behelyettesítve (74)-be:

$$\epsilon \frac{\ddot{r}}{f} - \frac{E}{f^2} \frac{\partial f}{\partial r} \dot{r} + \frac{\epsilon}{2} \frac{\partial f}{\partial r} \left[\frac{E^2}{f^2} + \frac{\dot{r}^2}{f^2} - \frac{2\epsilon E \dot{r}}{f^2} \right] - \epsilon \frac{J^2}{r^3} = 0. \quad (77)$$

A (77)-es egyenletet szorozva \dot{r} -tal kapjuk:

$$\dot{r} \frac{\ddot{r}}{f} - \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial r} \frac{E^2}{f^2} \dot{r} + \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial r} \frac{E^2}{f^2} \dot{r} - \frac{J^2}{r^3} \dot{r} = 0, \quad (78)$$

amely a következő alakba írható:

$$\frac{d}{d\lambda} \left[\dot{r}^2 - E^2 + \frac{J^2}{r^2} f \right] = 0. \quad (79)$$

Felhasználva, hogy $ds^2 = 0$:

$$\dot{r}^2 - E^2 + \frac{J^2}{r^2} f = 0. \quad (80)$$

A kapott egyenlet megegyezik a (12)-es egyenlettel. A fenti egyenlet a radiális egyenlet első integrálja Mivel ebben az alakban nem tudjuk integrálni, ezért áttérünk a φ változó szerinti deriválásra és r helyett az $u = \frac{1}{r}$ változóra, ahogy korábban. A számolások elvégzése után az egyenlet a következőképpen alakul:

$$u'' + u = 3mu^2. \quad (81)$$

Ebből a 3.1-es fejezet alapján az elhajlás alakja a következő lesz:

$$\delta\varphi = 4\varepsilon \quad (82)$$

6. Vaidya metrika

Ezt a fejezetet a [3]-as, [4]-es, [5]-ös és [6]-os forrás alapján írtam meg. Az általános relativitáselméletben a Vaidya metrika leírja a nem üres külső téridőben lévő gömbszimmetrikus és nem forgó csillagot vagy fekete lyukat, amely sugárzást bocsájt ki vagy nyel el. Ezt az indiai fizikusról Prahalad Chunnilal Vaidya-ról nevezték el.

A sugárzást elnyelő vagy kibocsájtó gömbszimmetrikus objektum körüli téridő ívelemnégyzete:

$$ds^2 = -f(r, v)dv^2 + 2\epsilon dvdr + r^2(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\varphi^2), \quad (83)$$

ahol $\epsilon = \pm 1$ ($\epsilon = -1$ kimenő- és $\epsilon = 1$ bemenő Eddington-Finkelstein null koordináta estén), és:

$$f(r; v) = 1 - \frac{2m(v)}{r}. \quad (84)$$

A téridő annyiban különbözik a Schwarzschild téridőtől, hogy itt az m paraméter a v null koordináta függvénye.

A vaidya metrika az Einstein-egyenletek olyan megoldása, ahol az energia-impulzus tenzor alakja a következő:

$$T_{\alpha\beta} = \epsilon \frac{dm(v)}{4\pi r^2} \delta_{\alpha}^v \delta_{\beta}^v \quad (85)$$

A gyenge energia feltétel előírja, hogy minden megfigyelő pozitív energiasűrűséget tapasztaljon, így

$$\frac{dm(v)}{dv} \geq 0, \epsilon = 1, \quad (86)$$

$$\frac{dm(v)}{dv} \leq 0, \epsilon = -1. \quad (87)$$

Az utóbbi esetet egy sugárzó csillagot ír le, ami a mi tanulmányunk témáját képezi.

A következőkben feltesszük:

$$m(v) = M - \mu v, \quad (88)$$

ahol

$$\frac{dm}{dv} = -\mu < 0. \quad (89)$$

Ami sugárzó csillagnak felel meg.

