

SZEGEDI TUDOMÁNYEGYETEM TTIK
ELMÉLETI FIZIKAI TANSZÉK

DIPLOMAMUNKA

**Hamiltoni fejlődés és feketelyuk-perturbációk
skalár-tenzor gravitációelméletekben**

Készítette: *Gergely Cecília*
Fizikus MSc szakos hallgató

Témavezető: *Dr. Keresztes Zoltán*
egyetemi docens
SZTE Elméleti Fizikai Tanszék

SZEGED

2019

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés	3
2. Előzmények	7
2.1. A nem-merőleges $2+1+1$ felbontás	7
2.2. Általános relativisztikus gravitációs dinamika	8
3. Hamiltoni fejlődés az általános relativitáselméletben	10
3.1. Általánosított koordináták és impulzusok	10
3.2. Liouville-forma és kényszerek	11
3.3. A határtagok tárgyalása	14
3.4. A Lagrange-sűrűség Liouville-formát, kényszereket és határtagokat tartalmazó alakja	16
3.5. A Hamilton-sűrűség	17
3.6. A kanonikus koordináták időfejlődése	18
3.7. A Poisson-zárójel és a kanonikus egyenletek	19
4. Gömbszimmetrikus fekete lyukak skalár-tenzor elméletekben	22
4.1. Fekete lyukak az általános relativitáselméletben és skalár-tenzor elméletekben	22
4.2. Megfigyelésekkel kompatibilis EFT elméletek	23
4.3. Az EFT hatás	24
4.4. Az EFT hatás változói gömbszimmetrikus, sztatikus háttéren	25
4.5. Az EFT hatás elsőrendű variációja	26
4.6. Alkalmazás: Schwarzschild-téridő az általános relativitáselméletben	34
5. Mértéktranszformációk és rögzítés skalár-tenzor elméletekben	37
5.1. Vektorok és szimmetrikus tenzorok felbontása páros és páratlan szektorokra	37
5.2. Mértéktranszformációk	38
5.3. Mértékrögzítés	39
5.4. A feketelyuk-perturbációs változók páros / páratlan jellege	40
6. Gömbszimmetrikus, statikus feketelyuk-perturbációk a EFT skalár-tenzor elméletekben	42
6.1. Perturbációs számítás és stabilitási kritériumok	42
6.2. A metrika determinánsának első- és másodrendű variációja	43
6.3. Az EFT hatás másodrendű variációja	43

7. Összefoglalás	46
8. Nyilatkozat	49
9. Köszönetnyilvánítás	50
Hivatkozások	51

1. Bevezetés

A speciális relativitáselmélet elsőként vezette be a négydimenziós téridő fogalmát, majd az általános relativitáselmélet annak görbülségével hozta kapcsolatba a gravitációt. A newtoni elméletben végtelen sebességgel terjedő gravitációt jellemző potenciál helyét az általános relativitáselméletben 10 metrikus függvény, a \tilde{g}_{ab} metrikus tenzor komponensei veszik át. A metrikus komponensek a diffeomorfizmus-invariancia miatt nem függetlenek, a szabadsági fokok pedig fénysebességgel terjednek. A metrika első deriváltjai a szabad mozgásokat jellemző geodetikus egyenletben szereplő Levi–Civita konnexiót, második deriváltjai (az árapályerőként is felfogható) görbülséget adják meg.

Az általános relativitáselmélet igen pontosan írja le a gravitációs jelenségeket mind a Naprendszer léptékén (ahol a gravitáció gyengének minősül és a karakterisztikus sebességek kicsik a fény sebességéhez viszonyítva), mind az erős gravitáció olyan tartományaiban, melyek megfigyelhető jelenségekhez vezetnek. Előbbibe tartoznak a perihéliumvándorlás, gravitációs fényelhajlás és gravitációs vöröseltolódás. Utóbbiba tartoznak a gravitációs lencsézés, a fekete lyukak akkréciójával és nagyenergiás részecske-nyalábjaival kapcsolatos jelenségek, valamint a gravitációs hullámok. A kompakt kettős rendszerek összeolvadásából keletkező, az Advanced LIGO és Virgo földi detektorai segítségével megfigyelt gravitációs hullámok [1]-[6] az általános relativisztikus jóslatoknak megfelelő tulajdonságokat mutattak [7]. A kettős neutroncsillag összeolvadásból keletkezett gravitációs hullámok és a kísérő gamma kitörés megfigyelt 1,7 s időkülönbsége a gravitációs hullámok fénysebességű terjedését $[-3 \times 10^{-15}, +7 \times 10^{-16}]$ relatív pontosságon belül igazolta [8]. A gravitációs hullám terjedését jellemző általánosított diszperziós relációkra [9] kapott kényszerek a graviton tömegének eltűnését $5,0 \times 10^{-23}$ eV/c² pontossággal mondták ki [10]. Szintén nagy pontossággal igazolják az általános relativitáselmélet jóslatait a kettős pulzár megfigyelések [11]. Az általános relativitáselmélet által megjósolt különböző precessziós effektusokat a Gravity Probe B műhold mérései nagy pontossággal erősítették meg [12]. A közelmúltban rádió-interferometriai mérésekkel sikerült az M87 galaxis központi (Pōwehi-nak elnevezett) fekete lyukáról „fényképet” készíteni [13]-[18].

Az általános relativitáselméletet igazoló Naprendszer, Tejútrendszer és extragalaktikus skálán végzett precíz megfigyelések mellett azonban mind galaktikus, mind koz-

mológiai skálán problémák is felmerültek. A galaxisok külső csillagainak forgása nem követi az általános relativisztikus (a galaxis centrumtól mért nagy távolság miatt ez tulajdonképpen kepleri) jóslatot, az ún. galaktikus forgásgörbék nagy távolságoknál távolságtól független állandó keringési sebessége vagy a newtoni gravitáció ún. MOND megváltoztatásával [19] vagy a galaxist magába foglaló sötét anyag haló bevezetésével magyarázható. A galaxis klaszterek dinamikája ugyancsak jelentős mennyiségű sötét anyag jelenlétére utal. Az Ia szupernóvák keletkezésük fizikai mechanizmusa miatt standard (standardizálható) gyertyákként viselkednek, látszó fényességük megfigyelése alkalmassá teszi őket távolságmeghatározásra. A luminozitás távolság a spektroszkópiailag megfigyelhető vöröseltolódáson kívül a kozmológiai paramétereknek is függvénye. Kiderült, hogy az univerzum gyorsulva tágul, ezt az erős energiafeltételt sértő, taszító hatású sötét energia bevezetésével sikerült eddig magyarázni. Jelenlegi tudásunk szerint az Univerzum mindössze 4,90% barionikus anyagot, 26,21% sötét anyagot és 68,89% sötét energiát tartalmaz (az értékeket 0,56% pontossággal 2018-ban határozta meg a Planck Kollaboráció a kozmikus mikrohullámú háttérsugárzás, barion akusztikus oszcillációk és gravitációs lencsézési adatok alapján, lásd [20] második táblázatát).

A legegyszerűbb sötét energia jelölt a kozmológiai állandó. Ennek értéke azonban mintegy 60 nagyságrenddel kisebb (Lorentz-invariancia figyelembevételével, eredetileg 120 nagyságrend volt az eltérés) [21] a legkézenfekvőbb magyarázatául szolgáló kvantumtérelméleti zéro-pont energiánál, beállítva „a legrosszabb elméleti jóslatot a fizika történetében” [22]. Amennyiben a sötét energia kozmológiai állandó lenne, az Univerzum a jövőben exponenciális tágulásba kezd, és véges idő elteltével ún. Big Rip (nagy szakadás) szingularitás áll elő (ezt a skálafaktor végtelen értéke jellemzi). Tetsetősebbek a dinamikai sötét energia modellek, melyekben egy fizikai mező (pl. skalár) játssza a sötét energia szerepét.

A sötét anyag közvetlen kimutatásának eddigi próbálkozásai annak lehetséges gyenge kölcsönhatására építettek. Az eddigi negatív eredmények megalapozták azt az elképzelést, hogy a sötét energiához hasonlóan a sötét anyag is csak gravitációsan hat kölcsön. Módosított gravitációelméletek jelentek meg, melyek azt tűzték ki célul, hogy a megfigyelésekkel kompatibilis modelleket hozzanak létre (skalár, vektor, 2-forma mezők vagy egy második metrikus tenzor bevezetésével). A módosításoknak azonban kimutathatatlanak kell lennie azokban a tartományokban (pl. Naprendszer skáláján), ahol az általános relativitáselméletet a megfigyelések pontosan igazolták.

A legegyszerűbb gravitációelmélet a skalár-tenzor elmélet. Ostrogradsky instabilitások elkerülése végett megköveteljük, hogy az elmélet csak másodfokú differenciálegyenletekhez vezessen. A legáltalánosabb skalár-tenzor elmélet, melyben mind a metrikus tenzorra, mind a skalármezőre másodrendű differenciálegyenletek vonatkoznak, a Horn-

deski elmélet [23, 24]. Ezt négy Lagrange-sűrűség összege adja meg, melyek közül L_2 és L_3 a metrikát csak minimális csatolás formájában tartalmazza. Az általános relativitáselmélet Einstein–Hilbert hatásának Brans–Dicke típusú általánosítása L_4 -ben, L_5 -ben pedig az Einstein-tenzor szerepel. Az ún. effektív térelméleti (EFT) vagy Horndeski-n túlinak (beyond-Horndeski) is nevezett skalár-tenzor elméletekben előfordulnak magasabb rendű dinamikai egyenletek is, a szabadsági fokok terjedését azonban továbbra is másodrendű dinamika jellemzi [25]. Ezen elméletek kozmológiai vonatkozásait kiterjedten vizsgálták, hangsúlyt helyezve a perturbációk stabilitására [26]. A feketelyuk-megoldások stabilitását is vizsgálták már ebben az elméletcsaládban, azonban csupán az ún. páratlan szektorban [27]. A gravitációs hullámok fénysebességű terjedése korlátokat jelent az EFT hatás függvényeire.

A gravitáció geometriai elméleteiben a gravitációs dinamikát egy $3 + 1$, Arnowitt–Deser–Misner (ADM) típusú tér+idő felbontás nyomán szokás vizsgálni [28]. Szem előtt tartva, hogy a gömbszimmetrikus feketelyuk-téridők sugár irányban, illetve a gömbfelületen eltérő tulajdonságúak, indokolt a gravitációs dinamika $2 + 1 + 1$ típusú, azaz gömbfelület+radiális irány+idő felbontása. Ezt a formalizmust a 2017-ben dolgoztam ki nem-merőleges kettős fóliázásra a XXXIII. Országos Tudományos Diákköri Konferenciára benyújtott dolgozatomban, elnyerve az Extragalaktikus Asztrofizika tagozat első díját [29]. Ezeket, a jelenlegi dolgozatban ismertetett új kutatási eredményekhez szükséges előzményeket a 2. fejezet tartalmazza.

