

Szegedi Tudományegyetem

Természettudományi és Informatikai Kar

Kísérleti Fizikai Tanszék

Diplomamunka

Eikonál-módszer az árapály-töltésű fekete lyukak
gravitációs lencsézésében

Dwornik Marek

Témavezető: Dr. Gergely Árpád László

Konzulens: Keresztes Zoltán

2009

Tartalmi összefoglaló

A feltevés, miszerint az összes klasszikus anyagi mező, így a fotonok is csak egy 3+1 dimenziós hiperfelületen, (a bránon) terjedhetnek míg a gravitáció ennél magasabb térdimenzióban is hathat, olyan régóta meg nem válaszolt kérdésekre jelenthet megoldást, mint például a hierarchia probléma. A legegyszerűbb brán-modell 5 dimenziós. A gravitáció leírására az általunk érzékelhető 3+1 dimenziós világban a módosított Einstein egyenlet alkalmas. Az általános relativitáselméletben egy gömbszimmetrikus kompakt objektum külső téridejét vákuum esetén a Schwarzschild metrika írja le, egy ötdimenziós brán világban azonban az 5 dimenziós Weyl-görbület hatása miatt korrekciókat kell alkalmazni.

A brán-modellben egy statikus és gömbszimmetrikus objektum külső téridejét (vákuum esetén) Dadhich, Germani és Maartens vizsgálták. Az általuk kapott megoldás formailag a jól ismert Reissner-Nordström megoldáshoz hasonlít. Az eredeti Reissner-Nordström megoldásban az elektromos töltés négyzete, náluk viszont az árapálytöltés (q) első hatványa szerepel, s így az általuk használt metrikában az árapálytöltés mindig pozitív, habár a brán-modellben q előjele nem korlátozott. Tehát a bránon lévő fekete lyukat egy árapálytöltéssel rendelkező fekete lyukként írjuk le. Egy ilyen kompakt objektum két paraméterrel rendelkezik; az m tömegével és a q „töltésével”. Ha q pozitív, a megoldás teljesen megegyezik a Reissner-Nordström megoldással. Abban az esetben, ha $q < m^2$ a fekete lyuknak két horizontja lesz, s mindkettő a Schwarzschild sugáron belül helyezkedik el. A $q = m^2$ -nél a két horizont egybeesik, míg $q > m^2$ esetén a metrika csupasz szingularitást ír le. A fenti esetekben a gravitációs lencsézés csökken a q -val.

A szakirodalomban már ismeretes a q paraméter Schwarzschild elhajláshoz viszonyított elsőrendű korrekciója. Dolgozatom célkitűzéseimhez hozzátartozott, hogy a másodrendű Schwarzschild korrekciót, valamint az első és másodrendű árapály járulékokat, illetve a vegyes járulékokat is meghatározzuk eikonál-módszer segítségével. Mivel az árapály járulék a fényelhajlásban kimutatható szerepet játszik, ezért a Nap esetén mért fényelhajlásból -felhasználva a q járulékatkényszereket róhatunk ki a brán-elméleti paraméterek (q és λ) értékeire. A kutatás jövőbeni irányát kijelölve, az utolsó fejezetben a módszert kiterjesztjük galaxis méretű lencsézésre is. A dolgozat fő célja a létező eredmények egységesítése, illetve a brán feszültségre (λ) számolt korlátok korrekciója.

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés	4
2. A Hamilton-Jacobi módszer	5
2.1. Az eikonál-egyenlet származtatása	8
2.2. Schwarzschild-elhajlás elsőrendig eikonál-módszerrel	11
3. A Reissner-Nordström megoldás	13
4. Brán-világok	15
4.1. Az ötdimenziós modell	16
5. Extra dimenzió hatása a fényelhajlásra	18
5.1. A DMPR megoldás	18
5.2. Illesztési feltételek	21
6. Fényelhajlás brán-világokban	24
6.1. Fényelhajlás másodrendig Hamilton-Jacobi módszerrel	25
6.2. Perturbatív megoldás	27
7. Naprendszerbeli megfigyelésekből kiróható kényszerek	29
8. Galaxisok által okozott gravitációs fényelhajlás	31
8.1. Illesztési feltételek $r = R$ hiperfelület mentén	32
9. Összefoglalás	34
10. Köszönetnyilvánítás	35
11. Appendix	35
12. Függelék	39
13. Nyilatkozat	42

1. Bevezetés

A következő évtizedekben szolgálatba álló űreszközök jóvoltából az asztrometriai, parallaxis- és sajátmozgásbéli mérések elérhetik a milli-ívmásodperces pontosságot. A detektálási technikák ilyen mértékű fejlődése szükségessé teszi a gravitációs fényelhajlásban jelentkező igen kicsi relativisztikus effektusok figyelembevételét is. A fényelhajlás relativisztikus korrekcióinak ismeretére különösen nagy szükség van, ha a lencséző objektum kompakt és nagy tömegű (például fekete lyuk), hiszen itt az effektusok felerősödnek.

A gravitációs fényelhajlás (és lencsehatás) vizsgálatának fontossága abban áll, hogy segítségével az elektromágneses spektrumban nem sugárzó objektumok detektálása is lehetséges, gravitációs hatásuk alapján. Ez főképp a kozmológiai modellek vitatott részét képező, a mai ismereteink szerint a Világegyetem kritikus tömegének 26%-át adó sötét anyag [1] feltérképezésénél játszhat fontos szerepet.

Ismeretes, hogy ha a lencséző objektum egy gömbszimmetrikus fekete lyuk, akkor a gravitációs lencsézés során az elsődleges és másodlagos képeken kívül a lencsézett objektum képeinek két, elhalványuló sorozata is megjelenik a fekete lyuk körül, a gravitációs sugár távolságában. Ha az elhajlást okozó objektum lencséző hatása nem elég ahhoz, hogy többszörös képet készítsen, ún. gyenge gravitációs lencsézésről beszélünk [2]. Az ún. erős gravitációs lencsézés [3] képes megmagyarázni az elsődleges és a másodlagos képek keletkezését is, ám itt figyelembe kell venni a horizont környékén jelentkező effektusokat. Amikor a keletkezett képek halványak és a szeparációjuk is kicsi, akkor szükség van a gyenge lencsézés által létrehozott képek keletkezési folyamatának magasabbrendű közelítésére.

A dolgozatom egyik fő célja a fényelhajlás magasabbrendű korrekcióinak tanulmányozása eikonál-módszer segítségével abban az esetben, amikor a lencséző objektum egy a bránon lévő árapály-töltésű fekete lyuk. A brán-elmélettel röviden, egy külön fejezetben foglalkozunk majd. Mint később látni fogjuk, egy ilyen árapály-töltésű fekete lyuk megoldása formailag a már jól ismert Einstein-Maxwell egyenletek gömbszimmetrikus sztatikus megoldására, a Reissner-Nordström (RN) megoldáshoz hasonlít a különbséggel, hogy a RN metrikában szereplő elektromos töltés négyzetének szerepét az árapály-töltés veszi át [4][5]. A Reissner-Nordström megoldásban az elektromos töltés (mivel négyzetesen jelenik meg) pozitív, viszont az árapály-töltés (q) előjelét semmi sem korlátozza. Egy ilyen fekete lyuk két paraméterrel rendelkezik; az m tömegével és a q „töltésével”. Ha q pozitív, a megoldás

teljesen megegyezik a Reissner-Nordström megoldással. Abban az esetben, ha $q < m^2$ a fekete lyuknak két horizontja lesz, s mindkettő a Schwarzschild sugáron belül helyezkedik el. A $q = m^2$ -nél a két horizont egybeesik, míg $q > m^2$ esetén a metrika csupasz szingularitást ír le.

A dolgozat másik célja, hogy Naprendszerbeli megfigyelésekből kényszereket szabjunk meg a q árapály-töltésre, valamint a λ brán-feszültségre és megadjuk ezek maximális értékét a Nap esetén. Az utolsó fejezetben a módszert kiterjesztjük arra az esetre is, mikor a lencséző objektum egy galaktikus méretű sötét anyag haló.

2. A Hamilton-Jacobi módszer

A kanonikus egyenletek fontos szerepet játszanak számos fizikai probléma vizsgálatánál. Ebben a fejezetben igyekszem összefoglalni az ilyen típusú egyenletek megoldására vonatkozó Hamilton-Jacobi módszer lényegét, mely az én számolásaim alapját is képezte.

Egy fizikai rendszer mozgásegyenleteit többféle, egymással ekvivalens alakban is megadhatjuk, melyek között koordinátatranszformációk teremtenek kapcsolatot. Ezek közül egy lehetséges felírás mód a Lagrange-függvény bevezetésén alapul [7]. Egy f szabadsági fokú rendszer Lagrange-függvénye:

$$L(q, \dot{q}, t) = T(\dot{q}) - V(q, t), \quad (1)$$

ahol T a kinetikus, V a potenciális energia, $q(q_1, q_2, \dots, q_f)$ pedig az általános koordináták. Az így kapott mozgásegyenletek másodrendű közönséges differenciálegyenletek lesznek és számuk a rendszer szabadsági fokainak számával egyezik meg. Megjegyzendő, hogy az általános koordináták egymástól független mennyiségek.

A Hamilton-Jacobi módszer bemutatásához be kell vezetnünk a legkisebb hatás elvének fogalmát. Eszerint két tetszőleges t_1 és t_2 időponthoz tartozó q^1 és q^2 helyzete között a rendszer úgy mozog, hogy az

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt \quad (2)$$

integrál (ami nem más, mint a hatásfüggvény) szélső értéket vesz fel. Ez akkor teljesülhet, ha az integrál variációja nulla, azaz

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt = 0. \quad (3)$$

Következő lépésként vezessük be az általános impulzusokat, vagyis minden q_i koordinátához rendeljük hozzá a:

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \quad (4)$$

mennyiséget, ahol $i = 1, 2, \dots, f$. A p_i -t egyébként a q_i -hez kanonikusan konjugált impulzusnak nevezik. p_i általában nem impulzus dimenziójú mennyiség, az elnevezés onnan ered, hogy derékszögű koordináták és konzervatív rendszer esetén a p_i -k megegyeznek a közönséges impulzusokkal. Az így definiált p_i -ket és q_i -ket együtt független változóknak tekintjük. Ezek után a rendszer fizikai állapotát a H Hamilton-függvénnyel jellemezzük:

$$H = \sum_i p_i \dot{q}_i - L, \quad (5)$$

és $H = H(p, q, \dot{q}, t)$. De mivel $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$, a \dot{q}_i -k kifejezhetők p_i -kel, így $H = H(p, q, t)$ adódik. A H teljes differenciáljára felírható, hogy

$$dH = \sum_i \left(\frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i + \frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i \right) + \frac{\partial H}{\partial t} dt, \quad (6)$$

ezért a következő összefüggések teljesülnek:

$$\begin{aligned} \dot{q}_i &= \frac{\partial H}{\partial p_i}, \\ \dot{p}_i &= -\frac{\partial H}{\partial q_i}. \end{aligned} \quad (7)$$

A fenti két egyenletet másnéven Hamilton-féle kanonikus egyenleteknek is nevezik. Ebben a tárgyalásmódban ezek lesznek a rendszer mozgásegyenletei. Összehasonlítva a Lagrange-egyenleteket használó módszerrel, látható, hogy míg egyikben a Lagrange-függvény, a másikban a Hamilton-függvény írja le a rendszert. A legfőbb különbség a kétféle leírásmód között az, hogy a Lagrange-féle tárgyalásmódban az egyenletek másodrendű differenciálegyenletek, a Hamilton-félében csak elsőrendűek, de számuk kétszer annyi. A fenti levezetésből az is látszik, hogy a kanonikus egyenleteken alapuló tárgyalásnál is

a Lagrange-függvényből indultunk ki, hiszen ezzel értelmeztük az általános impulzusokat és a Hamilton-függvényt. Az ok, amiért mégis bevezettük a kanonikus egyenleteket az az, hogy mivel a kapott mozgásegyenletek csak elsőrendűek, ezért általában könnyebben megoldhatók.