6.1 Fényelhajlás Vaidya téridőben

A Vaidya téridőben mozgó fény Lagrange-függvénye:

$$2L = -f(r; v)\dot{v}^2 + 2\epsilon\dot{v}r + r^2(\dot{\vartheta}^2 + \sin^2\vartheta\dot{\varphi}^2). \quad (90)$$

A gömbszimmetria miatt hagyatkozhatunk egyenlítői pályákra. ($\vartheta = \frac{\pi}{2}$)

A v szerinti variálással kapott egyenlet:

$$-\frac{\partial f}{\partial r}\dot{v}^2 - (-2f\dot{v} + 2\epsilon\dot{r})' = 0, \quad (91)$$

r -szerintivel:

$$-\frac{\partial f}{\partial r}\dot{v}^2 + 2r\dot{\varphi}^2 - (2\epsilon\dot{v})' = 0, \quad (92)$$

φ -szerintivel:

$$-(2r^2\dot{\varphi})' = 0. \quad (93)$$

Utóbbiból:

$$r^2\dot{\varphi} = J = \text{const}. \quad (94)$$

A (91)-be beírva a (94)-es egyenletet:

$$-f\dot{v}^2 + 2\epsilon\dot{v}r + \frac{J^2}{r^2} = 0. \quad (95)$$

A (9)-es egyenletet behelyettesítve a (91)-es és a (92)-es egyenletbe:

$$\ddot{r} - \epsilon f \ddot{v} - \frac{\epsilon}{2} \frac{\partial f}{\partial v} \dot{v}^2 - \epsilon \frac{\partial f}{\partial r} \dot{r} \dot{v} = 0, \quad (96)$$

$$\ddot{v} - \epsilon \frac{J^2}{r^3} + \frac{\epsilon}{2} \frac{\partial f}{\partial r} \dot{v}^2 = 0. \quad (97)$$

A (97)-es egyenletből $\ddot{v} - t$ kifejezve és behelyettesítve (96)-ba kapjuk, hogy:

$$\ddot{r} + \frac{J^2}{2} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{f}{r^2} \right) - \frac{\epsilon}{2} \frac{\partial f}{\partial v} \dot{v}^2 = 0 \quad (98)$$

Behelyettesítve $f = 1 - 2m(v)u - t$ a (97)-es és (98)-as egyenletekben áttérve r helyett az $u = \frac{1}{r}$ változóra:

$$\ddot{v} - \epsilon J^2 u^3 + \epsilon m(v) u^2 \dot{v}^2 = 0, \quad (99)$$

$$\ddot{u} - \frac{2\dot{u}^2}{u^3} + J^2 [3m(v)u^4 - u^3] + \epsilon \frac{dm(v)}{dv} u \dot{v}^2 = 0. \quad (100)$$

A (99)-es és (100)-as egyenletekben áttérve a φ változó szerinti deriválásra:

$$u'' + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial u} (f u^2) - \frac{\epsilon}{2} u^2 \frac{\partial f}{\partial v} (v')^2 = 0, \quad (101)$$

$$v'' + 2 \frac{v' u'}{u} - \frac{\epsilon}{u} - \frac{\epsilon}{2} u^2 \frac{\partial f}{\partial u} (v')^2 = 0. \quad (102)$$

Bevezetve a következő kis paramétereket. Bennük sorfejtünk lineáris rendig.

$$\epsilon = \frac{M_0}{b}, \eta = \frac{\mu(-v_0)}{b}. \quad (103)$$

Először a fenti két egyenlet megoldását keressük 0-ad rendben. A (101) 0-ad rendű megoldása (22)-es egyenlettel egyezik meg. A (102)-es egyenlet:

$$v_0'' + 2 \frac{v_0' u_0'}{u_0} - \frac{\epsilon}{u_0} = 0. \quad (104)$$

Behelyettesítve $u_0 - t$ és $u_0' - t$:

$$v_0'' - 2 \tan \varphi v_0' - \frac{\epsilon b}{\cos \varphi} = 0. \quad (105)$$