Általánosítva a [30, 31] tárgyalását, a 3. fejezetben kidolgozom a skalár-tenzor elméletek legegyszerűbb reprezentánsának, az általános relativitáselméletnek a Hamiltoni dinamikáját. Az Einstein–Hilbert hatáson elvégzem a Legendre-transzformációt a következő módon. A Lagrange-sűrűséget felírom olyan alakban, hogy előálljon a Liouville-forma, amiből származtatható a vákuum Einstein gravitáció Hamilton-sűrűsége, mely már csak a kanonikus koordinátákat, kanonikus impulzusokat és azok idő-és térderiváltjait fogja tartalmazni. A kanonikus egyenletek levezetéséhez be fogom vezetni a kanonikus változók és az ún. simított Hamiltoni-sűrűség Poisson-zárójeleit. Ezeket az eredményeket 2017-ben előadtam a 10. Bolyai–Gauss–Lobachevsky konferencián Gyöngyösön [32], 2018-ban referált cikkben publikáltuk a Universe folyóiratban [33], illetve 2018 januárjában poszteren mutattam be [34] a Solvay "Sugar2018: Searching for the sources of galactic and extragalactic cosmic rays" konferencián Brüsszelben (Belgium).

A 4. fejezetben az általános relativitáselméleti gömbszimmetrikus fekete lyukak számbavétele után megadom a gravitációs hullámok fénysebességű terjedésével kompatibilis EFT ill. Horndeski elméletek családját. Ezután [27] tárgyalásának mintájára megadok egy általános, de a [27] hivatkozásban tárgyalttól két fontos jellemzőben is

eltérő hatást, mely magába foglalja a megengedhető skalár-tenzor hatásokat. Az egyik eltérés az eredeti változók számának 10-re való csökkentése, a második pedig a fóliázások nem-merőlegességét megadó \mathcal{N} megtartása az egyenletekben. A hatás elsőrendű variációjából levezetem a gömbszimmetrikus, sztatikus skalár-tenzor fekete lyukakat meghatározó dinamikai egyenleteket, melyek az ismeretlen metrikus függvényekre vonatkoznak. Ezek közül három visszaadja az eddig ismert egyenleteket, a negyedik új. Az energia-impulzus tenzor divergenciamentessége biztosítja a skalármező dinamikai egyenletének teljesülését is. Az EFT hatást az Einstein–Hilbert hatásra specifikálva a dinamikai egyenletekből levezettem, hogy a Schwarzschild-téridő az egyetlen megoldás.

Az 5. fejezetben a skalár-tenzor elméletek gömbszimmetrikus és sztatikus fekete lyukainak általános perturbációit kezdem tanulmányozni. Ún. radiális „unitér” mértékrögzítéssel élek, azaz a skalármező szintfelületeivel határozom meg a radiális koordinátát és a diffeomorfizmus mértékszabadság segítségével ezt a tulajdonságot perturbációk megjelenése után is érvényesítem. Azaz a skalármező perturbációja ebben a mértékben nulla. A fennmaradó diffeomorfizmus mértékszabadságokat a perturbációk olyan mértékrögzítésére használom, melynek nyomán elhárul a feketelyuk-perturbációk stabilitásának vizsgálatában felmerült fő probléma, azaz nem marad tetszőleges időfüggvény a megoldásban. Ez megnyitja az utat a feketelyuk-perturbációk páros szektorának a tárgyalásához, melyet a [27] munkában nem sikerült elvégezni a szerzőknek. Ezeket az eredményeket meghívott előadáson mutattam be a Szczeini Egyetem Kozmológia csoportjában [35], valamint a 15. Marcel Grossmann (MG15), University "La Sapienza" of Rome (Olaszország) [36], illetve a FUTURE of Gravitational Alternatives (FUGA), Valencia (Spanyolország) [37] rangos nemzetközi konferenciákon.

A 2+1+1 felbontott általános relativisztikus Hamiltoni dinamikát és a skalár-tenzor elméletek mértékrögzítését tárgyaló szakcikkünket 2019-ben a Physical Review D folyóirat közlésre elfogadta [38], valamint az ezeket szintén ismertető XXXIV. Országos Tudományos Diákköri Konferenciára benyújtott dolgozatom az Elméleti asztrofizika és asztrodinamika tagozat első díját nyerte el [39].

A 6. fejezetben folytatom a skalár-tenzor elméletek perturbációinak tárgyalását. A stabilitási kritériumok általános tárgyalása után az EFT hatás másodrendű variációját vizsgálom, mely meghatározza a perturbációkra vonatkozó fejlődésegyenleteket.

A dolgozatban használt jelölések: a latin- illetve görög indexek absztrakt indexek 4, illetve 3 dimenzióban (azaz csupán a tenzor-jelleget jelölik), a vastag kis- és nagybetűs latin indexek pedig (például \mathbf{i} , illetve \mathbf{A}) 2, illetve 4-dimenziós bázisvektorok nevében jelennek meg.

2. Előzmények

2.1. A nem-merőleges 2+1+1 felbontás

A [29]-es hivatkozásban szereplő munkában kidolgoztam a téridő nem-merőleges 2+1+1 felbontásának formalizmusát. Ezt fogom felhasználni a továbbiakban, ezért kivonatossan ismertetem a lényeges elemeket. A kettős fóliázást a $t = \text{konst.}$ és $\chi = \text{konst.}$ szintfelületek határozzák meg. Előbbinek normálisa n^a , utóbbinak időszerű érintője a

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^a = Nn^a + N^a + \mathcal{N}m^a, \quad (2.1)$$

ahol N a lapse-függvény, N^a a hiperfelületek $\Sigma_{t\chi}$ metszetéhez érintő 2-dimenziós shift-vektor, \mathcal{N} pedig a mind n^a , mind $\Sigma_{t\chi}$ -re merőleges m^a bázisvektor menti harmadik shift-komponens. Megmutatható, hogy ebben a bázisban

$$\left(\frac{\partial}{\partial \chi}\right)^a = Mm^a + M^a \quad (2.2)$$

alakot ölti. Itt M és M^a a radiális lapse-függvény és 2-dimenziós shift-vektor. A metrikus változók számát g_{ab} , a $\Sigma_{t\chi}$ -n indukált metrika egészíti ki 10-re:

$$ds^2 = (N_a N^a + \mathcal{N}^2 - N^2)dt^2 + 2N_a dt dx^a + 2(N_a M^a + \mathcal{N}M) dt d\chi + g_{ab} dx^a dx^b + 2M_a dx^a d\chi + (M_a M^a + M^2) d\chi^2.$$

A fenti összefüggésben x^a jelöli a $\Sigma_{t\chi}$ -n futó koordinátákat (g_{ab} , M^a , N^a projekciós tulajdonságai biztosítják, hogy ilyenből csak kettő van).

A $\Sigma_{t\chi}$ felület beágyazását az n^a és m^a vektorokkal képezett

$$K_{ab} = g^c{}_a g^d{}_b \tilde{\nabla}_c n_d, \quad L_{ab}^* = g^c{}_a g^d{}_b \tilde{\nabla}_c m_d \quad (2.3)$$

külső görbületek, a

$$\mathcal{K}_a = g^b{}_a m^c \tilde{\nabla}_c n_b, \quad \mathcal{L}_a^* = -g^b{}_a n^c \tilde{\nabla}_c m_b \quad (2.4)$$

normális fundamentális formák és a

$$\mathcal{K} = m^a m^b \tilde{\nabla}_a n_b, \quad \mathcal{L}^* = n^a n^b \tilde{\nabla}_a m_b \quad (2.5)$$

normális fundamentális skalárok jellemzik. Ezek kifejezhetők koordinátaderiváltak segítségével:

$$\begin{aligned}
K_{ab} &= \frac{1}{N} \left[\frac{1}{2} \partial_t g_{ab} - D_{(a} N_{b)} \right] - \frac{\mathcal{N}}{MN} \left[\frac{1}{2} \partial_\chi g_{ab} - D_{(a} M_{b)} \right] , \\
L_{ab}^* &= \frac{1}{M} \left[\frac{1}{2} \partial_\chi g_{ab} - D_{(a} M_{b)} \right] , \\
\mathcal{K}^a &= \frac{1}{2MN} (\partial_t M^a - \partial_\chi N^a - N^b D_b M^a + M^b D_b N^a) - \frac{M}{2N} D^a \left(\frac{\mathcal{N}}{M} \right) , \\
\mathcal{K} &= \frac{1}{MN} [\partial_t M - \partial_\chi \mathcal{N} - N^a D_a M + M^a D_a \mathcal{N}] , \\
\mathcal{L}^* &= -\frac{1}{M} [\partial_\chi (\ln N) - M^a D_a (\ln N)] , \tag{2.6}
\end{aligned}$$

továbbá fennáll az

$$\mathcal{L}_a^* = \mathcal{K}_a + \frac{M}{N} D_a \left(\frac{\mathcal{N}}{M} \right) \tag{2.7}$$

összefüggés is. A fenti képletekben a D , illetve $\tilde{\nabla}$ a 2-, illetve 4-dimenziós kovariáns deriváltakat jelölik.

Ezen kívül használjuk még az n^a és m^a vektorok 2-dimenziós

$$\begin{aligned}
\mathbf{a}_a &= g_a^c n^b \tilde{\nabla}_b n_c = D_a (\ln N) , \\
\mathbf{b}_a^* &= g_a^c m^b \tilde{\nabla}_b m_c = -D_a (\ln M) \tag{2.8}
\end{aligned}$$

gyorsulásait is. Megjegyzem itt, hogy a

$$\tilde{\nabla}_b \mathbf{a}^b = \frac{D_a D^a N}{N} + \frac{D^a N D_a M}{NM} , \tag{2.9}$$

$$\tilde{\nabla}_b \mathbf{b}^{*b} = - \left(\frac{D_a D^a M}{M} + \frac{D^a M D_a N}{NM} \right) . \tag{2.10}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{\nabla}_a n^a &= \tilde{g}^{ab} \tilde{\nabla}_a n_b = K + \mathcal{K} , \\
\tilde{\nabla}_a m^a &= \tilde{g}^{ab} \tilde{\nabla}_a m_b = L^* - \mathcal{L}^* \tag{2.11}
\end{aligned}$$

további számolásokhoz hasznos összefüggések.

2.2. Általános relativisztikus gravitációs dinamika

Az általános relativitáselméletben a gravitáció dinamikáját az Einstein-egyenlet adja meg, mely származtatható az

$$S_{EH} = \int d^4x \sqrt{-\tilde{g}} \tilde{R} \tag{2.12}$$

Einstein–Hilbert hatásból, variációs elv felhasználásával. Az itt szereplő \tilde{R} a \tilde{g}_{ab} metrikához rendelt 4-dimenziós görbületi skalár és \tilde{g} a metrika determinánsa. Ennek a hatásnak a 2+1+1 felbontását a kétszer kontrahált Gauss-azonosság segítségével és a

$$\sqrt{-\tilde{g}} = NM\sqrt{g} \quad (2.13)$$

összefüggés (itt g a 2-dimenziós indukált metrika determinánsa) felhasználásával korábban már elvégeztem [29]:

$$\begin{aligned} S_{EH} &= S_{EH} [\{g_{ab}, M^a, M\}; \{K_{ab}, \mathcal{K}^a, \mathcal{K}\}; \{L_{ab}^*, \mathcal{L}^*\}; \{N, N^a, \mathcal{N}\}] \\ &= \int dt \int d\chi \int_{\Sigma_{t\chi}} d^2x NM\sqrt{g} \{R + K_{ab}K^{ab} + K^2 - (L^*)^2 \\ &\quad - L_{ab}^*L^{*ab} + 2\mathcal{K}^a\mathcal{K}_a + 2\mathcal{K}(K + \mathcal{K}) - 2\mathcal{L}^*(\mathcal{L}^* - L^*) \\ &\quad + 2\tilde{\mathfrak{L}}_{\mathbf{n}}(K + \mathcal{K}) - 2\tilde{\mathfrak{L}}_{\mathbf{m}}(L^* - \mathcal{L}^*) \\ &\quad - 2[N^{-1}D_aD^aN + M^{-1}D_aD^aM + (NM)^{-1}D^aMD_aN]\} , \quad (2.14) \end{aligned}$$

ahol $\tilde{\mathfrak{L}}_{\mathbf{v}}$ a V^a kongruencia menti Lie-deriválást jelöli és R a g_{ab} indukált metrikához rendelt 2-dimenziós görbületi skalár. Ebben a hatásban kizárólag a $\Sigma_{t\chi}$ -n értelmezett tenzorok, vektorok és skalárok szerepelnek.