Ha a Hamilton-függvény az időtől explicit módon függ, új változók beveze-

tésével áttérhetünk olyan rendszerre, melynek H' Hamilton-függvénye explicite már nem függ az időtől. Az is megmutatható, hogy az efféle áttéréssel a rendszer szabadsági fokainak száma eggyel nő.

A változók transzformálása gyakran megkönnyíti az egyenletek megoldását, kanonikus egyenletek esetén pedig ez egy különösen hatékony módszer. A transzformáció lényege, hogy a $p = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ és $q = (q_1, q_2, \dots, q_n)$ helyett olyan új $P = (P_1, P_2, \dots, P_n)$ és $Q = (Q_1, Q_2, \dots, Q_n)$ változókat vezetünk be, melyek segítségével az egyenletünk könnyebben integrálható. Azt, hogy ezeket az új változókat a régi változókból hogyan kapjuk meg, a kanonikus transzformációk írják le általánosan, persze csak akkor, ha P -re és Q -ra is egyaránt kanonikus egyenletek lesznek érvényesek. A kanonikus transzformáció alakja:

$$\begin{aligned} P_i &= P_i(p, q, t), \\ Q_i &= Q_i(p, q, t). \end{aligned} \quad (8)$$

Ahhoz tehát, hogy az új P és Q változókra is a kanonikus egyenletek teljesüljenek, az a feltétele, hogy az új változókkal:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left[\sum P_i \dot{Q}_i - H'(P, Q, t) \right] dt = 0 \quad (9)$$

teljesüljön, ahol $H'(P, Q, t)$ a transzformált Hamilton-függvény. Belátható továbbá az is, hogy ahhoz, hogy egy transzformáció kanonikus legyen, szükséges és elégséges feltétel, hogy:

$$\sum_i p_i \dot{q}_i - H = \sum_i P_i \dot{Q}_i - H' + \frac{dF}{dt}. \quad (10)$$

Itt F a koordináták, impulzusok és az idő tetszőleges függvénye, másnéven a transzformáció alkotófüggvénye. Mivel F függvény szabadon választható, ezért többféle kanonikus transzformáció definiálható. Ezért van az, hogy kanonikus transzformáció származtatható vegyes változójú alkotófüggvényekből

is, például: $F(q, P, t)$ vagy $F(p, P, t)$. Az alkotófüggvény szabadon választhatóságának köszönhetően, kanonikus transzformációk alkalmazásával (7) megoldását a következőképpen kereshetjük. Válasszunk olyan új Q_i , P_i változókat, melyekre a

$$\begin{aligned}\dot{Q}_i &= \frac{\partial H'}{\partial P_i} \\ \dot{P}_i &= -\frac{\partial H'}{\partial Q_i}\end{aligned}\tag{11}$$

kanonikus egyenletek könnyen integrálhatók! Legcélszerűbb az volna, ha $H' = 0$ lenne, mert akkor a $\dot{Q}_i = 0$ és $\dot{P}_i = 0$ egyenletek azonnal integrálhatók. A kérdés tehát; melyik az a kanonikus transzformáció, mellyel $H' = 0$?

Ennek a transzformációnak az alkotófüggvénye legyen $S(q, Q, t)$. Az ebből származtatható kanonikus transzformáció:

$$\begin{aligned}p_i &= \frac{\partial S(q, Q, t)}{\partial q_i}, \\ P_i &= -\frac{\partial S(q, Q, t)}{\partial Q_i}.\end{aligned}\tag{12}$$

Ahhoz, hogy $H' = 0$ legyen, S -et úgy kell megválasztani, hogy

$$H(p, q, t) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0\tag{13}$$

teljesüljön. (12) alapján a H -ban lévő p_i változók $\frac{\partial S}{\partial q_i}$ -vel kifejezhetők, s így a

$$H\left(\frac{\partial S}{\partial q}, q, t\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0\tag{14}$$

egyenlet adódik [7], melyet másnéven Hamilton-Jacobi-féle parciális differenciálegyenletnek neveznek.

2.1. Az eikonál-egyenlet származtatása

Ebben a fejezetben egy szabad részecske mozgását vizsgáljuk, melyet gravitációs erőterben a legkisebb hatás elve determinál [8]:

$$\delta S = -mc\delta \int ds = 0, \quad (15)$$

mivel a gravitációs mező hatása csak a téridő metrikájának megváltozásában nyilvánul meg. A részecske tehát úgy mozog, hogy világvonala két adott világpont között szélső értéket vesz fel, azaz a világpontja által leírt görbe geodetikus lesz. Mivel azonban a gravitációs erőtér jelenléte miatt a téridő többé már nem sík, ezért a részecske mozgása sem lesz egyenes vonalú. (15)-ből csak térszerű vagy időszerű görbék esetén kapunk egyenletet, hiszen null görbék esetén nincs legkisebb hosszúságú görbe.

Az euklidészi geometriában az egyenest, két pont közötti legrövidebb távolságként definiálják. Egy másik, ezzel ekvivalens állítás szerint, az egyenes pontjaiban az érintővektorok mind párhuzamosak. Ez előbbi, mint azt korábban láttuk csak térszerű vagy időszerű görbékre általánosítható, míg az utóbbi fényszerűekre is. Az $x^i = x^i(s)$ görbe akkor geodetikus, ha két infinitezimálisan közeli P és \bar{P} pontjában, melyek az s és az $\bar{s} = s + ds$ paraméterekhez tartoznak, a $V^i = \frac{dx^i}{ds}$ érintővektorok párhuzamosak egymással:

$$\mathbf{V}(\bar{\lambda}) = a(s, ds)\bar{\mathbf{V}}(s). \quad (16)$$

Ekkor az $a(s, ds)$ arányossági tényező csak infinitezimális mértékben különbözik 1-től, s így $a(s, ds) = 1 + b(s)ds$. Ezt visszaírva (16)-ba és a ds -ben másodrendű tagokat elhagyva, a következő egyenletet kapjuk:

$$\mathbf{V}(s+ds) = \bar{\mathbf{V}}(s) + b(s)\mathbf{V}(s)ds, \quad (17)$$

mely a

$$\frac{D\mathbf{V}(s)}{ds} = b(s)\mathbf{V}(s), \quad (18)$$

vagy a

$$\frac{dV^i}{ds} + \Gamma_{kl}^i V^l V^k = bV^i \quad (19)$$

alakban is írható. Ha $a(s, ds) = 1$ (s így $b(s) = 0$), akkor az $x^i(s)$ -re vonatkozó egyenlet:

$$\frac{d^2 x^i}{ds^2} + \Gamma_{kl}^i \frac{dx^k}{ds} \frac{dx^l}{ds} = 0 \quad (20)$$

alakú lesz, melyet geodetikus egyenletnek is neveznek. Ebben az esetben a különböző pontokban az érintővektorok nem csak párhuzamosak, de egyenlőek

is lesznek. Ez viszont az $x^i = x^i(s)$ paraméterére jelent kikötést: a görbe paraméterezését úgy kell megválasztani, hogy a görbe mentén az érintővektor hossza legyen állandó, azaz:

$$\mathbf{V}^2 = g_{kl} \frac{dx^k}{ds} \frac{dx^l}{ds} = 0. \quad (21)$$

Az ilyen tulajdonságú paramétert affin paraméternek nevezzük.

(20)-ból látszik, hogy a részecske mozgását, gravitációs erőterben a Γ_{kl}^i mennyiségek határozzák meg. Belátható továbbá az is, hogy alkalmas koordináta-rendszer választással, bármely téridőpontban mindig nullává tehető az összes Γ_{kl}^i , ez kvázi a gravitáció kikapcsolását jelenti a tér adott infinitezimálisan kis részében. Ez tulajdonképpen nem más, mint az ekvivalencia-elv.

Gravitációs térben a részecske négyesimpulzusát a következő módon definiáljuk:

$$p^i = mcu^i, \quad (22)$$

ahol m a részecske tömege, c pedig a fénysebesség. Ennek négyzete:

$$p_i p^i = m^2 c^2. \quad (23)$$

Ha ebben p_i helyett $-\partial S/\partial x^i$ -t írunk, akkor a gravitációs térben mozgó részecske Hamilton-Jacobi egyenletét kapjuk:

$$g^{ik} \frac{\partial S}{\partial x^i} \frac{\partial S}{\partial x^k} - m^2 c^2 = 0. \quad (24)$$

Azonban a fény terjedésének leírására a geodetikus vonal (20)-ban megadott alakja nem alkalmas, mert a fénysugár terjedésének világvonala mentén az egyenletben szereplő összes tag végtelenné válik. Így ahhoz, hogy meg tudjuk adni a megfelelő alakú mozgásegyenletet, figyelembe kell venni, hogy a geometriai optikában a fénysugár terjedési irányát a hullámszámvektor határozza meg, mely párhuzamos a sugár érintő irányú egységvektorával. A hullámszámvektor tehát

$$k^i = \frac{dx^i}{d\lambda} \quad (25)$$

alakban írható, ahol λ a sugár mentén változó paraméter. Kihhasználva azt, hogy a speciális relativitáselméletben vákuumbéli terjedés során a hullámszámvektor

nem változik a sugár mentén, vagyis $dk^i = 0$, gravitációs térben a hullámszámvektor abszolút differenciálja nulla:

$$Dk^i = 0. \quad (26)$$

Vagyis felírható, hogy

$$\frac{dk^i}{d\lambda} + \Gamma^i_{kl} k^k k^l = 0, \quad (27)$$

mivel a hullámszám négyesvektorának négyzete zérus:

$$k_i k^i = 0. \quad (28)$$

A k_i helyére $\partial\Psi/\partial x^i$ -t helyettesítve végül a gravitációs térben érvényes eikonál-egyenletet kapjuk [8]:

$$g^{ik} \frac{\partial\Psi}{\partial x^i} \frac{\partial\Psi}{\partial x^k} = 0, \quad (29)$$

mely nem más, mint a Hamilton-Jacobi egyenlet $m = 0$ határesetére $S = \Psi$ jelöléscsere mellett.

2.2. Schwarzschild-elhajlás elsőrendig eikonál-módszerrel

Ebben a fejezetben a fénysugár terjedését vizsgáljuk gömbszimmetrikus gravitációs erőterben [8]. Ekkor a fény útját az előző fejezetben levezetett (29) egyenlet írja le. A különbség itt annyi, hogy a részecske energiája helyett az $\omega = -\partial\Psi/\partial t$ frekvenciát használjuk. Mivel ekkor a probléma gömbszimmetrikus és sztatikus, azaz a Hamilton-függvény nem függ explicite az időtől és a φ polár koordinátától, Ψ -t az alábbi alakban kereshetjük:

$$\Psi = -Et + L\varphi + \Psi_r(r) \quad (30)$$

állandó E energia és L impulzusmomentum mellett. Most azonban L helyett a $b = cJ/\omega_0$ állandót vezetjük be, s így

$$\Psi = \int \frac{dr}{r^2 \sqrt{\frac{1}{b^2} - \frac{1}{r^2} \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)}}, \quad (31)$$

ahol $r_g = 2GM/c^2$, a gravitációs sugár. Az eikonál radiális részére pedig [8]:

$$\Psi_r(r) = \frac{\omega_0}{c} \int \sqrt{\frac{r^2}{(r-r_g)^2} - \frac{b^2}{(r-r_g)}} dr \quad (32)$$

adódik. Feltéve, hogy r_g/r kicsi, a gyök alatti kifejezést lineáris rendig sorfejtve kapjuk, hogy:

$$\Psi_r(r) = \frac{\omega_0}{c} \int \sqrt{1 + \frac{2r_g}{r} - \frac{b^2}{r^2}} dr. \quad (33)$$

Az integrandust r_g/r szerint sorba fejtve kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \Psi_r &= \Psi_r^{(0)} + \frac{r_g \omega_0}{c} \int \frac{dr}{\sqrt{r^2 - b^2}} \\ &= \Psi_r^{(0)} + \frac{r_g \omega_0}{c} \cosh^{-1} \frac{r}{b}, \end{aligned} \quad (34)$$

ahol $\Psi_r^{(0)}$ az egyenes sugárnak felel meg.