Ennek a megoldása

$$v_0(\varphi) = \frac{\epsilon b}{\cos \varphi} + c_1 \tan \varphi + c_2, \quad (106)$$

ahol $c_1 = \frac{E}{J} b^2 = b$ ((13)-as egyenletbe a (22)-es egyenletet a $\varphi = 0$ -ban behelyettesítve: $\frac{E}{J} b =$

1) és $c_2 = 0$. Tehát a megoldás:

$$v(\varphi) = b \left(\frac{\epsilon}{\cos \varphi} + \tan \varphi \right). \quad (107)$$

A $v \left(\varphi = -\frac{\pi}{2} \right) = -\infty$ -tól a $v \left(\varphi = \frac{\pi}{2} \right) = 0$ -ig megy. A fény $v = v_0 < 0$ -nál éri el a csillag sugárzási zónáját. A fény $v = -\infty$ és v_0 között úgy mozog, mintha Schwarzsild téridőben lenne. Majd v_0 és 0 között a mozgásban szerepet játszik a sugárzás, mert a sugárzás egy része a részecske radiális távolságán kívülre kerül. Emiatt a részecske mozgása már nem lehet szimmetrikus, ahogy a Schwarzsild téridő szimmetrikus volt a $\varphi = 0$ -ra, Az $m(v)$ függvényben szereplő M paraméter jelenti azt a sugárzás által képviselt tömeget, ami a vizsgált fénysugár pályáján belül van $v = 0 \left(\varphi = \frac{\pi}{2} \right)$ -kor.

A számolásoknál a következő jelöléseket :

$$\tilde{v} = \frac{v}{-v_0}, \quad \tilde{u} = bu, \quad (108)$$

felhasználva (101) és (102)-ből:

$$\tilde{u}'' + \tilde{u}(1 - 3m(\tilde{v})\tilde{u}) - \epsilon \tilde{u}^3 \frac{dm(\tilde{v})}{d\tilde{v}} (\tilde{v}')^2 = 0, \quad (109)$$

$$\tilde{v}'' + 2 \frac{\tilde{v}' \tilde{u}'}{\tilde{u}} - \frac{\epsilon}{\tilde{u}} - \frac{\epsilon}{2} \tilde{u}^2 m(\tilde{v}) (\tilde{v}')^2 = 0, \quad (110)$$

ahol

$$m(\tilde{v}) = M - \mu \tilde{v} = M_0 - \frac{\mu(-v_0)}{b} (1 + \tilde{v}), \quad (111)$$

és

$$\frac{m(\tilde{v})}{b} = \frac{M_0}{b} - \frac{\mu(-v_0)}{b} (1 + \tilde{v}). \quad (112)$$

Az ϵ és η bevezetett kis paraméterekkel:

$$\frac{m(\tilde{v})}{b} = \epsilon - \eta(1 + \tilde{v})\Theta(1 + \tilde{v}). \quad (113)$$

A $\tilde{v} = -1$ -nél érzékeli csak a részecske a sugárzás hatását, amit a $\Theta(1 + \tilde{v})$ fejez ki.

A (113)-as egyenletet behelyettesítve a (109)-es és (110)-es:egyenletekbe:

$$\begin{aligned} \tilde{u}'' + \tilde{u}(1 - 3[\epsilon - \eta(1 + \tilde{v})]\tilde{u}) - \epsilon\eta\tilde{u}^3 \frac{v_0}{b} (\tilde{v}')^2 \Theta(1 + \tilde{v}) \\ + \epsilon\eta(1 + \tilde{v})\delta(1 + \tilde{v})\tilde{u}^3 \frac{v_0^2}{b} (\tilde{v}')^2 = 0. \end{aligned} \quad (114)$$

Ahol $x\delta(x) = 0$ egyenlőségből következik, hogy:

$$\epsilon\eta(1 + \tilde{v})\delta(1 + \tilde{v})\tilde{u}^3 \frac{v_0^2}{b} (\tilde{v}')^2 = 0, \quad (115)$$

$$\tilde{v}'' + 2 \frac{\tilde{v}' \tilde{u}'}{\tilde{u}} - \frac{\epsilon}{\tilde{u}} - \frac{\epsilon}{2} \tilde{u}^2 m(\tilde{v}) (\tilde{v}')^2 = 0. \quad (116)$$