A következőkben áttérek az új kutatási eredmények ismertetésére.

3. Hamiltoni fejlődés az általános relativitáselméletben

Ebben a fejezetben kidolgozom az általános relativitáselméletbeli gravitációs hamiltoni dinamikának a 2+1+1 felbontott alakját. Az einsteini gravitáció hamiltoni dinamikája 3+1 alakban ismert, azonban kitüntetett térbeli irány jelenléte esetén (ilyen a gömbszimmetrikus fekete lyukak esetében a radiális irány), a 2+1+1 felbontás indokolt és hasznos. Előzményként rendelkezésre állt a merőleges kettős fóliázás alapján kidolgozott [31] hamiltoni formalizmus, azonban ebben az egyik diffeomorfizmus szabadsági fok a merőlegesség miatt hiányzik, és ez perturbációk tárgyalásakor a mérték egyértelmű rögzítését lehetetlenné teszi. A problémát megoldja a fejezetben ismertetett hamiltoni tárgyalás, mely visszaállítja a teljes diffeomorfizmus-szabadságot.

Ezt a munkát a Universe folyóiratban kivonatosan ismertettük [33], részletes bemutatása nemzetközi referált publikációban pedig folyamatban van [38].

3.1. Általánosított koordináták és impulzusok

A (2.14) hatást a (2.9), (2.10), (2.11) és az

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{L}}_{\mathbf{n}}(K + \mathcal{K}) &= n^a \tilde{\nabla}_a (K + \mathcal{K}) = \tilde{\nabla}_a (n^a (K + \mathcal{K})) - (K + \mathcal{K})^2, \\ \tilde{\mathcal{L}}_{\mathbf{m}}(L^* - \mathcal{L}^*) &= m^a \tilde{\nabla}_a (L^* - \mathcal{L}^*) = \tilde{\nabla}_a (m^a (L^* - \mathcal{L}^*)) - (L^* - \mathcal{L}^*)^2\end{aligned}\quad (3.1)$$

összefüggések felhasználásával az

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^G &= NM\sqrt{g} \left\{ R + K_{ab}K^{ab} - K^2 - 2K\mathcal{K} + 2\mathcal{K}^a\mathcal{K}_a - L_{ab}^*L^{*ab} + L^{*2} \right. \\ &\quad \left. - 2\mathcal{L}^*L^* + 2(NM)^{-1} D^a M D_a N - 2\tilde{\nabla}_a [\alpha^a - \beta^{*a} - n^a K + m^a L^*] \right\}\end{aligned}\quad (3.2)$$

kovariáns 4-es divergenciát tartalmazó alakra lehet hozni. A (g_{ab}, M^a, M) változókhoz tartozó

$$\begin{aligned}\pi^{ab} &= \frac{\partial \mathcal{L}^G}{\partial \dot{g}^{ab}} = \sqrt{g}M [K^{ab} - g^{ab}(K + \mathcal{K})], \\ p_a &= \frac{\partial \mathcal{L}^G}{\partial \dot{M}^a} = 2\sqrt{g}\mathcal{K}_a, \\ p &= \frac{\partial \mathcal{L}^G}{\partial \dot{M}} = -2\sqrt{g}K\end{aligned}\quad (3.3)$$

kanonikus impulzusok levezetésekor az időderiváltak azonosításához a (2.6) összefüggéseket használtam, valamint a 4-es divergenciákkal nem foglalkoztam, hiszen ezek a dinamikát nem befolyásoló határtagokat adnak. A többi metrikus változónak (N , N^a , \mathcal{N}) az időderiváltja nem szerepel a (3.2) Lagrange-sűrűségben, így ezekhez tartozó impulzusok eltűnnek.

3.2. Liouville-forma és kényszerek

A Lagrange-sűrűséget olyan alakban szeretném felírni, hogy előálljon a Liouville-forma, azaz a metrikus változók (g_{ab} , M^a , M) időderiváltjait a megfelelő impulzusok által szorzott kifejezés. Ehhez a Lagrange-sűrűség általánosított sebességeket tartalmazó tagjait formálisan szorzom egy $(2 - 1)$ szorzóval, majd ezeket szétválasztom, miközben a görbületi skalárt, a metrikának csak a térderiváltját tartalmazó mennyiségeket (L_{ab}^* , \mathcal{L}^*), a D -deriváltat tartalmazó tagokat és a teljes deriváltat változatlan formában megtartom:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^G = & NM\sqrt{g}2K_{ab} [K^{ab} - g^{ab} (g_{cd}K^{cd} + \mathcal{K})] - NM\sqrt{g}K_{ab} [K^{ab} - g^{ab} (g_{cd}K^{cd} + \mathcal{K})] \\ & + NM\sqrt{g}4\mathcal{K}_a\mathcal{K}^a - NM\sqrt{g}2\mathcal{K}_a\mathcal{K}^a - NM\sqrt{g}2K\mathcal{K} + NM\sqrt{g}K\mathcal{K} \\ & + NM\sqrt{g} [R - L_{ab}^*L^{*ab} + L^{*2} - 2L^*\mathcal{L}^*] + 2\sqrt{g}D^aND_aM \\ & - 2NM\sqrt{g}\tilde{\nabla}_a(\alpha^a - \beta^{*a} - Kn^a + L^*m^a) . \end{aligned} \quad (3.4)$$

A megkétszerezett tagokba visszahelyettesítem a K_{ab} , \mathcal{K}^a , \mathcal{K} mennyiségek olyan alakját, melyben a dinamikai metrikus változók (g_{ab} , M^a , M) időderiváltjai, továbbá N , N^a , \mathcal{N} szerepelnek és a következőt kapom:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^G = & M\sqrt{g} [K^{ab} - g^{ab} (K + \mathcal{K})] \dot{g}_{ab} + 2\sqrt{g}\mathcal{K}_a\dot{M}^a - 2\sqrt{g}K\dot{M} \\ & + A_N + A_{N_a} + A_{\mathcal{N}} \\ & - 2NM\sqrt{g}\tilde{\nabla}_a(\alpha^a - \beta^{*a} - Kn^a + L^*m^a) + 2\sqrt{g}D^a(ND_aM) \end{aligned} \quad (3.5)$$

ahol

$$\begin{aligned}
A_N &= -N\sqrt{g} \left\{ -M \left(R - L_{ab}^* L^{*ab} + L^{*2} - 2L^* \mathcal{L}^* \right) \right. \\
&\quad \left. + M \left[K_{ab} K^{ab} - K^2 - 2K\mathcal{K} + 2\mathcal{K}_a \mathcal{K}^a \right] + 2 \left(D^a D_a M \right) \right\} , \\
A_{N_a} &= -2M\sqrt{g} D_{(a} N_{b)} \left[K^{ab} - g^{ab} (K + \mathcal{K}) \right] + 2\sqrt{g} \mathcal{K}_a \left(-\partial_\chi N^a \right. \\
&\quad \left. - N^b D_b M^a + M^b D_b N^a \right) + 2\sqrt{g} K N^a D_a M , \\
A_{\mathcal{N}} &= -\sqrt{g} \left[\mathcal{N} \left(\partial_\chi g_{ab} - 2D_{(a} M_{b)} \right) \right] \left[K^{ab} - g^{ab} (K + \mathcal{K}) \right] \\
&\quad - 2M^2 \sqrt{g} \mathcal{K}_a D^a \left(\frac{\mathcal{N}}{M} \right) + 2\sqrt{g} K \left(\partial_\chi \mathcal{N} - M^a D_a \mathcal{N} \right) . \tag{3.6}
\end{aligned}$$

Az A_N járulék tovább alakítható a (2.6), a

$$\begin{aligned}
\delta g^{ab} &= -g^{ac} g^{bd} \delta g_{cd} , \\
\delta \sqrt{g} &= \frac{1}{2} \sqrt{g} g^{ab} \delta g_{ab} , \\
\delta (\sqrt{g} g^{ab}) &= \sqrt{g} \delta g_{cd} \left(\frac{1}{2} g^{ab} g^{cd} - g^{ac} g^{bd} \right) \tag{3.7}
\end{aligned}$$

és a

$$\begin{aligned}
\partial_\chi g_{ab} &= 2M L_{ab}^* + 2D_{(a} M_{b)} , \\
\mathfrak{L}_{\mathbf{M}} g_{ab} &= 2D_{(a} M_{b)} , \\
(\partial_\chi - \mathfrak{L}_{\mathbf{M}}) g_{ab} &= 2M L_{ab}^* . \tag{3.8}
\end{aligned}$$

összefüggések felhasználásával:

$$A_N = -N \mathcal{H}_\perp^G + 2 (\partial_\chi - \mathfrak{L}_{\mathbf{M}}) (\sqrt{g} N L^*) , \tag{3.9}$$

ahol

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_\perp^G &= \sqrt{g} \left\{ -M \left(R + 3L^{*ab} L_{ab}^* - L^{*2} \right) + M \left[K_{ab} K^{ab} - K^2 - 2K\mathcal{K} + 2\mathcal{K}_a \mathcal{K}^a \right] \right. \\
&\quad \left. + 2g^{ab} (\partial_\chi - \mathfrak{L}_{\mathbf{M}}) L_{ab}^* + 2 \left(D^a D_a M \right) \right\} \tag{3.10}
\end{aligned}$$

az ún. hamiltoni kényszer 2+1+1 felbontott alakja [31]. Megjegyzem, hogy tetszőleges $\mathcal{F} = f\sqrt{g}$ skalársűrűségek Lie-deriváltjára az $\mathfrak{L}_{\mathbf{M}} \mathcal{F} = D_a (\mathcal{F} M^a)$ összefüggés vonatkozik, így a Lie-deriváltas tag is egy határtag. Ezt következőképpen látjuk be:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{L}_{\mathbf{M}} \sqrt{g} &= \frac{1}{2} \sqrt{g} g^{ab} \mathfrak{L}_{\mathbf{M}} g_{ab} \\
&= \sqrt{g} g^{ab} D_{(a} M_{b)} = \sqrt{g} g^{ab} D_a M_b = D_a (\sqrt{g} M^a) , \\
\mathfrak{L}_{\mathbf{M}} (f\sqrt{g}) &= f \mathfrak{L}_{\mathbf{M}} \sqrt{g} + \sqrt{g} \mathfrak{L}_{\mathbf{M}} f = f D_a (\sqrt{g} M^a) + \sqrt{g} M^a D_a f = D_a (f\sqrt{g} M^a)
\end{aligned}$$

Az A_{N_a} járulék átalakításhoz a

$$D_a M^a = \frac{1}{2} g^{ab} \partial_\chi g_{ab} - M L^* = \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_\chi \sqrt{g} - M L^* \quad (3.11)$$

összefüggést felhasználva:

$$\begin{aligned} A_{N_a} = & -N^a \mathcal{H}_a^G - 2\sqrt{g} D_a (M N_b K^{ab}) + 2\sqrt{g} D_a [M N^a (K + \mathcal{K})] \\ & - 2\partial_\chi (\sqrt{g} \mathcal{K}^a N_a) + 2\sqrt{g} D_b (N^a \mathcal{K}_a M^b) , \end{aligned} \quad (3.12)$$

ahol

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_a^G = & -2\sqrt{g} \{ D_b [K^b_a M - M g^b_a (K + \mathcal{K})] + K D_a M \\ & + \mathcal{K}_a M L^* + (\partial_\chi - \mathfrak{L}_M) \mathcal{K}_a \} \end{aligned} \quad (3.13)$$

az ún. kétdimenziós impulzuskényszer 2+1+1 felbontott alakja [31]. Mind a hamiltoni, mind a diffeomorfizmus kényszer funkcionális alakja megegyezik a merőleges felbontásban találttal, azonban a bennük szereplő mennyiségeknek a nem-merőleges felbontásból eredően van \mathcal{N} -t tartalmazó járuléka is.