Amikor a fény sugar valamilyen messzi R pontból közeledik a centrumhoz legközelebb eső $r = b$ pontba és onnét ismét R távolságra távolodik, akkor a Ψ_r teljes megváltozása:

$$\Delta \Psi_r = \Delta \Psi_r^{(0)} + 2 \frac{r_g \omega_0}{c} \cosh^{-1} \frac{R}{b} \quad (35)$$

lesz. A sugár menti φ polárszög R -hez tartozó megváltozását $\Delta \Psi_r$ -t L szerint differenciálva kapjuk meg:

$$\Delta \varphi = -\frac{\partial \Delta \Psi_r}{\partial L} = -\frac{\partial \Delta \Psi_r^{(0)}}{\partial L} + \frac{2r_g R}{b \sqrt{R^2 - b^2}}. \quad (36)$$

Ha figyelembe vesszük, hogy az egyeneshez $\Delta \varphi = \pi$ tartozik és $R \rightarrow \infty$, határátmenetben adódik:

$$\Delta \varphi = \pi + \frac{2r_g}{b}. \quad (37)$$

Tehát gravitációs térben a fény sugar pályája elhajlást szenved (lásd: függelék 1.ábra), mégpedig úgy, hogy a görbe konvex oldala a centrum felé esik. A két aszimptota által bezárt szög π -től

$$\delta \varphi = \frac{2r_g}{b} \quad (38)$$

értékkel különbözik [8], tehát az elhajlást okozó objektumtól b távolságban elhaladó fénysugár $\delta\varphi$ szöggel térül el.

3. A Reissner-Nordström megoldás

Vizsgáljuk most meg a fényelhajlást gyenge-lencse közelítésben [13] alapján, ha a lencséző objektum Q elektromos töltéssel és m tömeggel rendelkezik. Ekkor az objektum téridejét a Reissner-Nordström (RN) metrika írja le helyesen [9], [10]:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)^{-1} dr^2 - r^2 (\sin^2 \theta d\phi^2 + d\theta^2). \quad (39)$$

A fenti egyenletet egy új ρ radiális változó segítségével átírhatjuk a következő alakra:

$$ds^2 = \left[\frac{m^2 - 4\rho^2 - Q^2}{(m + 2\rho)^2 - Q^2}\right]^2 dt^2 - \left(1 + \frac{m}{\rho} + \frac{m^2 - Q^2}{4\rho^2}\right)^2 \{d\rho^2 + \rho^2(\sin^2 \theta d\phi^2 + d\theta^2)\}, \quad (40)$$

ahol

$$r = \rho \left(1 + \frac{m}{\rho} + \frac{m^2 - Q^2}{4\rho^2}\right). \quad (41)$$

Végül gyenge-lencse közelítésben és Minkowski koordinátákban felírva (40)-et az

$$ds^2 \simeq \left[1 - \frac{2m}{x} + \left(1 + \frac{a^2}{2}\right) \frac{2m^2}{x^2}\right] dt^2 - \left[1 - \frac{2m}{x} + \left(1 + \frac{a^2}{3}\right) \frac{3m^2}{2x^2}\right] dx^2 \quad (42)$$

összefüggéshez jutunk, ahol $a \equiv Q/m \leq 1$.

A továbbiakban meghatározzuk a görbült pálya időkésését a nem lencsézett pályához képest. Az időkülönbség:

$$\Delta T \equiv \int_p n dl_p - \int_{p_0} dl_p \quad (43)$$

itt n az effektív törésmutató, mely definíció szerint

$$n \equiv -\frac{g_{i0}}{g_{00}} e^i + \frac{1}{\sqrt{g_{00}}}, \quad (44)$$

és $e^i \equiv \frac{dx^i}{dl_p}$ a tangenciális egység-vektora a fénysugárnak, $dl_p^2 \equiv (-g_{ij} + \frac{g_{0i}g_{0j}}{g_{00}})dx^i dx^j$ pedig a térbeli metrikát jelöli. Így azt kapjuk, hogy

$$dl_p \simeq \left\{ 1 + \frac{m}{x} + \frac{1-a^2}{4} \frac{m^2}{x^2} \right\} dl_{eukl}, \quad (45)$$

ahol $dl_{eukl} \equiv \sqrt{\delta_{ij} dx^i dx^j}$ az euklidészi ívhossz és

$$n \simeq 1 + \frac{m}{x} + \frac{1-a^2}{4} \frac{m^2}{x^2}. \quad (46)$$

(43)-at felbonthatjuk ún. geometriai és potenciális időkésésekre:

$$\Delta T = \Delta T_{geom} + \Delta T_{pot}. \quad (47)$$

A geometriai időkésés:

$$\Delta T_{geom} \equiv \int_p dl_p - \int_{p_0} dl_p \quad (48)$$

jelenti az extra pálya hosszát a perturbálatlan pályához (p_0) képest.

A további számolások megkönnyítése érdekében célszerű bevezetni egy ortogonális koordináta-rendszert a (ξ_1, ξ_2, l) térbeli koordináták segítségével, melynek origójában a lencséző objektum található és az l -tengely a bejövő fénysugár irányába (e_{be}) mutat. A három dimenziós térvektort (x) fel lehet írni a következő alakban:

$$x = \xi + l e_{be}. \quad (49)$$

Így a geometriai időkésés:

$$\Delta T_{geom} \simeq \frac{1}{2} \frac{D_d D_s}{D_{ds}} \left| \frac{\xi}{D_d} - \frac{\eta}{D_s} \right|^2 \quad (50)$$

alakot ölti, ahol D_s a forrás és a megfigyelő távolsága, D_d a megfigyelő és a fényelhajlást okozó objektum távolsága és D_{ds} pedig a forrás távolsága a lencséző objektumtól. A fenti egyenletben η egy két dimenziós vektor a forrás síkban, mely a forrás pozícióját írja le.

A potenciális időkésést a következő képlet definiálja:

$$\Delta T_{pot} \equiv \int_p n dl_p - \int_{p_0} dl_p, \quad (51)$$

s így

$$\Delta T \simeq -4M \ln\left(\frac{\xi}{\xi_0}\right) + \frac{3\pi}{4}(5 - a^2)m^2 \frac{1}{\xi}, \quad (52)$$

ahol a ξ_0 a skálahossz a lencsézés síkjában és ξ az impakt-paraméter. Ezek után a Fermat-elvből meghatározható az elhajlás szöge, azaz az elhajlást szenvedett és az eredeti pálya által bezárt szög:

$$\begin{aligned} \alpha &\equiv -\nabla\xi \Delta T_{pot} \\ &\simeq 4M \frac{\xi}{\xi^2} + \frac{3\pi}{4}(5 - a^2)m^2 \frac{\xi}{\xi^3} \end{aligned} \quad (53)$$

Bevezetve az Einstein sugarat (R_E)

$$\xi_0 = R_E \equiv \sqrt{4m \frac{D_d D_{ds}}{D_s}} \quad (54)$$

és bevezetve az $x \equiv \xi/\xi_0$ dimenziómentes változót, a fenti egyenlet átalakítható az

$$\alpha(x) = \frac{1}{x} + \frac{3\pi}{32}(5 - a^2) \frac{R_{Sch}}{R_E} \quad (55)$$

formába [13].

4. Brán-világok

Azt az elképzelést, miszerint a világ több térdimenzióval rendelkezhet, mint amit közvetlenül érzékelnünk tudnánk, először Kaluza és Klein vetették fel. Elképzelésük szerint az univerzum a három térdimenzió mellett még egy negyedik (felcsavarodott) térdimenziót is tartalmaz. Ezen meglepő ötlet segítségével sikerült egyesíteni a Maxwell féle fény-elméletet Einstein gravitációelméletével. A brán-elméletben feltesszük tehát, hogy az összes klasszikus anyagi mező, így a fotonok is csak egy 3+1 dimenziós hiperfelületen, (a bránon) terjedhetnek míg a gravitáció ennél magasabb térdimenzióban is hathat (bulk).

Albert Einstein 1916-ban közzétett általános relativitáselmélete, első közelítésben a gravitáció leírásának egy igen jó elméletét szolgáltatta. Jelenleg nincs is olyan kísérleti eredmény, mely arra utalna, hogy a gravitáció jelentősen

különbözne az elmélet által jósoltaktól. Mindazonáltal jó okunk van feltételezni, hogy az általános relativitáselmélet nem teljes. Ez azt jelenti, hogy nagy energiákon az elmélet nem használható, nem képes leírni a gravitációt. Ennek az ellentmondásnak egy lehetséges feloldása az, hogy alacsony energiákon a gravitáció a brane-en lokalizált és ilyenkor az Einstein-i elmélet helyesen írja le. Azonban magasabb energia tartományokon a gravitáció a bulk-ba szivárog $1+3+d$ dimenziós alakot öltve. Legalább az egyike ezen plusz térdimenzióknak, igen terjedelmes lehet a Planck skálához képest. Látható, hogy extra térdimenziók feltételezése lehetőséget adhat az általános relativitáselmélet különböző korrekcióira. Lisa Randall és Raman Sundrum 1999-ben javasoltak két olyan gravitációs modellt [11], melyek 4 kiterjedt tér és egy idő dimenzióval rendelkeznek. A két modellt RS1, illetve RS2-vel jelölik. Az RS1 modellben a bulk két bránt tartalmaz, míg az RS2 csak egyet. Az eredeti RS2-modell anti-de Sitter bulk-ba ágyazott Minkowski bránt tárgyal. Azt az esetet, amikor az összes anyag a bránon van, és a brán kozmológiai szimmetriával rendelkezik, Friedmann bránoknak nevezzük. A szakirodalomban ismert annak az esetnek a tárgyalása is, mikor a bulk null por szerű anyaggal rendelkezik.

A bulkban egy Friedmann-Robertson-Walker típusú, térbelileg sík bránt tekintve, a metrika perturbációját lineáris rendig vizsgálva, levezethető egy Schrödinger-típusú egyenlet, melynek potenciál függvénye vulkán alakú [15]. Ez azt jelenti, hogy alacsony energiákon az öt dimenziós graviton a bránon található, ezért elmondhatjuk, hogy ha az extra dimenzió kiterjedt is, létezését közvetlenül nem láthatjuk.

4.1. Az ötdimenziós modell

Az előzőekben láthattuk, hogy az RS2 modellben a gravitáció 5 dimenzióban hat, illetve hogy az elmélet szerint a mi világunk egy $3+1$ dimenziós hiperfelület a bulkban (az ötödik térdimenzióban). Ez a beágyazott brán két téridő részre osztja a bulk-ot, az egyszerűség kedvéért azonban feltehetjük, hogy a $3+1$ dimenziós hiperfelület két oldalán ugyanaz a geometria. Egy másik egyszerűsítés, hogy a bulkban nincs hagyományos anyag, így a gravitáción kívül a többi kölcsönhatás kizárólag a bránon hat. És végül felte tesszük, hogy az Einstein egyenletek alkalmasak a gravitáció leírására azzal a kitéttel, hogy igazából öt dimenzióban érvényesek. Ezek után nyilvánvaló, hogy a mi világunkban más egyenletek írják majd le helyesen a gravitációt.

Ahhoz, hogy az új egyenleteket megkapjuk, legelső lépésként el kell végeznünk a téridő felbontását, azaz a bulk-ot hiperfelületek seregére bontjuk. Ehhez először tekintsük az

$$\omega_y : \Sigma_y \rightarrow M \quad (56)$$

beágyazást. Itt a Σ_y 4 dimenziós sokaságok egyparaméteres seregével befóliázzuk az M bulk-sokaságot. Ha a bulk $\omega_y(\Sigma_y)$ hiperfelületei időszerűek, az y paraméter egy a bulk-sokaság felett értelmezett skalármező, amire $y(\Sigma_y) = y = \text{állandó}$

Egy ilyen felbontás tulajdonképpen az általános relativitáselméletben szokásos felbontás analógiája azzal a különbséggel, hogy itt nem egy időszerű, hanem egy térszerű dimenziót választunk le a többbitől. A "klasszikus" modellben ez a felbontás ahhoz kell, hogy a térszerű dimenziókban vizsgálhassuk az egyes fizikai folyamatok időfejlődését, míg az ötdimenziós modellben a világunkra szeretnénk különböző következtetéseket levonni.