A (114)-es egyenlet perturbatív megoldását keressük a következő alakban, ϵ és η kis paraméter felhasználásával:

$$\tilde{u} = \tilde{u}_0 + \epsilon \tilde{u}_{Sch} + \eta \tilde{u}_V. \quad (117)$$

Hasonló alakot teszünk fel a $\tilde{v} = \tilde{v}_0 + \varepsilon \tilde{v}_{Sch} + \eta \tilde{v}_V$. \tilde{v} -nek ezt az alakját feltéve, láthatjuk, hogy (114)-nek ε és η -ban lineáris rendig történő megoldásához \tilde{v} -re csak a nulladrendű $\tilde{v}_0(\varphi)$ ismeret szükséges. Ezt beírva a (114)-es egyenletbe.

$$0: \tilde{u}_0'' + \tilde{u}_0 = 0, \quad (118)$$

$$\varepsilon: \tilde{u}_{Sch}'' + \tilde{u}_{Sch} = 3\tilde{u}_0^2,$$

$$\eta: \tilde{u}_V'' + \tilde{u}_V = -3(1 + \tilde{v}_M)\tilde{u}_0^2 \Theta(1 + \tilde{v}) - \varepsilon \left(-\frac{v_0}{b}\right) \tilde{u}_0^3 (\tilde{v}'_M)^2 \Theta(1 + \tilde{v}).$$

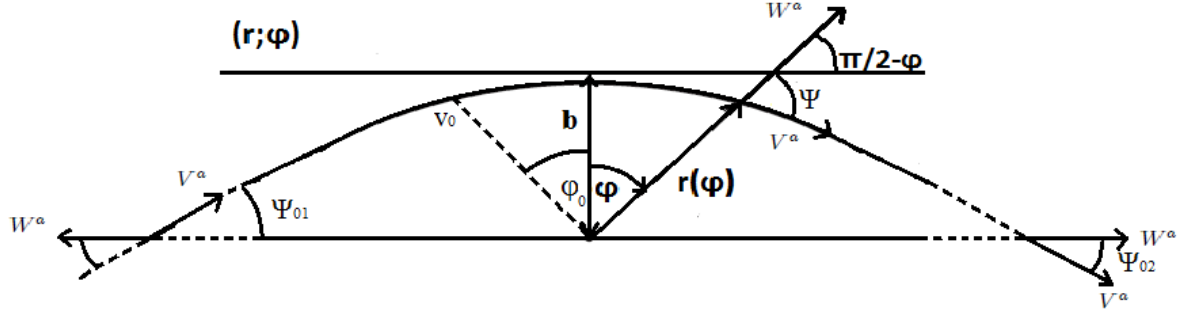
Ennek a megoldása a következő:

$$\begin{aligned} bu = \cos\varphi + \frac{\varepsilon}{2}(3 - \cos 2\varphi) \\ + \eta \left\{ C_1(\varphi_0)\cos\varphi + C_2(\varphi_0)\sin\varphi \right. \\ \left. - 3\cos^2\varphi + \left(\frac{b}{-v_0}\right) \left[\cos\varphi(4 - 3\sin\varphi) - 2\left(\frac{b}{-v_0}\right) \frac{1 - \sin\varphi}{\cos\varphi} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (119)$$

Itt a $C_1(\varphi_0)$ és $C_2(\varphi_0)$ konstansokban szereplő φ_0 jelöli azt a szöveget, amikor a fénysugár találkozik a csillag sugárzási zónájával. Amiatt, hogy $m(v)$ függvény folytonosan differenciálható v_0 -án keresztül, u_V és u_V' -nek is folytonosnak kell lennie φ_0 -n keresztül. Ezekből a feltételekből $C_1(\varphi_0)$ és $C_2(\varphi_0)$ meghatározható.