Végül az $A_{\mathcal{N}}$ járulékhhoz a (3.8) és a

$$\begin{aligned} \partial_\chi \sqrt{g} &= \sqrt{g} g^{ab} (M L^*_{ab} + D_{(a} M_{b)}) , \\ \mathfrak{L}_M \sqrt{g} &= D_a (\sqrt{g} M^a) , \\ (\partial_\chi - \mathfrak{L}_M) \sqrt{g} &= \sqrt{g} M L^* \end{aligned} \quad (3.14)$$

összefüggéseket felhasználva:

$$A_{\mathcal{N}} = -\mathcal{N} \mathcal{H}_{\mathcal{N}}^G - 2\sqrt{g} D_a (\mathcal{N} \mathcal{K}^a M) + 2 (\partial_\chi - \mathfrak{L}_M) (\sqrt{g} K \mathcal{N}) , \quad (3.15)$$

ahol

$$\mathcal{H}_{\mathcal{N}}^G = -2\sqrt{g} \left\{ M [L^* \mathcal{K} - L^*_{ab} K^{ab}] + \frac{1}{M} D_a (M^2 \mathcal{K}^a) - (\partial_\chi - \mathfrak{L}_M) K \right\} \quad (3.16)$$

a kiválasztott térbeli irányhoz tartozó új impulzuskényszer, melynek nem volt megfelelője az [31]-ben tárgyalt merőleges 2+1+1 felbontásban.

A Lagrange-sűrűség az eddigi átalakítások után az

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^G = & M \sqrt{g} [K^{ab} - g^{ab} (K + \mathcal{K})] \dot{g}_{ab} + 2\sqrt{g} \mathcal{K}_a \dot{M}^a - 2\sqrt{g} K \dot{M} \\ & - N \mathcal{H}_\perp^G - N^a \mathcal{H}_a^G - \mathcal{N} \mathcal{H}_{\mathcal{N}}^G + Q \end{aligned} \quad (3.17)$$

alakot veszi fel, ahol

$$\begin{aligned}
Q = & 2(\partial_\chi - \mathfrak{L}_M)(\sqrt{g}NL^*) - 2\partial_\chi(\sqrt{g}\mathcal{K}^aN_a) + 2(\partial_\chi - \mathfrak{L}_M)(\sqrt{g}KN) \\
& - 2\sqrt{g}D_a(MN_bK^{ab}) + 2\sqrt{g}D_a[MN^a(K + \mathcal{K})] + 2\sqrt{g}D^a(ND_aM) \\
& + 2\sqrt{g}D_b(\mathcal{K}^aN_aM^b) - 2\sqrt{g}D_a(\mathcal{N}\mathcal{K}^aM) \\
& - 2NM\sqrt{g}\tilde{\nabla}_a(\alpha^a - \beta^{*a} - Kn^a + L^*m^a)
\end{aligned} \tag{3.18}$$

határtagok összege, amivel a továbbiakban foglalkozok részletesen.

3.3. A határtagok tárgyalása

A meglévő teljes deriváltakat tovább kell $2 + 1 + 1$ bontani, és ki kell fejteni az M^a irányú Lie-deriváltakat újabb teljes deriváltakká. A

$$\begin{aligned}
Q = & 2\partial_\chi[\sqrt{g}(NL^* - N_a\mathcal{K}^a + \mathcal{N}K)] + 2\sqrt{g}D_a\{N(D^aM - M^aL^*) \\
& + N^b[M^a\mathcal{K}_b - MK_b^a + g_b^aM(K + \mathcal{K})] - \mathcal{N}(M\mathcal{K}^a + M^aK)\} \\
& - 2NM\sqrt{g}\tilde{\nabla}_a(\alpha^a - \beta^{*a} - Kn^a + L^*m^a) .
\end{aligned} \tag{3.19}$$

összefüggésben az első két sor már $2+1+1$ alakban található. Az utolsó sor felbontásához vezessük be a

$$2T = -2NM\sqrt{g}\tilde{\nabla}_a(\alpha^a - \beta^{*a} - Kn^a + L^*m^a)$$

jelölést. Az

$$\begin{aligned}
\alpha^a - \beta^{*a} &= D^a \ln(NM) - m^a\mathcal{L}^* - n^a\mathcal{K} , \\
D_a n^a &= K , \\
D_a m^a &= L^* , \\
\tilde{\nabla}_a n^a &= K + \mathcal{K} , \\
\tilde{\nabla}_a m^a &= L^* + \mathcal{L}^* , \\
\alpha_a n^a &= \left(g_a^b n^c \tilde{\nabla}_c n_b - m_a \mathcal{L}^*\right) n^a = 0 , \\
\alpha_a m^a &= \left(g_a^b n^c \tilde{\nabla}_c n_b - m_a \mathcal{L}^*\right) m^a = -\mathcal{L}^* , \\
\beta_a^* m^a &= \left(g_a^b m^c \tilde{\nabla}_c m_b - n_a \mathcal{K}\right) m^a = 0 , \\
\beta_a^* n^a &= \left(g_a^b m^c \tilde{\nabla}_c m_b - n_a \mathcal{K}\right) m^a = -\mathcal{K} ,
\end{aligned} \tag{3.20}$$

továbbá a

$$\begin{aligned} n^b \tilde{\nabla}_b &= \frac{1}{N} \left[\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\mathcal{N}}{M} \frac{\partial}{\partial \chi} - \left(N^b - \frac{\mathcal{N}}{M} M^b \right) D_b \right] , \\ m^b \tilde{\nabla}_b &= \frac{1}{M} \left[\frac{\partial}{\partial \chi} - M^b D_b \right] , \end{aligned} \quad (3.21)$$

könnyen levezethető összefüggések felhasználásával:

$$\begin{aligned} 2T &= NM\sqrt{g}(K + \mathcal{K})^2 - NM\sqrt{g}(L^* - \mathcal{L}^*)^2 \\ &\quad - \sqrt{g}D_a D^a(NM) + T_K - T_L , \end{aligned} \quad (3.22)$$

ahol

$$\begin{aligned} T_K &= NM\sqrt{g} \frac{1}{N} \left[\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\mathcal{N}}{M} \frac{\partial}{\partial \chi} - \left(N^b - \frac{\mathcal{N}}{M} M^b \right) D_b \right] (K + \mathcal{K}) , \\ T_L &= NM\sqrt{g} \frac{1}{M} \left[\frac{\partial}{\partial \chi} - M^b D_b \right] (L^* - \mathcal{L}^*) . \end{aligned} \quad (3.23)$$

A következőkben bemutatom, hogy ez teljes t , χ és D -deriváltak összege. Ehhez a

$$\begin{aligned} K_{ab} &= \frac{1}{N} \left[\frac{1}{2} \partial_t g_{ab} - D_{(a} N_{b)} \right] - \frac{\mathfrak{s}}{M\mathfrak{c}} \left[\frac{1}{2} \partial_\chi g_{ab} - D_{(a} M_{b)} \right] , \\ L_{ab}^* &= \frac{1}{M} \left[\frac{1}{2} \partial_\chi g_{ab} - D_{(a} M_{b)} \right] , \\ \frac{1}{2} \partial_t g_{ab} &= NK_{ab} + \mathcal{N}L_{ab}^* + D_{(a} N_{b)} , \\ \frac{\partial}{\partial t} \sqrt{g} &= \frac{1}{2} \sqrt{g} g^{ab} \frac{\partial}{\partial t} g_{ab} = \sqrt{g} [NK + \mathcal{N}L^* + D_a N^a] , \\ \frac{\partial}{\partial t} M &= MN\mathcal{K} + \frac{\partial \mathcal{N}}{\partial \chi} + N^a D_a M - M^a D_a \mathcal{N} , \\ \partial_\chi \sqrt{g} &= \sqrt{g} g^{ab} (ML_{ab}^* + D_{(a} M_{b)}) \end{aligned} \quad (3.24)$$

összefüggések felhasználásával belátom, hogy

$$\begin{aligned} T_K &= \frac{\partial}{\partial t} [\sqrt{g}M(K + \mathcal{K})] - \frac{\partial}{\partial \chi} [\sqrt{g}\mathcal{N}(K + \mathcal{K})] \\ &\quad - \sqrt{g}D_a [(N^a M - \mathcal{N}M^a)(K + \mathcal{K})] - \sqrt{g}NM(K + \mathcal{K})^2 . \end{aligned} \quad (3.25)$$

Hasonlóan a

$$\partial_\chi N = M^a D_a N - NM\mathcal{L}^*$$

átrendezésből előáll a

$$T_L = \frac{\partial}{\partial \chi} [\sqrt{g}N(L^* - \mathcal{L}^*)] - \sqrt{g}D_a [NM^a(L^* - \mathcal{L}^*)] - \sqrt{g}NM(L^* - \mathcal{L}^*)^2 . \quad (3.26)$$

A négyesdivergencia 2+1+1 felbontása tehát a várt alakú lett:

$$T = \mathcal{L}_t^G + \mathcal{L}_\chi^G + \mathcal{L}_D^G . \quad (3.27)$$

ahol

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_t^G &= \frac{\partial}{\partial t} [\sqrt{g}M (K + \mathcal{K})] , \\ \mathcal{L}_\chi^G &= -\frac{\partial}{\partial \chi} \{ \sqrt{g} [\mathcal{N} (K + \mathcal{K}) + N (L^* - \mathcal{L}^*)] \} , \\ \mathcal{L}_D^G &= -\sqrt{g}D_a \{ D^a (NM) + (N^a M - \mathcal{N}M^a) (K + \mathcal{K}) - NM^a (L^* - \mathcal{L}^*) \} . \end{aligned}$$