Vizsgáljuk most meg az ötdimenziós Einstein-egyenletet:

$$\tilde{G}_{ab} = \tilde{R}_{ab} + \frac{1}{2}\tilde{g}_{ab}\tilde{R} = \tilde{\kappa}^2\tilde{T}_{ab} \quad (57)$$

ahol \tilde{G}_{ab} az Einstein tenzor, \tilde{R}_{ab} a Ricci tenzor, \tilde{R} a Ricci skalár, \tilde{T}_{ab} az energia-impulzus tenzor, $\tilde{\kappa}$ a bulk gravitációs állandó, \tilde{g}_{ab} pedig a metrikus tenzor az ötdimenziós téridőn.

Az ötdimenziós metrika indukál egy metrikát a bránon:

$$g_{ab} = \tilde{g}_{ab} - n_a n_b, \quad (58)$$

ahol $(n)_a$ a bránra merőleges 1-forma. A felületen értelmezett g_b^a vegyes indexű metrika projektorként viselkedik és a felületre vetít. Ha az ötdimenziós Einstein egyenletet mindkét indexében a bránra vetítjük, az ún. tenzor egyenleteket, ha pedig mindkét indexét a bránra normális irányra projektáljuk, az ún. skalár egyenleteket kapjuk.

A tenzor- és skalár-egyenletekből a Lanczos-Sen-Darmois-Israel illesztési feltételekkel származtatható az effektív Einstein-egyenlet [6], [16]:

$$G_{ab} = -\Lambda g_{ab} + \kappa^2 T_{ab} + \tilde{\kappa}^4 S_{ab} - \varepsilon_{ab} + L_{ab}^{TF} + P_{ab}, \quad (59)$$

ahol T_{ab} a brán energia-impulzus tenzora, ε_{ab} a bulk Weyl tenzor elektromos részének átlaga, L_{ab}^{TF} akkor jelenik meg, ha a brán nem ugyanúgy görbül a bulk-ban jobb- és baloldalt (szimmetrikus beágyazásnál eltűnik), P_{ab} a bulk

energia-impulzus tenzor bránra vett projekciójának trace mentes része, Λ a bránon vett kozmológiai konstans, κ^2 a brán gravitációs konstans és az S_{ab} pedig kvadratikus az energia impulzus tenzorban.

5. Extra dimenzió hatása a fényelhajlásra

Az Einstein féle "klasszikus elmélethez" képest az extra dimenziós elméletek jelentős különbséget csak nagyon magas energiákon mutatnak [12]. A gravitáció azonban nagyban megváltozik az elektro-gyenge skálán, nagyságrendileg 1TeV-os energiák felett. Nagy tömegű objektumok, például csillagok gravitációs kollapszusa során azonban előfordulhatnak ilyen nagyságrendű energiák, ezért az ötdimenziós effektusok fontos szerepet játszhatnak a fekete lyukak létrejöttékor.

Az általános relativitáselméletben egy gömbszimmetrikus, kompakt objektum külső téridejét a Schwarzschild merika írja le. Ebben az esetben az egyetlen paraméter a fekete lyuk tömege. Egy ötdimenziós brán-világban azonban a bulk gravitációs hatása miatt a Schwarzschild metrika többé már nem alkalmazható egy sztatikus, gömbszimmetrikus csillag külső téridejének leírására. A szóban forgó esetet Dadich, Germani és Maartens vizsgálták [4], [5]. Az új metrika formálisan a négydimenziós Reissner-Nordström (RN) megoldásra hasonlít azzal a különbséggel, hogy az RN-metrikában megjelenő elekromos töltés négyzetének szerepét (Q^2) az árapály-töltés (q) veszi át, mely az extra térdimenzió projekciós járulékaként jelenik meg. Ezt a leírasmódot gyakran **DMPR**-megoldásnak is nevezik.

5.1. A DMPR megoldás

A következőkben a bránon vett DMPR-megoldást vizsgáljuk meg vákuum esetén. A további jelölésekben a nagy latin indexek 0-4-ig, míg a görög indexek 0-3-ig futnak. Ekkor az öt dimenziós Einstein egyenlet a következő alakú lesz [6]:

$$G_{IJ} = k_5^2 T_{IJ}, \quad (60)$$

ahol T_{IJ} az ötdimenziós energia-impulzus tenzor, melyet

$$T_{IJ} = -\Lambda_5 g_{IJ} + \delta(Y) [-\lambda g_{IJ} + T_{IJ}^{anyag}] \quad (61)$$

formában írhatunk. Itt Λ_5 a bulk negatív vákuum energiája. Az effektív négydimenziós tér egyenlet a bránon (másnéven a Gauss egyenlet) [5]:

$$G_{\mu\nu} = -\Lambda g_{\mu\nu} + k_4^2 T_{\mu\nu} + k_5^4 S_{\mu\nu} - E_{\mu\nu}, \quad (62)$$

ahol Λ a négydimenziós kozmológiai konstans, és a hozzá tartozó k_4 konstanst a

$$\begin{aligned} \Lambda &= \frac{k_5^2(\Lambda_5 + \frac{k_5^2 \lambda^2}{6})}{2}, \\ k_4^2 &= \frac{k_5^4 \lambda}{6} \end{aligned} \quad (63)$$

egyenletek definiálják. $S_{\mu\nu}$ a lokális kvadratikus energia-impulzus korrekció, mely a projektált Einstein tenzor külső görbületéből származik és

$$S_{\mu\nu} = \frac{1}{12} T T_{\mu\nu} - \frac{1}{4} T_\mu^\alpha T_{\nu\alpha} + \frac{1}{24} g_{\mu\nu} (3 T^{\alpha\beta} T_{\alpha\beta} T^2) \quad (64)$$

alakú. Végül pedig az $E_{\mu\nu}$ az ötdimenziós Weyl tenzor (C_{IAJB}) projekciója

$$E_{IJ} = C_{IAJB} n^A n^B. \quad (65)$$

Az egyetlen dolog, melyet $E_{\mu\nu}$ -ről tudni lehet az, hogy trace-mentes: $E_\mu^\mu = 0$.

Az ötdimenziós Einstein egyenlet egyik indexében a bránra, a másik indexében a bránra normális irányra vett projekciója, ami a Codazzi egyenlet és a Lanczos-Sen-Darmois-Israel illesztési feltételek együttesen biztosítják $T_{IJ}^{anyag} = 0$ esetén, hogy

$$D_\nu T_\mu^\nu = 0, \quad (66)$$

ahol D_ν a bránon vett kovariáns deriválást jelöli. Továbbá a kontrahált Bianchi azonosságból belátható a projektált Weyl tenzorra vonatkozóan, hogy

$$D_\nu E_\mu^\nu = k_5^4 D_\nu S_\mu^\nu. \quad (67)$$

Megjegyzendő, hogy $E_{\mu\nu}$ szimmetria tulajdonságai miatt, általában felbontható egy u^μ négyessebesség-vektor segítségével a következő alakban:

$$E_{\mu\nu} = -\tilde{k}^4 \left[U(u_\mu u_\nu + \frac{1}{3} h_{\mu\nu}) + 2C_\mu u_\nu + P_{\mu\nu} \right], \quad (68)$$

ahol $\tilde{k} = k_5/k_4$ és $h_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + u_\mu u_\nu$ az u^μ -re merőlegesen vetít, vagyis $u^\mu h_{\mu\nu} = 0$. Az $U = -\tilde{k}^{-4} E_{\mu\nu} u^\mu u^\nu$ az ún. sötét sugárzás egy skalár mennyiség, a $C_\mu =$

$\tilde{k}^{-4}h_\mu^\alpha E_{\alpha\beta}u^\beta$ egy térbeli vektor és végül a $P_{\mu\nu} = -\tilde{k}^{-4} [h_\mu^\alpha h_\nu^\beta - \frac{1}{3}h_{\mu\nu}h^{\alpha\beta}] E_{\alpha\beta}$ pedig egy szimmetrikus, trace-mentes tenzor.

Vákuum esetén $T_{\mu\nu} = 0$ ekkor $S_{\mu\nu} = 0$, feltéve, hogy $\Lambda = 0$ (ezt a szakirodalomban finomhangolásnak nevezik), (62) a következő alakot ölti:

$$G_{\mu\nu} = -E_{\mu\nu}. \quad (69)$$

Mivel a négydimenziós Einstein tenzor divergenciája eltűnik,

$$D_\nu E_\mu^\nu = 0 \quad (70)$$

is teljesül. Alábbiakban megkövetelünk egy plusz szimmetriát a bránon, a sztatikusságot.

Sztatikus vákuum esetén és ha u^μ a sztatikus Killing vektor irányába mutat, ekkor $C_\mu = 0$. A (70) egyenlet egyik indexében u^μ -vel, másik indexében h_ν^μ -vel kontrahált része adja [17]:

$$\frac{1}{3}D_\mu U + \frac{4}{3}UA_\mu + D^\nu P_{\mu\nu} + A^\nu P_{\mu\nu} = 0, \quad (71)$$

ahol az $A_\mu = u^\nu D_\nu u_\mu$ a négyesgyorsulás. Sztatikus, gömbszimmetrikus esetben A_μ -t és $P_{\mu\nu}$ -t megválaszthatjuk a következő alakban is:

$$\begin{aligned} A_\mu &= A(r)r_\mu, \\ P_{\mu\nu} &= P(r)(r_\mu r_\nu - \frac{1}{3}h_{\mu\nu}), \end{aligned} \quad (72)$$

ahol $A(r)$ és $P(r)$ az r radiális távolság függvényei, r_μ pedig az egységvektor. Ha az U skalárt az $U = \frac{\tilde{k}^4 Z}{r^4} = -\frac{P}{2}$ alakban választjuk meg, ahol Z egy konstans, akkor a gömbszimmetrikus, sztatikus téregyenletre a bránon, az alábbi Reissner-Nordström típusú megoldást kapjuk [4]:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{q}{r^2} \right) dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{2m}{r} + \frac{q}{r^2}} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2). \quad (73)$$

ahol q az árapály-töltés. A $q = Q^2$ választással (ahol Q^2 a RN-megoldásban szereplő elektromos töltés négyzete) a $-E_{\mu\nu}$ a RN-téridő energia-impulzus tenzorával lesz arányos. Mivel (73) teljesíti a négydimenziós effektív Einstein egyenletet, ezért brán megoldásnak nevezzük. Azonban megjegyezzük, hogy nincs olyan ismert megoldása az ötdimenziós Einstein egyenleteknek, amibe a (73) metrikával adott brán beágyazható lenne.

5.2. Illesztési feltételek

Az általános relativitáselméletben egy gömbszimmetrikus, kompakt objektum aszimptotikusan sík külső téridejét a Schwarzschild-megoldás írja le. A brán-elméletben viszont a bulk gravitációs hatása miatt az objektum külső térideje már nem lesz többé Schwarzschild. Éppen ezért az illesztési feltételeknek sem csak egy megoldása lesz.

Ebben a fejezetben a legegyszerűbb esetet, vagyis egy gömbszimmetrikus, homogén sűrűségeloszlású csillagot vizsgálunk, s így egzakt megoldást kapunk a csillag belső téridejére. A csillag külső téridejét vizsgálva két megoldáshoz jutunk, az egyik ezek közül Reissner-Nordström típusú lesz.