$$\begin{aligned} C_1(\varphi_0) = \frac{\cos\varphi_0 \sin\varphi_0 - 4\cos\varphi_0}{1 - \sin\varphi_0} + 2 \frac{(2\sin^2\varphi_0 + \sin\varphi_0 - 1)}{\cos\varphi_0} \\ - 3\cos^2\varphi_0 \sin\varphi_0 + 3\cos\varphi_0 + 6\cos\varphi_0 \sin^2\varphi_0, \end{aligned} \quad (120)$$

$$\begin{aligned} C_2(\varphi_0) = 2\sin^2\varphi_0 - 4\sin\varphi_0 - \cos^2\varphi_0(1 + 6\sin\varphi_0) \\ = \frac{1}{2} [1 - 11\sin\varphi_0 - 3\cos 2\varphi_0 - 3\sin 3\varphi_0]. \end{aligned} \quad (121)$$



3.ábra: A fényelhajlás geometriája, a Ψ_{01} és a Ψ_{02} szög

A fény elhajlásának a szögét a 4. fejezetben alkalmazott módszerrel határozom meg. Ebben az esetben a fény elhajlás két részből tevődik össze. A fény pályája nem szimmetrikus. A pálya első részén Schwarzschild téridőben halad és csak később éri el a sugárzást tartalmazó Vaidya régiót. ψ_0 a következő alakú

$$\psi_0 = \psi_{01} + \psi_{02}, \quad (122)$$

ahol ψ_{01} és ψ_{02} a 3. ábrán látható. A ψ_{01} résznél csak a Schwarzschild megoldást használjuk fel ε -ban lineáris rendig. A 4. fejezetben alkalmazott (53)-as képletet használva:

$$\psi_{01}|_{\varphi=-\frac{\pi}{2}} = \frac{-rf(r)^{\frac{1}{2}}}{\frac{dr}{d\tilde{\varphi}}}|_{\varphi=-\frac{\pi}{2}} = \frac{(1-2mu)^{\frac{1}{2}}u}{\frac{du}{d\tilde{\varphi}}}|_{\varphi=-\frac{\pi}{2}} = 2\varepsilon \quad (123)$$

A ψ_{02} résznél is hasonlóan járunk el, itt a Vaidya megoldást használjuk fel.

$$\begin{aligned} \psi_{02} &= \frac{rf(r)^{\frac{1}{2}}}{\frac{dr}{d\tilde{\varphi}}}|_{\varphi=\frac{\pi}{2}} = -\frac{\tilde{u}_0 + \varepsilon\tilde{u}_{Sch} + \eta\tilde{u}_V}{\tilde{u}_0' + \varepsilon\tilde{u}'_{Sch} + \eta\tilde{u}'_V}(1-2mu)^{\frac{1}{2}}|_{\varphi=\frac{\pi}{2}} \\ &= -\frac{\tilde{u}^0 + \varepsilon\tilde{u}_{Sch} + \eta\tilde{u}_V}{\tilde{u}_0' + \varepsilon\tilde{u}'_{Sch} + \eta\tilde{u}'_V} [1 - 2(\varepsilon - \eta(1 + \tilde{v})\Theta(1 + \tilde{v}))\tilde{u}]^{\frac{1}{2}}|_{\varphi=\frac{\pi}{2}} \\ &= -\frac{\tilde{u}^0 + \varepsilon\tilde{u}_{Sch} + \eta\tilde{u}_V}{\tilde{u}_0' + \varepsilon\tilde{u}'_{Sch} + \eta\tilde{u}'_V} [1 - (\varepsilon - \eta)(\tilde{u}^0 + \varepsilon\tilde{u}_{Sch} + \eta\tilde{u}_V)]|_{\varphi=\frac{\pi}{2}} \\ &= (\varepsilon\tilde{u}_{Sch} + \eta\tilde{u}_V)|_{\varphi=\pi/2} = 2\varepsilon + \eta C_2(\varphi_0) \end{aligned} \quad (124)$$

Tehát Vaidya téridőben a fény elhajlási szöge a következő alakú lesz.

$$\psi_0 = \psi_{01} + \psi_{02} = 4\varepsilon + \frac{\eta}{2} [1 - 11 \sin \varphi_0 - 3 \cos 2\varphi_0 - 3 \sin 3\varphi_0]. \quad (125)$$

A szerző ismerete szerint a (124)-ben szereplő $\eta C_2(\varphi_0)$ tag új eredmény.