3.4. A Lagrange-sűrűség Liouville-formát, kényszereket és hártartagokat tartalmazó alakja

Az áttekinthetőség kedvéért összefoglalom az eddigi számolások eredményeit. A Lagrange-sűrűség:

$$\mathcal{L}^G = \pi^{ab} \dot{g}_{ab} + p_a \dot{M}^a + p \dot{M} - N \mathcal{H}_\perp^G - N^a \mathcal{H}_a^G - \mathcal{N} \mathcal{H}_\mathcal{N}^G + \mathcal{L}_t^G + \mathcal{L}_\chi^G + \mathcal{L}_D^G , \quad (3.28)$$

ahol

$$\begin{aligned} \pi^{ab} &= \frac{\partial \mathcal{L}^G}{\partial \dot{g}_{ab}} = \sqrt{g}M [K^{ab} - g^{ab} (K + \mathcal{K})] , \\ p_a &= \frac{\partial \mathcal{L}^G}{\partial \dot{M}^a} = 2\sqrt{g}\mathcal{K}_a , \\ p &= \frac{\partial \mathcal{L}^G}{\partial \dot{M}} = -2\sqrt{g}K \end{aligned} \quad (3.29)$$

a kanonikus impulzusok,

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_\perp^G &= \sqrt{g} \{ -M (R + 3L^{*ab}L_{ab}^* - L^{*2}) + M [K_{ab}K^{ab} + 2\mathcal{K}_a\mathcal{K}^a - K^2 - 2K\mathcal{K}] \\ &\quad + 2g^{ab}\partial_\chi L_{ab}^* - 2 (M^c D_c L^* + 2L_{ab}^* D^a M^b) + 2D^a D_a M \} , \\ \mathcal{H}_a^G &= -2\sqrt{g} \{ D_b [K_a^b M - M g_a^b (K + \mathcal{K})] + K D_a M \\ &\quad + \mathcal{K}_a M L^* + \partial_\chi \mathcal{K}_a - M^b D_b \mathcal{K}_a - \mathcal{K}_b D_a M^b \} , \\ \mathcal{H}_\mathcal{N}^G &= -2\sqrt{g} \{ M [L^* \mathcal{K} - L_{ab}^* K^{ab}] + M D_a \mathcal{K}^a \\ &\quad + 2\mathcal{K}^a D_a M - \partial_\chi K + M^a D_a K \} \end{aligned} \quad (3.30)$$

a hamiltoni, illetve diffeomorfizmus-kényszerek, végül

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_t^G &= 2\partial_t [\sqrt{g}M(K + \mathcal{K})] , \\
\mathcal{L}_\chi^G &= 2\partial_\chi [\sqrt{g}(N\mathcal{L}^* - N_a\mathcal{K}^a - \mathcal{N}\mathcal{K})] , \\
\mathcal{L}_D^G &= -2\sqrt{g}D_a [MD^aN + NM^a\mathcal{L}^* \\
&\quad + N^b(MK^a_b - M^a\mathcal{K}_b) + \mathcal{N}(M\mathcal{K}^a - M^a\mathcal{K})]
\end{aligned} \tag{3.31}$$

a határtagokat eredményező teljes deriváltak.

3.5. A Hamilton-sűrűség

A Lagrange-sűrűség fenti alakjából, a Legendre-transzformáció figyelembe vételével, leolvasható a vákuum Einstein gravitáció Hamilton-sűrűsége:

$$\mathcal{H}^G = N\mathcal{H}_\perp^G + N^a\mathcal{H}_a^G + \mathcal{N}\mathcal{H}_\mathcal{N}^G ,$$

mint a hamiltoni és impulzuskényszerek lapse-függvénnyel és a 3-dimenziós shift-vektor komponenseivel képezett lineáris kombinációja. Egyetlen lépés maradt a hamiltoni formalizmusra való áttéréshez, mégpedig a $(K^{ab}, \mathcal{K}_a, \mathcal{K})$ általánosított sebességek kifejezése a (π^{ab}, p_a, p) általánosított impulzusokkal:

$$\begin{aligned}
K^{ab} &= \frac{1}{M\sqrt{g}} \left(\pi^{ab} - \frac{\pi}{2}g^{ab} \right) - \frac{p}{4\sqrt{g}}g^{ab} , \\
\mathcal{K}_a &= \frac{1}{2\sqrt{g}}p_a , \\
\mathcal{K} &= \frac{1}{4\sqrt{g}} \left(p - \frac{2\pi}{M} \right) .
\end{aligned} \tag{3.32}$$

Ezek visszahelyettesítése a Hamilton-sűrűségbe, azaz a kényszerekbe a

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_\perp^G &= \sqrt{g} \left[-M(R + 3L^{*ab}L_{ab}^* - L^{*2}) + 2g^{ab}(\partial_\chi - \mathfrak{L}_\mathbf{M})L_{ab}^* + 2D^aD_aM \right] \\
&\quad + \frac{M}{\sqrt{g}} \left[\frac{1}{M^2} \left(\pi_{ab}\pi^{ab} - \frac{\pi^2}{2} \right) + \frac{1}{2}p_ap^a + \frac{1}{8}p^2 - \frac{\pi p}{2M} \right] , \\
\mathcal{H}_a^G &= -2D_b\pi_a^b + pD_aM - (\partial_\chi - \mathfrak{L}_\mathbf{M})p_a , \\
\mathcal{H}_\mathcal{N}^G &= 2L_{ab}^*\pi^{ab} - 2p^aD_aM - MD_ap^a - (\partial_\chi - \mathfrak{L}_\mathbf{M})p
\end{aligned} \tag{3.33}$$

kifejezéseket adja.

Hasonló módon írhatók át a határtagok is a kanonikus változók segítségével:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_t^G &= -\partial_t \left(\pi + \frac{Mp}{2} \right) , \\
\mathcal{L}_\chi^G &= \partial_\chi \left[2\sqrt{g}N\mathcal{L}^* - N_a p^a + \mathcal{N} \left(\frac{\pi}{M} - \frac{p}{2} \right) \right] , \\
\mathcal{L}_D^G &= -D_a \left\{ 2\sqrt{g} \left(MD^a N + NM^a \mathcal{L}^* \right) + N^b \left[2\pi^a{}_b - \left(\pi + \frac{Mp}{2} \right) g^a{}_b - M^a p_b \right] \right. \\
&\quad \left. + \mathcal{N} \left[Mp^a + M^a \left(\frac{\pi}{M} - \frac{p}{2} \right) \right] \right\} . \tag{3.34}
\end{aligned}$$

A kényszerektől eltérően ezekben megjelennek \mathcal{N} -nel arányos új járulékok is.

3.6. A kanonikus koordináták időfejlődése

A kanonikus koordináták időderiváltjait megkaphatjuk egyszerűen, ha invertáljuk a

$$\begin{aligned}
K_{ab} &= \frac{1}{N} \left[\frac{1}{2} \partial_t g_{ab} - D_{(a} N_{b)} \right] - \frac{\mathfrak{s}}{M\mathfrak{c}} \left[\frac{1}{2} \partial_\chi g_{ab} - D_{(a} M_{b)} \right] , \\
\mathcal{K}^a &= \frac{1}{2MN} \left(\partial_t M^a - \partial_\chi N^a - N^b D_b M^a + M^b D_b N^a \right) - \frac{M}{2N} D^a \left(\frac{\mathcal{N}}{M} \right) , \\
\mathcal{K} &= \frac{1}{MN} \left[\partial_t M - \partial_\chi \mathcal{N} - N^a D_a M + M^a D_a \mathcal{N} \right] \tag{3.35}
\end{aligned}$$

kanonikus sebességekre vonatkozó összefüggéseket:

$$\begin{aligned}
\partial_t g_{ab} &= 2NK_{ab} + 2D_{(a} N_{b)} + \frac{\mathcal{N}}{M} \left(\partial_\chi g_{ab} - 2D_{(a} M_{b)} \right) , \\
\partial_t M^a &= 2MN\mathcal{K}^a + \partial_\chi N^a + N^b D_b M^a - M^b D_b N^a + M^2 D^a \left(\frac{\mathcal{N}}{M} \right) , \\
\partial_t M &= MN\mathcal{K} + \partial_\chi \mathcal{N} + N^a D_a M - M^a D_a \mathcal{N} ,
\end{aligned}$$

majd a (3.3)-ban szereplő kanonikus impulzusokat behelyettesítve:

$$\begin{aligned}
\dot{g}_{ab} &= \frac{N}{M\sqrt{g}} \left[2\pi_{ab} - \left(\pi + \frac{Mp}{2} \right) g_{ab} \right] + \mathfrak{L}_N g_{ab} + \frac{\mathcal{N}}{M} \left(\partial_\chi - \mathfrak{L}_M \right) g_{ab} , \\
\dot{M}^a &= \frac{MN}{\sqrt{g}} p^a + \left(\partial_\chi - \mathfrak{L}_M \right) N^a + MD^a \mathcal{N} - \mathcal{N} D^a M , \\
\dot{M} &= \frac{MN}{4\sqrt{g}} \left(p - \frac{2\pi}{M} \right) + \mathfrak{L}_N M + \left(\partial_\chi - \mathfrak{L}_M \right) \mathcal{N} . \tag{3.36}
\end{aligned}$$

Ezzel megkaptuk a hamiltoni mozgásegyenletek egyik felét, melyek a kanonikus koordinátákra vonatkoznak.

3.7. A Poisson-zárójel és a kanonikus egyenletek

A fenti összefüggések a kanonikus egyenletekből is származtathatók. Ehhez azonban először be kell vezetni a Poisson-zárójelét. A kanonikus változókra bevezetjük a $g^A \equiv \{g_{ab}, M^a, M\}$, a kanonikus impulzusokra a $\pi_A \equiv \{\pi^{ab}, p_a, p\}$, a $\Sigma_{t\chi}$ -hez adaptált koordinátákra pedig az $y = \{y^1, y^2\}$ rövidített jelöléseket. Két tetszőleges $f(\chi, y) \equiv f(\chi, y; g^A(\chi, y), \pi_B(\chi, y))$ és $h(\chi, y) \equiv h(\chi, y; g^A(\chi, y), \pi_B(\chi, y))$ függvény Poisson-zárójele ekkor:

$$\{f(\chi, y), h(\chi', y')\} = \int d\chi'' \int dy'' \left(\frac{\delta f(\chi, y)}{\delta g^C(\chi'', y'')} \frac{\delta h(\chi', y')}{\delta \pi_C(\chi'', y'')} - \frac{\delta f(\chi, y)}{\delta \pi_C(\chi'', y'')} \frac{\delta h(\chi', y')}{\delta g^C(\chi'', y'')} \right).$$

Az integrálokat mindig az adott változó teljes tartományára értjük. Könnyen belátható, hogy a kanonikus párok a

$$\begin{aligned} \{g^A(\chi, y), g^B(\chi', y')\} &= 0, \\ \{\pi_A(\chi, y), \pi_B(\chi', y')\} &= 0, \\ \{g^A(\chi, y), \pi_B(\chi', y')\} &= \delta_B^A \delta(\chi - \chi') \delta(y - y') \end{aligned}$$

összefüggéseket teljesítik. A kanonikus egyenleteket a kanonikus változók és az ún. simított Hamilton-sűrűség Poisson-zárójelként képezzük. A simított Hamilton-sűrűség a Hamilton-sűrűség összetevőinek simított térbeli integráljai összegeként képezzük:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^G[N, N^a, \mathcal{N}] &= \mathcal{H}_\perp^G[N] + \mathcal{H}_a^G[N^a] + \mathcal{H}_\mathcal{N}^G[\mathcal{N}], \\ \mathcal{H}_\perp^G[N] &= \int d\chi \int dy N(\chi, y) \mathcal{H}_\perp^G(\chi, y), \\ \mathcal{H}_a^G[N^a] &= \int d\chi \int dy N^a(\chi, y) \mathcal{H}_a^G(\chi, y), \\ \mathcal{H}_\mathcal{N}^G[\mathcal{N}] &= \int d\chi \int dy \mathcal{N}(\chi, y) \mathcal{H}_\mathcal{N}^G(\chi, y). \end{aligned}$$