A tökéletes folyadék effektív teljes energia sűrűsége, nyomása, anizotróp feszültsége valamint energia fluxusa [17] alapján:

$$\rho^{eff} = \rho \left(1 + \frac{\rho}{2\lambda}\right) + \frac{6}{\kappa^4 \lambda} \mathcal{U}, \quad (74)$$

$$p^{eff} = p + \frac{\rho}{2\lambda} (\rho + 2p) + \frac{2}{\kappa^4 \lambda} \mathcal{U}, \quad (75)$$

$$\pi_{\mu\nu}^{eff} = \frac{6}{\kappa^4 \lambda} \mathcal{P}_{\mu\nu}, \quad (76)$$

$$q_{\mu}^{eff} = \frac{6}{\kappa^4 \lambda} \mathcal{Q}_{\mu}, \quad (77)$$

ahol λ a brán-feszültség. A bulk lokális effektusai a brán külső görbületéből, a nemlokális effektusok pedig a bulk Weyl-tenzorából származnak és az \mathcal{U} nemlokális energia sűrűségben, a $\mathcal{P}_{\mu\nu}$ anizotróp feszültségben és a \mathcal{Q}_{μ} nemlokális energia fluxusban jelennek meg. Esetünkben, a sztatikusság és a gömbszimmetria miatt $\mathcal{Q}_{\mu} = 0$ és

$$\mathcal{P}_{\mu\nu} = \mathcal{P} \left(r_{\mu} r_{\nu} - \frac{1}{3} h_{\mu\nu} \right), \quad (78)$$

ahol r a radiális egységvektor és $h_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + u_{\mu} u_{\nu}$, illetve az u^{μ} pedig a négyessebesség.

A brán energia-impulzus tenzora divergencia mentes, azaz:

$$\nabla^{\nu} T_{\mu\nu} = 0. \quad (79)$$

Felhasználva a négydimenziós Bianchi-azonosságot (79)-ből kapjuk, hogy az effektív energia-impulzus tenzor szintén divergencia mentes lesz:

$$\nabla^\nu T_{\mu\nu}^{eff} = 0. \quad (80)$$

Mivel sztatikus, gömbszimmetrikus metrikát keresünk, az ívelemnégyzet:

$$ds^2 = -A^2(r)dt^2 + B^2(r)dr^2 + r^2d\Omega^2$$

alakú lesz. Felhasználva (79)-et és (80)-at kapjuk, hogy

$$\frac{1}{r^2} - \frac{1}{B^2} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{2}{r} \frac{B'}{B} \right) = 8\pi G \rho^{eff}, \quad (81)$$

$$-\frac{1}{r^2} + \frac{1}{B^2} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{2}{r} \frac{A'}{A} \right) = 8\pi G \left(p^{eff} + \frac{4}{\kappa^4 \lambda} \mathcal{P} \right), \quad (82)$$

$$p' + \frac{A'}{A} (\rho + p) = 0, \quad (83)$$

$$\mathcal{U}' + 4 \frac{A'}{A} \mathcal{U} + 2 \mathcal{P}' + 2 \frac{A'}{A} \mathcal{P} + \frac{6}{r} \mathcal{P} = -2 (4\pi G)^2 (\rho + p) \rho'. \quad (84)$$

A csillag külső téridejét a $\rho = p = 0$, az $\mathcal{U} = \mathcal{U}^+$ valamint a $\mathcal{P} = \mathcal{P}^+$ feltételek jellemzik. A külső téridőre felírható egyenletrendszer nem zárt, vagyis több lehetséges sztatikus, gömbszimmetrikus külső metrika létezik, beleértve a legegyszerűbb Schwarzschild megoldást: ($\mathcal{U}^+ = \mathcal{P}^+ = 0$) is.

A csillag belsejében ρ és p nem nullák és általában \mathcal{U}^- és \mathcal{P}^- sem azok. Egy homogén sűrűségű csillagra azonban \mathcal{U}^- és \mathcal{P}^- egyaránt lehetnek nullák. Ezért (79)-ből kapjuk, hogy

$$B^2(r) = \left(1 - \frac{2Gm(r)}{r} \right)^{-1}, \quad (85)$$

ahol a tömegfüggvény:

$$m(r) = 4\pi \int_a^r \rho^{eff}(r') r'^2 dr'. \quad (86)$$

A belső megoldásnál $a = 0$, míg a külső megoldásnál $a = R$ helyettesítést használunk. A (83)-as egyenlet integrálásával, konstans ρ -t feltételezve kapjuk, hogy

$$A^-(r) = \frac{\alpha}{\rho + p(r)} \quad (87)$$

ahol α az integrálásból származó állandó.

A csillag felszínén véve az Israel-Darmois illesztési feltételt adódik, hogy:

$$[G_{\mu\nu}r^\nu]_\Sigma = 0, \quad (88)$$

ahol az $[f]_\Sigma \equiv f(R^+) - f(R^-)$. (60) miatt $[T_{\mu\nu}^{eff}r^\nu]_\Sigma = 0$, amiből:

$$\left[p^{eff} + \frac{4}{\kappa^4 \lambda} \mathcal{P} \right]_\Sigma = 0 \quad (89)$$

következik. A "klasszikus" fizikai nyomás eltűnik a csillag felszínén, azonban az effektív nyomás nem. Ezért kívül a csillag felszínén szükség van egy radiális feszültségre, mely ezt az effektív nyomást kompenzálja. Mivel $p(R) = 0$, ezért:

$$(4\pi G)^2 \rho^2(R) + \mathcal{U}^-(R) + 2\mathcal{P}^-(R) = \mathcal{U}^+(R) + 2\mathcal{P}^+(R) \quad (90)$$

A (90)-es egyenlet megadja a sztatikus, gömbszimmetrikus csillag illesztési feltételét. Ha a csillag belsejében nincs Weyl feszültség ($\mathcal{U}^- = \mathcal{P}^- = 0$), és az energia sűrűség nem tűnik el a felszínen ($\rho(R) \neq 0$), akkor mindenképpen lesz Weyl feszültség a csillagon kívül, s így a külső téridő sem lehet Schwarzschild. A továbbiakban feltesszük, hogy $\mathcal{P}^- = 0$, mely összhangban van azzal, hogy a csillag belsejében a klasszikus nyomás izotróp, ezért:

$$\mathcal{U}^-(r) = \frac{\beta}{[A - (r)]^4}, \quad (91)$$

ahol β egy állandó. Ezekután egy homogén sűrűség eloszlású csillagra (90) a következő egyenletre redukálódik:

$$(4\pi G)^2 \rho^2 + \frac{\beta}{\alpha^4} \rho^4 = \mathcal{U}^+(R) + 2\mathcal{P}^+(R). \quad (92)$$

Habár a Weyl feszültség a bulk Weyl tenzorának projekciójából adódik és ezért azt gondolhatnánk, hogy a Weyl tenzor a csillag belsejében is ad járulékot, fentebb láthattuk, hogy lehetséges olyan megoldást találni, hogy csak a csillagon kívül legyen Weyl feszültség.

Ha a csillag sűrűsége homogén, valamint $\mathcal{U}^- = \mathcal{P}^- = 0$, (86) integrálásával megkapjuk a csillag belsejére vonatkozó tömegfüggvényt:

$$m^-(r) = M \left[1 + \frac{3M}{8\pi\lambda R^3} \right] \left(\frac{r}{R} \right)^3, \quad (93)$$

ahol $M = 4\pi R^3 \rho/3$, s így (93)-at (85)-be helyettesítve adódik, hogy:

$$B^-(r) = \frac{1}{\Delta(r)}, \quad (94)$$

ahol

$$\Delta(r) = \left[1 - \frac{2GM}{r} \left(\frac{r}{R} \right)^3 \left\{ 1 + \frac{\rho}{2\lambda} \right\} \right]^{1/2}. \quad (95)$$

Ha (84) jobb oldala nulla, akkor az egymástól független \mathcal{U}^+ és \mathcal{P}^+ is megoldása lesz az így kapott egyenletnek. Ezért a csillag külső téridejére vonatkozó egyenletrendszer nem zárt, s így két külső megoldás is létezik. Ezek közül az egyik, az előző fejezetben bemutatott Reissner-Nordström típusú megoldás, ahol az elektromos töltés négyzetének szerepét az árapály-töltés veszi át, s így a brán-megoldás:

$$\begin{aligned} (A^+)^2 &= (B^+)^{-2} = 1 - \frac{2Gm}{r} + \frac{q}{r^2}, \\ \mathcal{U}^+ &= -\frac{\mathcal{P}^+}{2} = \frac{4}{3}\pi Gq\lambda \frac{1}{r^4} \end{aligned} \quad (96)$$

alakú lesz. Ebből $B^+ = B^-$, illetve $A^+ = A^-$ esetben az illesztési feltételek [18]:

$$\begin{aligned} q &= -3GMR\frac{\rho}{\lambda}, \\ m &= M\left(1 - \frac{\rho}{\lambda}\right), \\ \alpha &= \rho\Delta(R). \end{aligned} \quad (97)$$

6. Fényelhajlás brán-világokban

A gravitációs lencse-hatás vizsgálata a brán-modellek igen ígéretes kísérleti tesztje lehet. Dolgozatomban olyan fekete lyuk megoldást vizsgáltam, mely formailag a fentebb már bemutatott Reissner-Nordström megoldáshoz hasonlít azzal a jelentős különbséggel, hogy az elektromos töltés négyzetének szerepét az árapály-töltés veszi át. A bránon lévő fekete lyukat tehát egy árapály-töltéssel rendelkező fekete lyukként írjuk le. Az effektív mezőegyenletek

egy egzakt fekete lyuk megoldása a bránon, az alábbi indukált metrikából adódik:

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + f^{-1}(r)dr^2 + r^2(d\theta^2 \sin^2 \theta d\varphi^2), \quad (98)$$

ahol

$$f(r) = 1 - \frac{2m}{r} + \frac{q}{r^2}. \quad (99)$$

Egy ilyen fekete lyukat két paraméter jellemez, az m tömege és q árapály-töltése. Mivel formálisan a fenti metrika megegyezik a RN-metrikával, ezért $q = Q^2$ mindig pozitív, mikor az általános relativitáselméletben egy gömb-szimmetrikus, elektromos töltéssel rendelkező objektum külső térídejét írjuk le. Brán világokban azonban q előjele nem korlátozott. Ha q pozitív, a megoldás teljesen megegyezik a Reissner-Nordström megoldással. Abban az esetben, ha $q < m^2$ a fekete lyuknak két horizontja lesz

$$r_h = m \pm \sqrt{(m^2 - q)} \quad (100)$$

sugarakkal, s mindkettő a Schwarzschild sugáron belül helyezkedik el. A $q = m^2$ -nél a két horizont egybeesik:

$$r_h = m, \quad (101)$$

míg $q > m^2$ esetén a metrika csupasz szingularitást ír le. A fenti esetekben a gravitációs lencsézés mértéke csökken a q -val.

Ha $q < 0$ akkor csak egy horizont van:

$$r_h = m + \sqrt{(m^2 + |q|)}. \quad (102)$$

Ezeknél a fekete lyukaknál a gravitáció növekedni fog a bránon lévő árapály-töltés miatt és fényelhajlás mértéke nagyobb lesz, mint a Schwarzschild esetben.

6.1. Fényelhajlás másodrendig Hamilton-Jacobi módszerrel

A bránon lévő árapály-töltésű fekete lyukak által okozott fényelhajlást elsőrendig [14]-ben már vizsgálták. A fejezet célja, hogy az elhajlást másod- rendű pontosságig meghatározzuk. A továbbiakban az egyszerűség kedvéért $G = c = 1$ helyettesítést használunk.

A számolás során a már korábban bevezetett eikonál-egyenletből indulunk ki:

$$g^{ab} \frac{\partial \Psi}{\partial x^a} \frac{\partial \Psi}{\partial x^b} = 0 , \quad (103)$$

ahol Ψ az eikonál-függvény, $k_a = \partial \Psi / \partial x^a$ pedig a hullámvektor. A komplex amplitudó lassan változik a geometriai optikai közelítésben, valamint a hullámhossz kicsi a görbületi sugárhoz képest. A fénysugarakat k^a integrálgörbéiként definiáljuk és ezen görbék mindig merőlegesek a fény hullámfrontjára. A vákuumbéli Maxwell-egyenletek szerint a fény a null-geodetikuskok mentén terjed

$$k^a \nabla_a k^b = 0 \quad (104)$$

és a polarizációs vektor merőleges a fénysugárra.