7. Összefoglalás

Dolgozatomban 3. fejezetében a fényelhajlással foglalkoztam Reissner-Nordström téridőben. A fényelhajlás szögét többféle módszerrel is meghatároztam. Az 3.1-es fejezetben árapálytöltésű brán fekete lyukas (speciális Reissner-Nordström) metrikára felírtam a Lagrange függvényt. Utána Euler-Lagrange egyenletekből kaptam meg a megfelelő egyenleteket. A számítások során felhasználtam, hogy a ϑ szög konstans és φ és t ciklikus változó. A kapott egyenletet megoldva, megkaptam a fény elhajlási szögét Reissner-Nordström téridőben. Az ε és η kis paraméterekkel számoltam. A 3.2-es fejezetben a geodetikus egyenletből indultam ki. A Christoffel szimbólumok meghatározása után felírtam az egyenleteket az $(t; r; \vartheta; \varphi)$ változókra. Az r változóra kapott egyenletből határoztam meg a fényelhajlást. A kapott eredmény megegyezett az első módszerrel kapott eredménnyel.

A 4. fejezetben a Reissner-Nordström de Sitter téridőnél a kozmológiai állandó is megjelenik. Itt a fény pályáját paraméterezzük $r(\varphi)$ és φ -vel. W^a a pálya radiális, V^a pedig a pálya érintő vektora. Az elhajlási szöget a radiális és az érintő vektorok skaláris szorzatából határoztam meg. Számolásaimmal reprodukáltam az irodalomban fellelhető kozmológiai konstans fényelhajláshoz történő járulékát.

Az 5. és 5.1 fejezetekben a Schwarzschild metrikát írtam át Eddington-Finkelstein koordinátákba, majd az átírt metrikára, az Euler-Lagrange egyenletek felhasználásával meghatároztam a fény elhajlási szögét. A számolásokat első rendig végeztem el.

A 6. és 6.1. fejezetekben az 5. és 5.1 fejezetekben kapott eredményeket határoztam meg Vaidya metrikába a 4. fejezet felhasználásával. A szerző ismerete szerint a (124)-ben szereplő $\eta C_2(\varphi_0)$ tag új eredmény.

8. Köszönetnyilvánítás

Szeretnék köszönetet mondani témavezetőmnek, Dr. Keresztes Zoltánnak a hasznos tanácsokért, valamint instrukciókért.

9. Források

- [1] Gergely L Á, Keresztes Z and Marek D Class. Quantum Grav. **26** 145002 (2009)
- [2] Rindler W and Ishak M PHYSICAL REVIEW D **76**, 043006 (2007)
- [3] Hobson M., Efstathiou G., Lasenby A.: *General Relativity: An Introduction for Physicists* (2006)
- [4] Wang A and Wu Y, Gen. Relativ. Grav. **31**, 107 (1999)
- [5] Gergely L Á, phys. Rev. D **68**, 124011 (2003)
- [6] Matthias B.: *Lecture Notes on General Relativity* (2015),
[<http://www.blau.itp.unibe.ch/Lecturenotes.html>]

10. Nyilatkozat

Alulírott Deák Bence Fizika BSc szakos hallgató (ETR azonosító: DEBVAAT.SZE) a Gravitációs fényelhajlás gömbszimmetrikus téridőkben című szakdolgozat szerzője fegyelmi felelősségem tudatában kijelentem, hogy dolgozatom önálló munkám eredménye, saját szellemi termékem, abban a hivatkozások és idézések általános szabályait következetesen alkalmaztam, mások által írt részeket a megfelelő idézés nélkül nem használtam fel.

Szeged, 2016. év május hó 12. nap

Deák Bence