A kanonikus egyenletek, tehát

$$\begin{aligned} \dot{g}^A &\equiv \{g^A(\chi, y), \mathcal{H}^G\} = \frac{\delta \mathcal{H}^G[N, N^a, \mathcal{N}]}{\delta \pi_A(\chi, y)}, \\ \dot{\pi}_A &\equiv \{\pi_A(\chi, y), \mathcal{H}^G\} = -\frac{\delta \mathcal{H}^G[N, N^a, \mathcal{N}]}{\delta g^A(\chi, y)}. \end{aligned}$$

A metrikára vonatkozó mozgásegyenlet a Poisson-zárójeléből:

$$\dot{g}_{cd} = \frac{\delta \mathcal{H}^G[N, N^a, \mathcal{N}]}{\delta \pi^{cd}(\chi, y)} = \frac{N}{\sqrt{g}} \left[\frac{1}{M} (2\pi_{cd} - g_{cd}\pi) - \frac{1}{2} g_{cd} p \right] + 2D_{(c} N_{d)} + 2\mathcal{N} L_{cd}^*, \quad (3.37)$$

ami pontosan a keresett összefüggés. Hasonlóan reprodukálható a másik két kanonikus koordináta időfejlődése is:

$$\begin{aligned}\dot{M}^c &= \frac{\delta\mathcal{H}^G[N, N^a, \mathcal{N}]}{\delta p_c(\chi, y)} = N \frac{M}{\sqrt{g}} p^c + (\partial_\chi - \mathfrak{L}_M) N^c - \mathcal{N} D^c M + M D^c \mathcal{N} , \\ \dot{M} &= \frac{\delta\mathcal{H}^G[N, N^a, \mathcal{N}]}{\delta p(\chi, y)} = \frac{N}{2\sqrt{g}} \left(\frac{1}{2} M p - \pi \right) + \mathfrak{L}_M M + (\partial_\chi - \mathfrak{L}_M) \mathcal{N} .\end{aligned}\quad (3.38)$$

A kanonikus impulzusok időfejlődésének számolása bár egy kicsit bonyolultabb, hosszadalmas, de továbbra is az előzőek mintájára történt. Az impulzus tenzorra vonatkozó mozgásegyenlet:

$$\begin{aligned}\dot{\pi}^{cd} &= -\frac{\delta\mathcal{H}^G[N, N^a, \mathcal{N}]}{\delta g_{cd}(\chi, y)} \\ &= N \mathcal{S}^{cd} + N \mathcal{V}^{cd} + \mathfrak{L}_M \pi^{cd} \\ &\quad - N M \sqrt{g} \mathcal{L}^* (L^{*cd} - g^{cd} L^*) + \sqrt{g} g^{cd} (\partial_\chi - \mathfrak{L}_M) (N \mathcal{L}^*) \\ &\quad + \sqrt{g} [M D^d D^c N - g^{cd} M D_a D^a N - g^{cd} (D_a M) (D^a N)] \\ &\quad + \frac{\mathcal{N}}{M} (\partial_\chi - \mathfrak{L}_M) \pi^{cd} - \left[\frac{\mathcal{N} \pi^{cd}}{M^2} (\partial_\chi - \mathfrak{L}_M) + \mathcal{N} p^{(c} D^{d)} \right] M \\ &\quad + \left[\frac{\pi^{cd}}{M} (\partial_\chi - \mathfrak{L}_M) + M p^{(c} D^{d)} \right] \mathcal{N} ,\end{aligned}\quad (3.39)$$

ahol

$$\begin{aligned}\mathcal{S}^{cd} &= -\frac{2}{\sqrt{g} M} \left(\pi^c{}_b \pi^{db} - \frac{\pi}{2} \pi^{cd} \right) + \frac{1}{2\sqrt{g} M} g^{cd} \left(\pi_{ab} \pi^{ab} - \frac{\pi^2}{2} \right) \\ &\quad + \frac{M}{2\sqrt{g}} g^{cd} \left[\frac{1}{2} p_a p^a + \frac{1}{8} p^2 - \frac{\pi p}{2M} \right] + \frac{p}{2\sqrt{g}} \pi^{cd} + \frac{M}{2\sqrt{g}} p^c p^d ,\end{aligned}\quad (3.40)$$

$$\begin{aligned}\mathcal{V}^{cd} &= -\sqrt{g} M (G^{cd} + 2L^{*db} L^{*c}{}_b - L^* L^{*cd}) + \frac{M}{2} \sqrt{g} g^{cd} (3L^{*ab} L_{ab}^* - L^{*2}) \\ &\quad + \sqrt{g} (g^{ac} g^{bd} - g^{cd} g^{ab}) (\partial_\chi - \mathfrak{L}_M) L_{ab}^* \\ &\quad + \sqrt{g} (D^c D^d M - g^{cd} D_a D^a M) ,\end{aligned}\quad (3.41)$$

továbbá G^{cd} a kétdimenziós Einstein-tenzor. Az impulzus vektor időderiváltja:

$$\begin{aligned}\dot{p}_c &= -\frac{\delta\mathcal{H}^G[N, N^a, \mathcal{N}]}{\delta M^c(\chi, y)} \\ &= N \mathcal{V}_c - 2\sqrt{g} [L_{ac}^* D^a N + D_c (N \mathcal{L}^*)] + \mathfrak{L}_M p_c - \frac{2\mathcal{N}}{M} D^a \pi_{ac} \\ &\quad + \frac{2\mathcal{N}}{M^2} \pi_{ac} D^a M + \left(p g_{ac} - \frac{2}{M} \pi_{ac} \right) D^a \mathcal{N} ,\end{aligned}\quad (3.42)$$

ahol

$$\mathcal{V}_c = -2\sqrt{g} (D^a L_{ac}^* - D_c L^*) . \quad (3.43)$$

Végül az impulzus skalárra vonatkozó mozgásegyenlet:

$$\begin{aligned} \dot{p} &= -\frac{\delta\mathcal{H}^G [N, N^a, \mathcal{N}]}{\delta M(\chi, y)} \\ &= N\mathcal{V} + N\mathcal{S} + \mathfrak{L}_{\mathbf{N}}p + 2\sqrt{g} (NL^* \mathcal{L}^* - D_a D^a N) \\ &\quad + \mathcal{N} \left(\frac{2}{M} \pi^{ab} L_{ab}^* - D_a p^a \right) - 2p^a D_a \mathcal{N} , \end{aligned} \quad (3.44)$$

ahol

$$\mathcal{V} = \sqrt{g} (R + L^{*ab} L_{ab}^* - L^{*2}) , \quad (3.45)$$

$$\mathcal{S} = \frac{1}{\sqrt{g}} \left[\frac{1}{M^2} \left(\pi_{ab} \pi^{ab} - \frac{\pi^2}{2} \right) - \frac{1}{2} p_a p^a - \frac{1}{8} p^2 \right] . \quad (3.46)$$

Ezzel előállítottam az einsteini gravitáció 2+1+1 felbontott hamiltoni tárgyalását.

4. Gömbszimmetrikus fekete lyukak skalár-tenzor elméletekben

Ebben a fejezetben a skalár-tenzor elméletek gömbszimmetrikus fekete lyukainak mozgásegyenleteit vezetem le, követve [27] tárgyalását, azonban általánosítva azt nemerőleges $2+1+1$ felbontásra. Itt az EFT közelítést használom, melyben gravitációs változóként az indukált metrikából és a beágyazási változókból képezett skalárokat használjuk. Ez a közelítés sikeresen működött a kozmológia tárgyalásában [26]. Fekete lyukakra történő alkalmazása nehezebb, mivel ezek szimmetria foka kisebb (még gömbszimmetria esetén is kevesebb Killing-vektorunk van). Ez a fekete lyukak esetén alkalmazott $2+1+1$ felbontás és a kozmológiában alkalmazott $3+1$ felbontás nehézségi fokának összehasonlításából is nyilvánvaló.

4.1. Fekete lyukak az általános relativitáselméletben és skalár-tenzor elméletekben

Az einsteini gravitációelméletben asszimptotikusan sík, sima konvex eseményhorizonttal rendelkező vákuum-téridőkre unicitás-tételek vonatkoznak mind a gömbszimmetrikus, mind a stacionárius forgó, tengelyszimmetrikus esetekben. Israel tétele [42] a Schwarzschild, Robinson tétele [43] pedig a Kerr fekete lyukat jelöli ki osztályuk egyedüli megengedett képviselőjeként. Figyelemre méltó még Birkhoff tétele, mely szerint gömbszimmetrikus vákuum (az eseményhorizonton kívül) egyúttal sztatikus is.

Elektromágneses tér jelenlétében (elektrovákuumban) a gömbszimmetrikus, illetve tengelyszimmetrikus stacionárius megoldások a Reissner–Nordström, ill. Kerr–Newman fekete lyukak. Ezeket tovább lehet általánosítani kozmológiai állandó bevezetésével (de Sitter / anti de Sitter–Reissner–Nordström, ill. de Sitter / anti de Sitter–Kerr–Newman fekete lyukak). Szintén lehetséges geometriai optikai közelítésben vett sugárzást tartalmazó gömbszimmetrikus fekete lyukat, a Vaidya téridőt tárgyalni. Léteznek még egyéb egzotikus ún. NUT (Newman–Unti–Tamburino) töltésű gömbszimmetrikus fekete lyukak is, ezek „counterexample to almost anything” / majdnem mindenre ellenpéldaként váltak híressé [44].

A fenti esetekben a gömb sugara vagy a tengelytől mért sugár kiválasztott szerepet

játszik, ezért a dinamika által kitüntetett szerepű idő mellett egy térszerű irány is különleges bánásmódot igényel, így indokolt a téridő 2+1+1 felbontását alkalmazni.

A természetben található fekete lyukak várhatóan nem mind sztatikusak vagy stacionáriusak, azaz nem értek el egyensúlyi helyzetet. Ilyenkor a fekete lyuk fogalom sem egyértelmű, az eseményhorizont értelmezése finomításra szorul [45].

Hawking bebizonyította, hogy a gravitációs kollapszus nyomán stacionárius végállapotba érkező fekete lyukak a legegyszerűbb, ún. Brans–Dicke skalár-tenzor elméletben megegyeznek az általános relativitáselmélet fekete lyukaival [46]. Ezt az eredményt Sotiriu és Faraoni terjesztette ki [47] olyan általánosított Brans–Dicke elméletekre, melyek skalármező-függő $\omega(\phi)$ csatolási paramétert és potenciált is tartalmaznak. Ennek sajátos esete az $f(R)$ elmélet is.

A skalár-tenzor elméletek fizikailag értelmes, általános (következő alfejezetben tárgyalandó) EFT osztályára nem ismert a legáltalánosabb gömbszimmetrikus téridő. Az ezt megadó egyenletrendszert azonban a fejezet hátralevő részében levezetem.