A továbbiakban a gömbszimmetria miatt, az általánosítás hiánya nélkül feltehetjük, hogy az elhajlás a $\theta = \pi/2$ egyenlítői síkban történik. Az eikonál-függvényt (ami tulajdonképpen a Hamilton-Jacobi hatásfüggvény) a következő alakban választjuk meg:

$$\Psi = E(-t + b\varphi) + \psi_r(r) , \quad (105)$$

ahol $L = bE$ a teljes impulzusmomentum, b az impakt-paraméter, E pedig a teljes energia. Az eikonál-egyenletből (29), bevezetve a kis

$$\begin{aligned} \varepsilon &= mb^{-1} \\ \eta &= qb^{-2} \end{aligned} \quad (106)$$

paramétereket az ismeretlen radiális függvényre adódik:

$$\psi_r = E \int \mathcal{C}(r) dr , \quad (107)$$

$$\mathcal{C}(r) = \pm \sqrt{\frac{r^4}{(r^2 - 2b\varepsilon r + b^2\eta)^2} - \frac{b^2}{r^2 - 2b\varepsilon r + b^2\eta}} . \quad (108)$$

A négyzetgyök jel előtt – szerepel ha r csökken (a foton a lencséző objektum felé tart), illetve + ha r növekszik (a foton elhagyja a lencséző objektumot). Így a fenti felírásmód mindkét esetet tartalmazza.

(105)-öt L szerint differenciálva kapjuk, hogy

$$\frac{d\Psi}{dL} = \varphi + \frac{d\psi_r(\phi)}{dL} , \quad (109)$$

viszont Jacobi-tétele szerint ha a Hamilton-Jacobi hatásfüggvényt egy kanonikus állandó szerint differenciáljuk (itt L -szerint), akkor szintén kanonikus állandót kapunk. Tehát amikor a foton a végtelenből a lencséző objektumhoz legközelebbi $r = r_{\min}$ ponthoz, majd ismét a végtelenbe tart, a φ polárszög teljes megváltozása:

$$\Delta\varphi = - \lim_{\Phi \rightarrow \pi/2} \left(\frac{\partial\psi_r}{\partial L} \Big|_{\Phi} - \frac{\partial\psi_r}{\partial L} \Big|_{-\Phi} \right), \quad (110)$$

(ahol $\Phi \geq 0$).

6.2. Perturbatív megoldás

Fejtsük sorba (107)-et másodrendig a két kis paraméter; ε és η -ban! Ekkor azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \pm\mathcal{C}(r) = & \sqrt{1 - \frac{b^2}{r^2}} + \left(\varepsilon - \frac{b}{2r}\eta \right) \frac{\frac{b}{r} \left(2 - \frac{b^2}{r^2} \right)}{\sqrt{1 - \frac{b^2}{r^2}}} \\ & + \frac{1}{2} \left(\varepsilon - \frac{b}{2r}\eta \right)^2 \frac{b^2}{r^2} \frac{4 \left(3 - \frac{b^2}{r^2} \right) \left(1 - \frac{b^2}{r^2} \right) - \left(2 - \frac{b^2}{r^2} \right)^2}{\left(1 - \frac{b^2}{r^2} \right)^{3/2}}. \end{aligned} \quad (111)$$

Következő lépésként bevezetjük az $r = b/\cos\phi$ új integrációs változót. Ha $r > 0$ akkor $\phi = \text{sgn}\phi \arccos(b/r)$. A ψ_r radiális függvény így

$$\psi_r = L \int \mathcal{C}(\phi) \frac{\sin\phi}{\cos^2\phi} d\phi, \quad (112)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(\phi) = & \sin\phi + \left(\varepsilon - \frac{1}{2}\eta \cos\phi \right) \frac{(2 - \cos^2\phi) \cos\phi}{\sin\phi} \\ & + \frac{1}{2} \left(\varepsilon - \frac{1}{2}\eta \cos\phi \right)^2 \frac{\cos^2\phi}{\sin^3\phi} \\ & \times \left[4(3 - \cos^2\phi) \sin^2\phi - (2 - \cos^2\phi)^2 \right] \end{aligned} \quad (113)$$

alakra hozható. A $\mathcal{C}(\phi) \equiv \mathcal{C}(r = b/\cos\phi)$ kifejezés a $\text{sgn}\phi$ -vel vált előjelet összhangban a négyzetgyök előtti \pm előjellel. Kiintegrálva a fenti egyenletet, megkapjuk az eikonál-függvény radiális részét:

$$\psi_r(\phi) = L (I_0 + \varepsilon I_\varepsilon + \eta I_\eta + \varepsilon^2 I_{\varepsilon^2} + \eta^2 I_{\eta^2} + \varepsilon \eta I_{\varepsilon \eta}) , \quad (114)$$

ahol

$$I_0(\phi) = \tan \phi - \phi , \quad (115)$$

$$\begin{aligned} I_\varepsilon(\phi) &= \ln \left(\frac{1 + \sin \phi}{1 - \sin \phi} \right) - \sin \phi \\ &= 2 \operatorname{sgn} \phi \operatorname{arccosh} \left(\frac{1}{\cos \phi} \right) - \sin \phi , \end{aligned} \quad (116)$$

$$I_\eta(\phi) = \frac{1}{4} \sin \phi \cos \phi - \frac{3\phi}{4} , \quad (117)$$

$$I_{\varepsilon^2}(\phi) = \frac{15}{4} \phi + (3 \cos^2 \phi - 1) \frac{\cot \phi}{4} , \quad (118)$$

$$I_{\eta^2}(\phi) = \frac{35}{64} \phi + (6 \cos^4 \phi - 33 \cos^2 \phi + 35) \frac{\cot \phi}{64} , \quad (119)$$

$$I_{\varepsilon \eta}(\phi) = \frac{8 \cos^2 \phi - \cos^4 \phi - 8}{2 \sin \phi} . \quad (120)$$

Mivel a fenti kifejezések közül mindegyik antiszimmetrikus, ezért az eikonál-függvény radiális része szintén antiszimmetrikus lesz: $\psi_r(-r) = -\psi_r(r)$. Az L -en kívül a $\psi_r(\phi)$ $\varepsilon = mb^{-1}$ és $\eta = qb^{-2}$ -n keresztül is függeni fog L -től, mivel $\phi = \operatorname{sgn} \phi \operatorname{arccos}(b/r)$ és $b = L/E$. Viszont az $L\varepsilon$ és az $L^2\eta$ már független L -től. Tehát a $d\psi_r(\phi)/dL$ a következő módon számolható:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dL} \psi_r(\phi) &= \frac{d}{dL} (LI_0) + (L\varepsilon) \frac{d}{dL} I_\varepsilon + (L^2\eta) \frac{d}{dL} (L^{-1}I_\eta) \\ &\quad + (L\varepsilon)^2 \frac{d}{dL} (L^{-1}I_{\varepsilon^2}) + (L^2\eta)^2 \frac{d}{dL} (L^{-3}I_{\eta^2}) \\ &\quad + (L\varepsilon) (L^2\eta) \frac{d}{dL} (L^{-2}I_{\varepsilon\eta}) . \end{aligned} \quad (121)$$

Felhasználva, hogy

$$\frac{d\phi}{dL} = -L^{-1} \cot \phi \quad (122)$$

adódik, hogy

$$\frac{d}{dL}(LI_0) = -\phi, \quad (123)$$

$$L\frac{d}{dL}I_\varepsilon = \frac{-2}{\sin\phi} + \frac{\cos^2\phi}{\sin\phi}, \quad (124)$$

$$L^2\frac{d}{dL}(L^{-1}I_\eta) = \frac{3\phi}{4} - \frac{\cos^2\phi - 3}{4\sin\phi}\cos\phi, \quad (125)$$

$$L^2\frac{d}{dL}(L^{-1}I_{\varepsilon^2}) = -\frac{15\phi}{4} - \frac{9\cos^4\phi - 26\cos^2\phi + 15}{4\sin^3\phi}\cos\phi, \quad (126)$$

$$L^4\frac{d}{dL}(L^{-3}I_{\eta^2}) = -\frac{105\phi}{64} - \frac{6\cos^6\phi + 21\cos^4\phi - 105\cos^2\phi + 70}{64\sin^3\phi}\cos\phi, \quad (127)$$

$$L^3\frac{d}{dL}(L^{-2}I_{\varepsilon\eta}) = \frac{8}{\sin\phi} + \frac{\cos^4\phi + 6\cos^2\phi - 24}{2\sin\phi}\cos^2\phi. \quad (128)$$

Így a nulladrend és rendre az ε , η , ε^2 , η^2 és az $\varepsilon\eta$ rendek járulékai $\Delta\varphi$ -hez (110) egyenlet alapján kiszámolhatók: (π , 4 , $-3\pi/4$, $15\pi/4$, $105\pi/64$, -16).

Nulladrendben azt találtuk, hogy $(\Delta\varphi)_0 = \pi$, azaz visszakaptuk a perturbálatlan, egyenes vonalú terjedést. Ezért egy m tömegű, q árapály-töltésű lencséző objektum hatására a fénysugár elhajlását, mely a végtelenből az $r = r_{\min}$, objektumhoz legközelebbi ponthoz tart majd tovább halad a végtelenbe, a

$$\delta\varphi = \Delta\varphi - \pi \quad (129)$$

egyenlet írja le.

7. Naprendszerbeli megfigyelésekből kiróható kényszerek

Böhmer, Harko és Lobo, cikkükben [14] megadták a q paraméter elsőrendű Schwarzschild korrekcióját (a mi jelölésünkkel $\varepsilon\eta$), azonban magasabb rendű tagokat nem számoltak (lásd appendix). Az előző fejezetben emellett meghatározásra került a másodrendű Schwarzschild korrekció (ε^2), valamint az első- és másodrendű árapály-töltés járulék (η és η^2) is.

[14]-hez képest a legnagyobb előrelépést az η -s tagok jelentik, mivel ezek hozzájárulása a fényelhajláshoz ε^{-1} -szor nagyobb, mint az $\varepsilon\eta$ -s tagoké, s tulajdonképpen ezért lehet kényszereket kiróni q -ra a Naprendszerben tapasztalható fényelhajlásból. Mint ahogyan azt már [14]-ben is említik, a hosszú bázisú rádióinterferometriás mérésekből

$$\delta\varphi = \delta_\varepsilon\varphi (1 + \xi) \quad (130)$$

adódik és $\xi < \xi_{\max} = \pm 0.0017$. Ha feltesszük, hogy a Schwarzschild elhajlástól való minden eltérést az árapály-töltés okoz, akkor $\delta_\varepsilon\varphi\xi_{\max} = (\delta_\eta\varphi)_{\max}$, s így $16\varepsilon\xi_{\max} = 3\pi(-\eta)_{\max}$, azaz

$$16mb\xi_{\max} = 3\pi(-q)_{\max}. \quad (131)$$

Ha ezt a Napunk esetén akarjuk meghatározni, akkor az $m = M_\odot = 1476.685$ m helyettesítéssel és a lehető legkisebb impakt paraméterrel (a Nap sugarával: $r_{\min} = R_\odot = 695990$ km) számolva:

$$(-q)_{\max} = \frac{16\xi_{\max}}{3\pi} M_\odot R_\odot = \pm 2966 \text{ km}^2. \quad (132)$$

Ezekután felhasználva (97)-et, homogén ρ sűrűségű és R sugarú csillagot feltételezve, a λ -ra vonatkozó kényszer:

$$q = -\frac{3mR\rho}{\lambda} \quad (133)$$

alakú lesz. A Napot konstans sűrűségű csillaggal modellezve, figyelembe véve (132)-öt azt kapjuk, hogy

$$\lambda \geq \frac{3M_\odot R_\odot \rho_\odot}{(-q_{\max})} = \frac{9\pi\rho_\odot}{16\xi_{\max}} = \pm 1464.066 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} = 6.310 \cdot 10^{-3} \text{ MeV}^4. \quad (134)$$

Ha ξ_{\max} -ra mint univerzális mennyiségre tekintünk, akkor akár nagyobb sűrűségű objektumokra (például neutron csillagokra) is tudunk kényszereket kiróni:

$$\lambda \geq \frac{9\pi\rho}{16\xi_{\max}} = \pm 2.079 \cdot 10^{17} \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} = 8.961 \cdot 10^{11} \text{ MeV}^4, \quad (135)$$

ahol a neutron csillag sűrűsége: $\rho = 2 \cdot 10^{14} \text{ g/cm}^3$.