4.2. Megfigyelésekkel kompatibilis EFT elméletek

A gravitációs hullámok fénysebességű terjedése, melyre a gravitációs hullámok közvetlen megfigyeléséből következtetünk az EFT hatás szabad függvényeire megkötéseket jelent. Ezeket a [40] munkában elemezték. A megengedhető EFT elméletek következő típusúak:

$$L_{c=1}^{EFT} = G_2(X, \phi) + G_3(X, \phi) \square\phi + B_4(X, \phi) \tilde{R} - \frac{4}{X} B_{4,X}(X, \phi) (\phi^a \phi^b \phi_{ab} \square\phi - \phi^a \phi_{ab} \phi_c \phi^{cb}) . \quad (4.1)$$

Itt az

$$\begin{aligned} X &= \tilde{g}^{ab} \partial_a \phi \partial_b \phi , \\ \phi_a &= \tilde{\nabla}_a \phi = \partial_a \phi , \\ \phi_{ab} &= \tilde{\nabla}_a \tilde{\nabla}_b \phi , \\ \square\phi &= \tilde{\nabla}_a \tilde{\nabla}^a \phi , \end{aligned} \quad (4.2)$$

jelöléseket használtuk, illetve G_2, G_3, B_4 az argumentumaik tetszőleges függvényei. A Horndeski elméletekben pedig a görbületi skalár csatolása a ϕ skalármezőhöz nem függ X kinetikus tagtól, így a megengedhető Horndeski elméletek az ún. „kinetik braiding” [41] családba tartoznak:

$$L_{c=1}^{EFT} = G_2(X, \phi) + G_3(X, \phi) \square\phi + G_4(\phi) \tilde{R} , \quad (4.3)$$

ahol G_4 a skalármező tetszőleges függvénye.

4.3. Az EFT hatás

A sötét energia és sötét anyag problémáját a legáltalánosabb EFT úgy oldja meg, hogy egy skalármező bevezetésével módosítja az einsteini gravitációelméletet. A továbbiakban ez a háttéren bevezetett skalármező csak a radiális koordinátától függ $\phi = \phi(r)$, valamint ún. radiális „unitér” mértéket választok, hasonlóan a [27] munkához. Azaz a skalármező általános perturbáció által okozott módosulását a radiális koordináta újradefiniálásával kompenzálom, úgy hogy a skalármező továbbra is csupán a radiális koordináta függvénye maradjon.

A [27] munkában megadott EFT hatásban szereplő, általános L^{EFT} Lagrange-sűrűséget a következő módokon változtatom meg:

- 1) a hatás korábbi változói közül egyet elhagyok¹,
- 2) a fóliázások nem-merőlegességéből származó \mathcal{N} változót a kifejezésekben megtartom,
- 3) illetve a nem hiperfelület-merőleges m^a bázisvektorral képezett beágyazási változókat csillaggal jelölöm.

Az EFT hatás tehát:

$$S^{EFT} = \int dx^4 \sqrt{-\tilde{g}} L^{EFT} (N, M, \mathcal{K}, \mathfrak{K}, K, \varkappa, \mathcal{L}^*, L^*, \lambda^*, R; r) , \quad (4.4)$$

ahol

$$\begin{aligned} \mathfrak{K} &\equiv \mathcal{K}^a \mathcal{K}_a , \\ \varkappa &\equiv K^a_b K^b_a , \\ \lambda^* &\equiv L^{*a}_b L^{*b}_a \end{aligned} \quad (4.5)$$

a beágyazási változóknak négyzetes skalárok és $K \equiv K^a_a$, $L^* \equiv L^{*a}_a$ a külső görbületek spúrjai. Megjegyzem még, hogy a [29]-ben ismertetett 2+1+1 felbontásban szereplő, szimmetria okból kitüntetett χ térkoordináta a gömbszimmetrikus, sztatikus háttér r radiális koordinátájával azonosítható. Ez a koordináta az unitér mérték miatt a hatás skalármező-függését váltja ki.

¹A $\mathfrak{M} = M^a M_a$ változó nem jelenik meg a fizikailag elfogadható, szabadsági fokokat legfeljebb másodrendű dinamikával leíró, azaz Ostrogradsky instabilitásuktól mentes elméletekben, ezért ezt kihagyom a megengedett függésekből.

4.4. Az EFT hatás változói gömbszimmetrikus, sztatikus háttéren

Gömbszimmetrikus, sztatikus háttér esetén, azaz a perturbációk nulladrendjében a metrika következőképpen választható:

$$ds^2 = -\bar{N}^2 dt^2 + \bar{M}^2 dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) . \quad (4.6)$$

(A háttéren vett mennyiségeket felülvonás jelöli.) Ez azt jelenti, hogy a háttéren az N^a shift-, az M^a radiális shift-vektorok és a fóliázás merőlegességét kifejező \mathcal{N} harmadik shift-vektor komponens zérusnak választhatók :

$$\bar{N}^a = \bar{M}^a = \bar{\mathcal{N}} = 0 . \quad (4.7)$$

A háttéren a térszerű hiperfelület időszerű normálisa $n_a = (-\bar{N}, 0, 0, 0)$, továbbá a rá merőleges m_a 1-forma azonos az időszerű hiperfelület térszerű l_a normálisával, azaz $m_a = (0, \bar{M}, 0, 0)$. Szintén nulladrendben, a (4.7) választásból és ϕ időfüggetlenségéből (2.6) felhasználásával belátható, hogy a $(\bar{K}_{ab}, \bar{K}^a, \bar{\mathcal{K}})$ beágyazási változók és belőlük képezett skalárok eltűnnek, így:

$$\bar{\mathcal{K}} = \bar{K} = \bar{\varkappa} = \bar{\mathfrak{K}} = 0 . \quad (4.8)$$

A háttéren nem eltűnő mennyiségek számolásához bevezetjük a vesszőt az r koordináta szerinti parciális deriválás jelöléseként. A (2.6) és (4.6) összefüggések felhasználásával pedig

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{L}}^* &= -\frac{\bar{N}'}{\bar{M}\bar{N}} , \\ \bar{L}^* &= \frac{1}{2\bar{M}} \bar{g}^{ab} \partial_x \bar{g}_{ab} = \frac{2}{\bar{M}r} , \\ \bar{\lambda}^* &= \frac{2}{\bar{M}^2 r^2} , \end{aligned} \quad (4.9)$$

illetve

$$\bar{L}_{ab}^* = \frac{1}{2} \bar{L}^* \bar{g}_{ab} . \quad (4.10)$$

A 2-dimenziós görbületi skalár a háttéren pedig a 2-dimenziós indukált metrikából közvetlenül kiszámolható:

$$\bar{R} = \frac{2}{r^2} . \quad (4.11)$$

4.5. Az EFT hatás elsőrendű variációja

A metrikus mennyiségek perturbáció miatti megváltozását δ -val jelölöm (pl. $\delta N = N - \bar{N}$). Ebből származtathatók a formalizmusban megjelenő egyéb változók megváltozásai. A (4.5) és (4.8) összefüggésekből mindjárt látszik, hogy a $\delta\mathcal{K}$ és $\delta\mathfrak{K}$ másodrendű, azaz első rendben nem jelennek meg.

Továbbá a (4.10) és (4.9) egyenletekből meghatározhatjuk a (4.5) által megadott λ^* változó elsőrendű variációját:

$$\begin{aligned}
\delta\lambda^* &= L^{*a}_b L^{*b}_a - \bar{L}^{*a}_b \bar{L}^{*b}_a = 2\bar{L}^{*a}_b \delta L^{*b}_a \\
&= \bar{L}^* \bar{g}^a_b \delta L^{*b}_a = \frac{2}{\bar{M}r} \bar{g}^a_b \delta L^{*b}_a \\
&= \frac{2}{\bar{M}r} (\delta L^* - \bar{L}^{*b}_a \delta g^a_b) \\
&= \frac{2}{\bar{M}r} \left(\delta L^* - \frac{1}{\bar{M}r} \bar{g}^b_a \delta g^a_b \right) \\
&= \frac{2}{\bar{M}r} \delta L^* , \tag{4.12}
\end{aligned}$$

mely eggyel csökkenti a hatás változóinak számát, amikor a mozgásegyenleteket annak elsőrendű variációjából származtatjuk. Az eddigi észrevételek fényében 7 független változó maradt és a hatás elsőrendű variációjának alábbi része következőképpen alakítható át:

$$\begin{aligned}
\int dx^4 \sqrt{-\tilde{g}} (L_{L^*}^{EFT} \delta L^* + L_{\lambda^*}^{EFT} \delta \lambda^*) &= \int dx^4 \sqrt{-\tilde{g}} \mathcal{F} \delta L^* \\
&= \int dx^4 \sqrt{\tilde{g}} \bar{M} \bar{N} \mathcal{F} \delta L^* , \tag{4.13}
\end{aligned}$$

ahol

$$\mathcal{F} = L_{L^*}^{EFT} + \frac{2}{\bar{M}r} L_{\lambda^*}^{EFT} . \tag{4.14}$$

és

$$L_G^{EFT} \equiv \frac{\delta L^{EFT}}{\delta G} , \tag{4.15}$$

az L^{EFT} adott $G = N, M, \mathcal{K}, \mathfrak{K}, K, \mathcal{K}, L^*, \lambda^*, R$ változója szerinti funkcionál-deriváltjai, a háttéren kiértékelve, azaz L^{EFT} Taylor-sorfejtésének az elsőrendű együtthatói. Az (4.13) utolsó lépésében a térfogatelem nulladrendű közelítését vettem, tekintve, hogy elsőrendű δL^* szorozza.

Belátható, hogy δL^* és $\delta \bar{L}^*$ között is fennáll egy kapcsolat. A második (2.11)

összefüggést és a mennyiségek (4.9) háttérértékeit felhasználva kapjuk:

$$\begin{aligned} L^* &= \tilde{\nabla}_a m^a + \mathcal{L}^* = \tilde{\nabla}_a m^a + \bar{\mathcal{L}}^* + \delta\mathcal{L}^* , \\ \delta L^* &= L^* - \bar{L}^* = \left[\tilde{\nabla}_a m^a - \frac{\bar{N}'}{\bar{M}\bar{N}} - \frac{2}{\bar{M}r} \right] + \delta\mathcal{L}^* . \end{aligned} \quad (4.16)$$

Megjegyzem, hogy a baloldalon zárójelbe tett 3 tag együttesen elsőrendű. Beírva ezt a (4.13) egyenlet utolsóelőtti alakjába, parciálisan integrálva, felhasználva (3.21) második egyenletét, továbbá azt, hogy (a háttéren számolt) \mathcal{F} nem függ a θ , φ koordinátáktól:

$$\begin{aligned} & \int dx^4 \sqrt{-\tilde{g}} \mathcal{F} \delta L^* \\ &= \int dx^4 \sqrt{-\tilde{g}} \left[\tilde{\nabla}_a (\mathcal{F} m^a) - m^a \tilde{\nabla}_a \mathcal{F} - \mathcal{F} \left(\frac{\bar{N}'}{\bar{M}\bar{N}} + \frac{2}{\bar{M}r} \right) \right] + \int dx^4 \sqrt{\bar{g}} \bar{M} \bar{N} \mathcal{F} \delta \mathcal{L}^* \\ &= \int dx^4 \sqrt{-\tilde{g}} \left[\tilde{\nabla}_a (\mathcal{F} m^a) - \frac{1}{\bar{M}} (\partial_r - M^a D_a) \mathcal{F} - \mathcal{F} \left(\frac{\bar{N}'}{\bar{M}\bar{N}} + \frac{2}{\bar{M}r} \right) \right] \\ & \quad + \int dx^4 \sqrt{\bar{g}} \bar{M} \bar{N} \mathcal{F} \delta \mathcal{L}^* \\ &= \int dx^4 \sqrt{-\tilde{g}} \left[\tilde{\nabla}_a (\mathcal{F} m^a) - \frac{\mathcal{F}'}{\bar{M} + \delta M} - \mathcal{F} \left(\frac{\bar{N}'}{\bar{M}\bar{N}} + \frac{2}{\bar{M}r} \right) \right] + \int dx^4 \sqrt{\bar{g}} \bar{M} \bar{N} \mathcal{F} \delta \mathcal{L}^* \\ &= \int dx^4 \sqrt{-\tilde{g}} \left[\tilde{\nabla}_a (\mathcal{F} m^a) + \frac{\mathcal{F}'}{\bar{M}^2} \delta M - \frac{\mathcal{F}'}{\bar{M}} - \mathcal{F} \left(\frac{\bar{N}'}{\bar{M}\bar{N}} + \frac{2}{\bar{M}r} \right) \right] \\ & \quad + \int dx^4 \sqrt{\bar{g}} \bar{M} \bar{N} \mathcal{F} \delta \mathcal{L}^* \\ &= \int dx^4 \sqrt{-\tilde{g}} \left[\frac{\mathcal{F}'}{\bar{M}^2} \delta M + \tilde{\nabla}_a (\mathcal{F} m^a) - \frac{1}{\bar{M}} \left(\frac{2}{r} + \frac{\bar{N}'}{\bar{N}} + \partial_r \right) \mathcal{F} \right] \\ & \quad + \int dx^4 \sqrt{\bar{g}} \bar{M} \bar{N} \mathcal{F} \delta \mathcal{L}^* . \end{aligned} \quad (4.17)$$