8. Galaxisok által okozott gravitációs fényelhajlás

Galaxisok esetén a fény elhajlása a kör alakú képek elliptikus deformációját okozza (gyenge gravitációs lencsésítés). Ezeket az elliptikus deformációkat statisztikailag elemzik és így következtetnek a lencsésítő objektum tömegére. Összehasonlítva ezt a fénylő anyag tömegével nyilvánvalóvá válik, hogy a galaxisok sötét anyag domináltak.

A fejezet célja, hogy galaktikus méretű lencsésítés esetén vizsgáljuk η/ε arányát. A sötét anyag haló sűrűség-eloszlását számos profillal próbálták modellezni [22], azonban a vizsgálatok alapján -galaxis méretű halóra- a legjobb illeszkedést az ún. Einasto-profil mutatta [22]. A továbbiakban feltesszük, hogy a halóban a nyomás nulla ($p = 0$). Tekintsük tehát a következő, hideg sötét anyag eloszlását leíró Einasto-profilt:

$$\rho(r) = \rho_e \exp \left(d_n \left[1 - \left(\frac{r}{r_e} \right)^{1/n} \right] \right), \quad (136)$$

ahol r_e jelenti azt a sugarat, melyen belül a haló tömegének fele koncentráódik és $\rho_e = \rho(r_e)$. A d_n mennyiséget, mely a galaxisról galaxisra változó n paraméter függvénye, a következő összefüggés definiálja:

$$\Gamma(3n) = 2\gamma(3n, d_n), \quad (137)$$

ahol $\Gamma(x)$ a közönséges gamma-függvény, $\gamma(a, x)$ pedig az inkomplett gamma-függvény:

$$\gamma(a, x) = \int_0^x e^{-t} t^{a-1} dt. \quad (138)$$

d_n értékét $n \geq 0,5$ esetén, [23] alapján, jól közelíti az alábbi formula:

$$d_n \approx 3n - \frac{1}{3} + \frac{0,0079}{n}. \quad (139)$$

(97) integrálásával adódik a tömeg-függvény (lásd: függelék 2.ábra):

$$M(r) = 4\pi n r_e^3 \rho_e \exp(d_n) d_n^{-3n} \gamma(3n, x) \quad (140)$$

és ekkor $x = d_n (r/r_e)^{1/n}$.

Feltesszük, hogy az Einasto profilt $r = R$ -nél levágjuk, és onnan vákuummegoldás érvényes. Legyen ez a vákuum-megoldás a már korábban tárgyalt árapály-töltésű fekete lyuk. A R értékét úgy választjuk meg, hogy a haló tömegének 90%-át tartalmazza. Ezzel a numerikus megállapított modellpartamétereket továbbra is érvényesnek tekinthetjük.

8.1. Illesztési feltételek $r = R$ hiperfelület mentén

Legyen a hiperfelület normálisa n^a . Tudjuk, hogy $n_a \propto (dr)_a$

Ekkor a belső metrikát megadó ívelemnégyzet:

$$ds^2 = -\alpha^2(r) dt^2 + B^2(r) dr^2 + r^2 d\Omega^2 \quad (141)$$

alakú lesz. Ebből az indukált metrikát ($h_{ab} = g_{ab} - n_a n_b$) megadó ívelemnégyzet meghatározható:

$$ds_{\Sigma}^2 = -\alpha^2(R) dt^2 + R^2 d\Omega^2. \quad (142)$$

Külső görbületet a $K_{ab} = h_a^c h_b^d \mathcal{L}_c n_d$ kifejezés definiálja, ahol \mathcal{L}_c a Lie-deriválást jelöli.

Hasonló képpen a külső metrikát megadó ívelemnégyzetre -mivel feltettük, hogy a halón kívüli teret az árapály-töltésű fekete lyuk megoldás írja le- adódik:

$$ds_{tidal}^2 = -f(r) dt^2 + f^{-1}(r) dr^2 + r^2 d\Omega^2. \quad (143)$$

Így a felületen vett ívelemnégyzet:

$$ds_{\Sigma}^2 = -f(R) dt^2 + R^2 d\Omega^2, \quad (144)$$

ahol

$$f = 1 - \frac{2Gm}{R} + \frac{q}{R^2}. \quad (145)$$

Felhasználva a külső görbület és az indukált metrika folytonosságának feltételét, továbbá a (89)-es egyenletet, az illesztési feltételek (az 5.2-es fejezetben leírtak mintájára) Einasto profil esetén a következő alakot öltik:

$$q = -8\pi G R^4 \lambda \left(1 - \sqrt{1 + 2 \frac{\rho_e}{\lambda} \exp \left\{ -d_n \left[\left(\frac{R}{r_e} \right)^{1/n} - 1 \right] \right\}} \right) - 8\pi G R^4 \lambda \left(\frac{\rho_e}{\lambda} \exp \left\{ -d_n \left[\left(\frac{R}{r_e} \right)^{1/n} - 1 \right] \right\} \right) \quad (146)$$

$$\alpha = \sqrt{1 - \frac{2G\mathcal{M}}{R} + \frac{q}{R^2}}, \quad (147)$$

$$\mathcal{M} = \frac{1}{2} \frac{8\pi G n r_e^3 \rho_0 d_n^{-3n} \Gamma(3n) R + q}{GR}. \quad (148)$$

A q árapály-töltés ismeretében $\eta = q/R^2$ ($b = R$) meghatározható:

$$q = -8\pi GR^2\lambda \left(1 - \sqrt{1 + 2\frac{\rho_e}{\lambda} \exp \left\{ -d_n \left[\left(\frac{R}{r_e} \right)^{1/n} - 1 \right] \right\}} \right) - 8\pi GR^2\lambda \left(\frac{\rho_e}{\lambda} \exp \left\{ -d_n \left[\left(\frac{R}{r_e} \right)^{1/n} - 1 \right] \right\} \right) \quad (149)$$

$$\alpha = \sqrt{1 - \frac{2GM}{R} + \frac{q}{R^2}}, \quad (150)$$

$$\mathcal{M} = \frac{1}{2} \frac{8\pi G n r_e^3 \rho_0 d n^{-3n} \Gamma(3n) R + q}{GR}. \quad (151)$$

és mivel $\rho_e/\lambda \ll 1$, ezért sorfejthető is:

$$\eta = -2\pi GR^2 \frac{\rho_e^2}{\lambda} \exp \left\{ -2d_n \left[\left(\frac{R}{r_e} \right)^{1/n} - 1 \right] \right\}. \quad (152)$$

Hasonlóképpen $\varepsilon = M(R)/R$, ahol $M(R)$ a (140)-ben megadott tömegfüggvény R -helyen vett értéke.

Így megadható a két kis paraméter hányadosa, mely nem más mint az árapály-töltés Schwarzschild-járulékhöz viszonyított aránya:

$$\frac{\eta}{\varepsilon} = -\frac{2\pi GR^3 \rho_e \rho_e}{M(R) \lambda} \exp \left\{ -2d_n \left[\left(\frac{R}{r_e} \right)^{1/n} - 1 \right] \right\}, \quad (153)$$

vagy

$$\frac{\eta}{\varepsilon} = -C \frac{\rho_e}{\lambda}, \quad (154)$$

$$C = \frac{2\pi GR^3 \rho_e}{M(R)} \exp \left\{ -2d_n \left[\left(\frac{R}{r_e} \right)^{1/n} - 1 \right] \right\}. \quad (155)$$

Az alábbi táblázat néhány, [22]-ben modellezett galaxis paramétereit és a hozzájuk tartozó C értékeket tartalmazza $G = 1$ helyettesítést használva:

	n	$r_e(Kpc)$	$\log\rho_e(M_{Nap}/pc^3)$	C
G_{00}	5,284	189	-5,22	0,2818
G_{01}	5,873	252,6	-5,51	0,4228
G_{02}	5,725	391,4	-5,74	0,2657
G_{03}	7,791	405,6	-5,98	0,2724

A gyenge lencsézésből statisztikusan meghatározott sötét anyag tömegének pontosságát, ugyanúgy mint a Naprendszer esetén, az η/ε jelképezi olyan értelemben, hogy a hibahatárból η származtatható. Innen, adott galaxis esetén következtethetünk ρ_e/λ , végül pedig λ értékére.

Megjegyzendő, hogy az egyéb kényszerekből meghatározott λ értékek valamennyien $\eta \ll \varepsilon$ feltételhez vezetnek.

9. Összefoglalás

Dolgozatom elején felhívtam a figyelmet a gravitációs fényelhajlás vizsgálatának fontosságára, melyből a brán-modellekben megjelenő q és λ paraméterek értékeire szabhattunk ki kényszereket. A brán feszültségre (λ) már korábban is ismertek voltak kényszerek [19], melyre a Newton-törvénytől való lehetséges eltérés vizsgálatából $\lambda_{\min} = 138,59 \text{ TeV}^4$ [20], asztrofizikai vizsgálatokból $\lambda_{\min} = 5 \cdot 10^8 \text{ MeV}^4$ [18], míg Big Bang nukleoszintézisre vonatkozó kényszerekből $\lambda_{\min} = 1 \text{ MeV}^4$ [21] adódott. Mi pedig Nap esetén a $(-q)_{\max} = \pm 2966 \text{ km}^2$, $\lambda_{\min} = 6,310 \cdot 10^{-3} \text{ MeV}^4$, illetve neutron csillag esetén a $\lambda_{\min} = 8,961 \cdot 10^{11} \text{ MeV}^4$ értékeket kaptuk.

A szükséges technikai háttér bemutatása után meghatároztuk a fény elhajlási szögét a két kis paraméterben (ε, η) másodrendig, abban az esetben, mikor a lencséző objektum egy a bránon lévő, q árapály-töltésű fekete lyuk volt. A szakirodalomban [13] eddig is ismert eredmény volt, hogy az elektromos töltéssel rendelkező (Reissner-Nordström) fekete lyuk által okozott fényelhajlás mértéke kisebb, mint Schwarzschild fekete lyuké, s ez az állítás pozitív előjelű árapály-töltésre is igaznak bizonyult. Végül pedig galaxis méretű lencsézés esetén határoztunk meg összefüggést a brán-elméleti paraméterek és a jelenleg legelterjedtebb sötét anyag haló sűrűség-profilját leíró Einasto-profil paraméterei között.

Záró gondolatként szeretném megemlíteni, hogy a negatív árapály-töltés jelentős mértékben felerősítheti a gravitációs lencsézést, s így egy lehetséges

magyarázatot jelenthet a megfigyelésekből látszó, eddig a sötét anyagnak tulajdonított lencse hatás legalább egy részére.

10. Köszönetnyilvánítás

Ezúton szeretnék köszönetet mondani témavezetőimnek, Dr. Gergely Árpád Lászlónak és Keresztes Zoltánnak, hogy szakmai tanácsaikkal, észrevételeikkel segítették munkámat.

11. Appendix

Az appendix célja a [14]-ben levezetett, fényelhajlásra kapott eredmények pontosítása, illetve az általuk használt transzformációt felhasználva a magasabb rendű járulékok meghatározása.

Az

$$r'^2 = r(r - 2b\varepsilon) + b^2\eta \quad (156)$$

transzformáció ε és η -ban másodrendig sorfejtve az alábbi alakra hozható:

$$\frac{r}{r'} \approx 1 + \frac{b\varepsilon}{r'} - \frac{b^2\eta}{2r'^2} + \frac{b^2\varepsilon^2}{2r'^2} - \frac{b^4\eta^2}{8r'^4}. \quad (157)$$

Így a (107)-es egyenlet a

$$\psi_r = \pm E \int \sqrt{\left[\left(\frac{r}{r'}\right)^4 - \frac{b^2}{r'^2}\right] \left(1 - \frac{b^2\varepsilon^2}{2r'^2} + \frac{b^2\eta}{2r'^2}\right)^2} dr' \quad (158)$$

alakot ölti, ahol az $r \rightarrow r'$ változócsere miatt:

$$dr' = \frac{dr}{\left(1 + \frac{b^2\eta}{2r'^2} - \frac{b^2\varepsilon^2}{2r'^2} + \frac{3b^4\eta^2}{8r'^4}\right)}. \quad (159)$$

Megtartva a két kis paraméterben (ε, η) másodrendű, illetve vegyes tagokat is, a (107)-es egyenletre kapjuk, hogy:

$$\psi_r = E \int C^*(r') dr', \quad (160)$$

$$\pm C^*(r') = c_0 + \varepsilon c_\varepsilon + \eta c_\eta + \varepsilon^2 c_{\varepsilon^2} + \eta^2 c_{\eta^2} + \varepsilon\eta c_{\varepsilon\eta}, \quad (161)$$

ahol az együttthatók:

$$c_0 = \sqrt{1 - \frac{b^2}{r'^2}}, \quad (162)$$

$$c_\varepsilon = \frac{2\frac{b}{r'}}{\sqrt{1 - \frac{b^2}{r'^2}}}, \quad (163)$$

$$c_\eta = -\frac{1}{2} \frac{\frac{b^2}{r'^2} (1 + \frac{b^2}{r'^2})}{\sqrt{1 - \frac{b^2}{r'^2}}}, \quad (164)$$

$$c_{\varepsilon^2} = \frac{b^2}{2r'^2} \frac{3 - 6\left(\frac{b}{r'}\right)^2 - \left(\frac{b}{r'}\right)^4}{\left(1 - \frac{b^2}{r'^2}\right)^{3/2}}, \quad (165)$$

$$c_{\eta^2} = -\frac{b^4}{8r'^4} \frac{1 + 6\left(\frac{b}{r'}\right)^2 - 3\left(\frac{b}{r'}\right)^4}{\left(1 - \frac{b^2}{r'^2}\right)^{3/2}}, \quad (166)$$

$$c_{\varepsilon\eta} = \frac{2\left(\frac{b}{r'}\right)^5}{\left(1 - \frac{b^2}{r'^2}\right)^{3/2}}. \quad (167)$$

Következő lépésként bevezetjük az $r' = b/\cos\phi'$ új integrációs változót. Ha $r' > 0$ akkor $\phi' = \text{sgn}\phi' \arccos(b/r')$. A ψ_r radiális függvény így

$$\psi_r = L \int \mathcal{C}(\phi') \frac{\sin\phi'}{\cos^2\phi'} d\phi', \quad (168)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(\phi') &= \sin\phi' + \frac{2\cos\phi'}{\sin\phi'} \left[\varepsilon - \frac{\eta}{4} \cos\phi' (1 + \cos^2\phi') \right] \\ &+ 2\varepsilon\eta \frac{\cos^5\phi'}{\sin^3\phi'} + \frac{\varepsilon^2 \cos^2\phi'}{2 \sin^3\phi'} (3 - 6\cos^2\phi' - \cos^4\phi') \\ &- \frac{\eta^2 \cos^4\phi'}{8 \sin^3\phi'} (1 + 6\cos^2\phi' - 3\cos^4\phi') \end{aligned} \quad (169)$$

alakra hozható. A $\mathcal{C}(\phi') \equiv \mathcal{C}(r' = b/\cos\phi')$ kifejezés a $\text{sgn}\phi'$ -vel vált előjelet összhangban a négyzetgyök előtti \pm előjellel. Kiintegrálva a fenti egyenletet, megkapjuk az eikonál-függvény radiális részét:

$$\psi_r(\phi') = L (I_0 + \varepsilon I_\varepsilon + \eta I_\eta + \varepsilon^2 I_{\varepsilon^2} + \eta^2 I_{\eta^2} + \varepsilon\eta I_{\varepsilon\eta}) , \quad (170)$$

ahol

$$I_0(\phi') = \tan \phi' - \phi' , \quad (171)$$

$$I_\varepsilon(\phi') = 2 \operatorname{sgn} \phi' \operatorname{arccosh} \left(\frac{1}{\cos \phi'} \right) , \quad (172)$$

$$I_\eta(\phi') = -\frac{1}{4} \sin \phi' \cos \phi' - \frac{3\phi'}{4} , \quad (173)$$

$$I_{\varepsilon^2}(\phi') = \frac{1}{4} \frac{15\phi' \sin \phi' + 9 \cos \phi' - \cos^3 \phi'}{\sin \phi'} , \quad (174)$$

$$I_{\eta^2}(\phi') = \frac{1}{64} \frac{35\phi' \sin \phi' + 35 \cos \phi' - 9 \cos^3 \phi' + 6 \cos^5 \phi'}{\sin \phi'} , \quad (175)$$

$$I_{\varepsilon\eta}(\phi') = \frac{2(\cos^2 \phi' - 2)}{\sin \phi'} . \quad (176)$$

Felhasználva a 6.2-es fejezetben már korábban bemutatott eljárást adódik:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dL} \psi_r(\phi') &= \frac{d}{dL} (L I_0) + (L \varepsilon) \frac{d}{dL} I_\varepsilon + (L^2 \eta) \frac{d}{dL} (L^{-1} I_\eta) \\ &+ (L \varepsilon)^2 \frac{d}{dL} (L^{-1} I_{\varepsilon^2}) + (L^2 \eta)^2 \frac{d}{dL} (L^{-3} I_{\eta^2}) \\ &+ (L \varepsilon) (L^2 \eta) \frac{d}{dL} (L^{-2} I_{\varepsilon\eta}) , \end{aligned} \quad (177)$$

amiből

$$\frac{d}{dL} (LI_0) = -\phi' , \quad (178)$$

$$L \frac{d}{dL} I_\varepsilon = \frac{-2}{\sin \phi'} , \quad (179)$$

$$L^2 \frac{d}{dL} (L^{-1} I_\eta) = \frac{3\phi'}{4} + \frac{\cos^2 \phi' + 3}{4\sin \phi'} \cos \phi' , \quad (180)$$

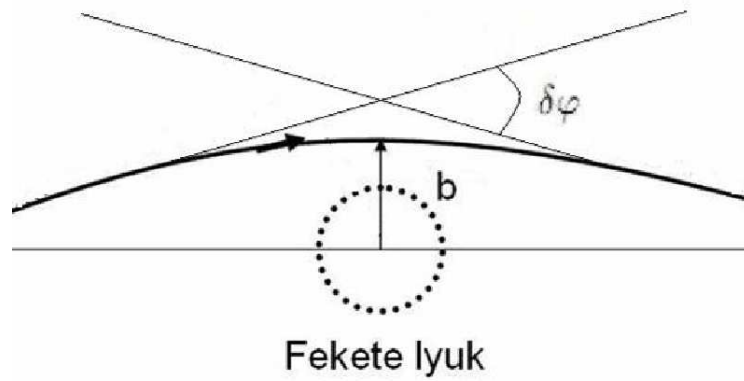
$$L^2 \frac{d}{dL} (L^{-1} I_{\varepsilon^2}) = -\frac{1}{4} \frac{15\phi' \sin^3 \phi' - \cos^5 \phi' - 22 \cos^3 \phi' + 15 \cos \phi'}{\sin^3 \phi'} \quad (181)$$

$$L^4 \frac{d}{dL} (L^{-3} I_{\eta^2}) = -\frac{1}{64} \frac{105\phi' \sin^3 \phi' - 3 \cos^5 \phi' - 140 \cos^3 \phi'}{\sin^3 \phi'} + \frac{6 \cos^7 \phi' + 105 \cos \phi'}{\sin^3 \phi'} , \quad (182)$$

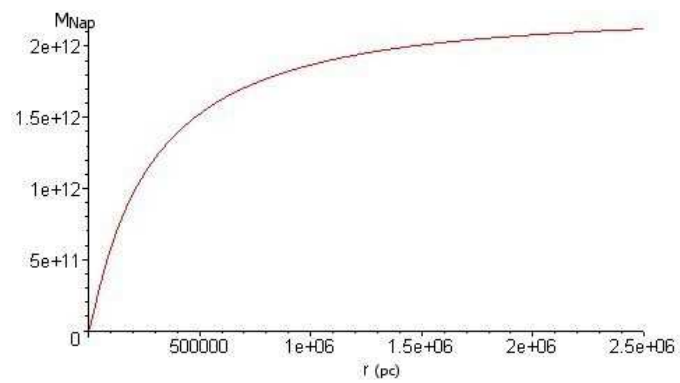
$$L^3 \frac{d}{dL} (L^{-2} I_{\varepsilon\eta}) = \frac{1}{2} \frac{-3 \cos \phi' - 24 \cos^2 \phi' + 6 \cos^3 \phi' + 8 \cos^4 \phi'}{\sin^3 \phi'} + \frac{\cos^5 \phi' + 16}{\sin^3 \phi'} . \quad (183)$$

Így a nulladrend és rendre az ε , η , ε^2 , η^2 és az $\varepsilon\eta$ rendek járulékai $\Delta\varphi$ -hez a (110)-es egyenlet alapján: $(\pi, 4, -3\pi/4, 15\pi/4, 105\pi/64, -16)$, -mely a [14]-ben számoltakkal ellentétben- megegyezik a 6.2-es fejezetben, más változóval kapott eredményekkel.

12. Függelék



1. ábra. Fekete lyuk által okozott fényelhajlás sematikus ábrázolása.



2. ábra. A G_{00} jelű modell galaxis tömeg függvénye.

Hivatkozások

- [1] M K Mak and T Harko 2004 *Phys. Rev. D* **70** 024010
- [2] S Kar and M Sinha 2003 *Gen. Rel. Grav.* **35** 10
- [3] R Whisker 2005 *Phys. Rev. D* **71** 064004
- [4] N Dadhich, R Maartens, P Papadopoulos, V Rezanian 2000 *Phys. Lett. B* **487** 1
- [5] C Germani and R Maartens 2001 *Phys. Rev. D* **64** 124010
- [6] T Shiromizu, K Maeda and M Sasaki 2000 *Phys. Rev. D* **62** 024012
- [7] Érdi Bálint 1996 *Égi Mechanika* (Eötvös Loránd Tudományegyetem)
- [8] L D Landau and E M Lifshitz 1979 *The Classical Theory of Fields* (Oxford: Butterworth-Heinemann)
- [9] H Reissner 1916 *Ann. Phys. (Leipzig)* **50** 106
- [10] G Nordström 1918 *Proc. K. Ned. Akad. Wet.* **20** 1238
- [11] L Randall and R Sundrum 1999 *Phys. Rev. Lett.* **83**, 4690
- [12] M Sasaki, T Shiromizu and K Maeda 2000 *Phys. Rev. D* **62** 024008
- [13] M Sereno 2003 *Phys. Rev. D* **67** 064007
- [14] C G Böhmer, T Harko and F S N Lobo 2008 *Quantum Grav.* **25** 045015
- [15] R Maartens 2004 *gr-qc/0312059*
- [16] László Á. Gergely 2008 *Phys. Rev. D* **78** 084006
- [17] R Maartens 2000 *Phys. Rev. D* **62** 084023
- [18] C Germani, R Maartens 2001 *Phys. Rev. D* **64** 124010
- [19] Gy M Szabó, L Á Gergely and Z Keresztes 2007 *PMC Physics A* **1**:8
- [20] R Maartens 2004 *Living Rev. Rel.* **7** 1

- [21] R Maartens, D Wands, B A Bassett and I P C Heard 2000 *Phys. Rev. D* **62** 041301(R)
- [22] D Merritt, A W Graham, B Moore, J Diemand, B Terzic 2006 *Astron. J.*132:2685
- [23] G A Mamon, E L Lokas, F Stoehr, T J Cox 2006 arXiv:astro-ph/0601345

13. Nyilatkozat

Alulírott Dwornik Marek, csillagász szakos hallgató, kijelentem, hogy a diplomadolgozatban foglaltak saját munkám eredményei, és csak a hivatkozott forrásokat (szakirodalom, eszközök, stb.) használtam fel. Tudomásul veszem azt, hogy a diplomamunkámat a Szegedi Tudományegyetem könyvtárában, a kölcsönözhető könyvek között helyezik el.

Szeged, 2009. május 5.

Dwornik Marek