Mivel mind a szögletes zárójel, mind δM elsőrendű, a szögletes zárójel többi tagjának együttese is az, tehát

$$\begin{aligned} \int dx^4 \sqrt{-\tilde{g}} \mathcal{F} \delta L^* &= \int dx^4 \sqrt{\bar{g}} \bar{M} \bar{N} \left(\frac{\mathcal{F}'}{\bar{M}^2} \delta M + \mathcal{F} \delta \mathcal{L}^* \right) \\ & \quad + \int dx^4 \sqrt{\bar{g}} \left[\bar{N} \bar{M} \tilde{\nabla}_a (\mathcal{F} m^a) - \bar{N} \left(\frac{2}{r} + \frac{\bar{N}'}{\bar{N}} + \partial_r \right) \mathcal{F} \right] \end{aligned} \quad (4.18)$$

Felhasználom, hogy $\sqrt{\bar{g}} = r^2 \sin \theta$, így $\partial_r \sqrt{\bar{g}} = 2\sqrt{\bar{g}}/r$ és bármely $\mathcal{G}(r)$ függvény esetén

$$\sqrt{\bar{g}} \bar{N} \left(\frac{2}{r} + \frac{\bar{N}'}{\bar{N}} + \partial_r \right) \mathcal{G} = \partial_r (\sqrt{\bar{g}} \bar{N} \mathcal{G}) \quad (4.19)$$

teljesül. Továbbá, mivel $m^a = (0, \bar{M}^{-1}, 0, 0)$, tetszőleges \mathcal{Z} függvényre belátható, hogy

$$\begin{aligned} \partial_r (\sqrt{\bar{g}} \bar{N} \mathcal{Z}) &= \partial_r \left(\frac{\sqrt{-\tilde{g}} \mathcal{Z}}{\bar{M}} \right) = \partial_r \left(\sqrt{-\tilde{g}} \mathcal{Z} m^r \right) = \partial_a \left(\sqrt{-\tilde{g}} \mathcal{Z} m^a \right) \\ &= \partial_a \left[\sqrt{-\tilde{g}} \left(1 - \delta \ln \sqrt{-\tilde{g}} \right) \mathcal{Z} m^a \right] \\ &= \sqrt{-\tilde{g}} \tilde{\nabla}_a \left[\left(1 - \delta \ln \sqrt{-\tilde{g}} \right) \mathcal{Z} m^a \right], \end{aligned} \quad (4.20)$$

azaz (4.18) második tagja

$$\begin{aligned} &\int dx^4 \sqrt{\bar{g}} \left[\bar{N} \bar{M} \tilde{\nabla}_a (\mathcal{F} m^a) - \bar{N} \left(\frac{2}{r} + \frac{\bar{N}'}{\bar{N}} + \partial_r \right) \mathcal{F} \right] \\ &= \int dx^4 \left[\sqrt{\bar{g}} \bar{N} \bar{M} \tilde{\nabla}_a (\mathcal{F} m^a) - \partial_r (\sqrt{\bar{g}} \bar{N} \mathcal{F}) \right] \\ &= \int dx^4 \left\{ \sqrt{\bar{g}} \bar{N} \bar{M} \tilde{\nabla}_a (\mathcal{F} m^a) - \sqrt{-\tilde{g}} \tilde{\nabla}_a \left[\left(1 - \delta \ln \sqrt{-\tilde{g}} \right) \mathcal{F} m^a \right] \right\} \\ &= \int dx^4 \left\{ \sqrt{\bar{g}} \bar{N} \bar{M} \tilde{\nabla}_a (\mathcal{F} m^a) - \sqrt{-\tilde{g}} \left(1 + \delta \ln \sqrt{-\tilde{g}} \right) \tilde{\nabla}_a \left[\left(1 - \delta \ln \sqrt{-\tilde{g}} \right) \mathcal{F} m^a \right] \right\} \\ &= \int dx^4 \sqrt{-\tilde{g}} \left\{ \tilde{\nabla}_a \left[\mathcal{F} m^a \delta \ln \sqrt{-\tilde{g}} \right] - \tilde{\nabla}_a (\mathcal{F} m^a) \delta \ln \sqrt{-\tilde{g}} \right\} \\ &= \int dx^4 \sqrt{-\tilde{g}} \left\{ \tilde{\nabla}_a \left[\mathcal{F} m^a \delta \ln \sqrt{-\tilde{g}} \right] - \left[m^a \tilde{\nabla}_a \mathcal{F} + \mathcal{F} \tilde{\nabla}_a m^a \right] \delta \ln \sqrt{-\tilde{g}} \right\} \\ &= \int dx^4 \sqrt{-\tilde{g}} \left\{ \tilde{\nabla}_a \left[\mathcal{F} m^a \delta \ln \sqrt{-\tilde{g}} \right] - \left[m^a \tilde{\nabla}_a \mathcal{F} + \mathcal{F} \tilde{\nabla}_a m^a \right] \delta \ln \sqrt{-\tilde{g}} \right\}, \end{aligned} \quad (4.21)$$

amin már látszik, hogy elsőrendű. A kifejezés első része egy kovariáns négyesdivergencia, ami eldobható, a második része további átalakításra szorul:

$$\begin{aligned} &\int dx^4 \sqrt{-\tilde{g}} \left[m^a \tilde{\nabla}_a \mathcal{F} + \mathcal{F} \tilde{\nabla}_a m^a \right] \delta \ln \sqrt{-\tilde{g}} \\ &= \int dx^4 \sqrt{-\tilde{g}} \left[\frac{1}{\bar{M}} (\partial_r - M^a D_a) \mathcal{F} + \mathcal{F} (L^* - \mathcal{L}^*) \right] \delta \ln \sqrt{-\tilde{g}} \\ &= \int dx^4 \sqrt{-\tilde{g}} \left[\frac{1}{\bar{M}} \partial_r \mathcal{F} + \mathcal{F} (L^* - \mathcal{L}^*) \right] \delta \ln \sqrt{-\tilde{g}} \\ &= \int dx^4 \sqrt{-\tilde{g}} \left[\frac{1}{\bar{M}} \partial_r \mathcal{F} + \mathcal{F} (\bar{L}^* - \bar{\mathcal{L}}^*) \right] \delta \ln \sqrt{-\tilde{g}} \\ &= \int dx^4 \sqrt{-\tilde{g}} \frac{1}{\bar{M}} \left[\left(\frac{2}{r} + \frac{\bar{N}'}{\bar{N}} + \partial_r \right) \mathcal{F} \right] \delta \ln \sqrt{-\tilde{g}} \\ &= \int dx^4 \left[\sqrt{\bar{g}} \bar{N} \left(\frac{2}{r} + \frac{\bar{N}'}{\bar{N}} + \partial_r \right) \mathcal{F} \right] \delta \ln \sqrt{-\tilde{g}} \\ &= \int dx^4 \partial_r (\sqrt{\bar{g}} \bar{N} \mathcal{F}) \delta \ln \sqrt{-\tilde{g}}. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Vagyis

$$\begin{aligned}
\int dx^4 \sqrt{-\tilde{g}} \mathcal{F} \delta L^* &= \int dx^4 \sqrt{\tilde{g}} \bar{M} \bar{N} \left(\frac{\mathcal{F}'}{\bar{M}^2} \delta M + \mathcal{F} \delta \mathcal{L}^* \right) \\
&+ \int dx^4 \sqrt{-\tilde{g}} \tilde{\nabla}_a \left[\mathcal{F} m^a \delta \ln \sqrt{-\tilde{g}} \right] \\
&- \int dx^4 \partial_r (\sqrt{\tilde{g}} \bar{N} \mathcal{F}) \delta \ln \sqrt{-\tilde{g}} .
\end{aligned} \tag{4.23}$$

Hasonló módon, $n^a = (\bar{N}^{-1}, 0, 0, 0)$ felhasználásával megmutatható

$$\begin{aligned}
\partial_t (\sqrt{\tilde{g}} \bar{M} \mathcal{Z}) &= \partial_t \left(\frac{\mathcal{Z}}{\sqrt{-\tilde{g}} \bar{N}} \right) = \partial_t (\sqrt{-\tilde{g}} \mathcal{Z} n^t) = \partial_a (\sqrt{-\tilde{g}} \mathcal{Z} n^a) \\
&= \partial_a \left[\sqrt{-\tilde{g}} \left(1 - \delta \ln \sqrt{-\tilde{g}} \right) \mathcal{Z} n^a \right] \\
&= \sqrt{-\tilde{g}} \tilde{\nabla}_a \left[\left(1 - \delta \ln \sqrt{-\tilde{g}} \right) \mathcal{Z} n^a \right]
\end{aligned} \tag{4.24}$$

összefüggés is.

Szintén kapcsolatba hozható egymással a δK és $\delta \mathcal{K}$ variáció. Felhasználva az első (2.11) összefüggést és a benne szereplő mennyiségek eltűnő háttérértékeit:

$$\delta K = K = \tilde{\nabla}_a n^a - \mathcal{K} = \tilde{\nabla}_a n^a - \delta \mathcal{K} , \tag{4.25}$$

parciálisan integrálva, felhasználva (3.21) első egyenletét és hogy L_K^{EFT} nem függ t, θ, φ változóktól:

$$\begin{aligned}
\int d^4 x \sqrt{-\tilde{g}} L_K^{EFT} \delta K &= \int d^4 x \sqrt{-\tilde{g}} \tilde{\nabla}_a (L_K^{EFT} n^a) - \int d^4 x \sqrt{-\tilde{g}} n^a \tilde{\nabla}_a L_K^{EFT} \\
&- \int d^4 x \sqrt{-\tilde{g}} L_K^{EFT} \delta \mathcal{K} \\
&= \int d^4 x \sqrt{-\tilde{g}} \left(\frac{1}{\bar{N} \bar{M}} \partial_r L_K^{EFT} \delta \mathcal{N} - L_K^{EFT} \delta \mathcal{K} \right) \\
&+ \int d^4 x \sqrt{-\tilde{g}} \tilde{\nabla}_a (L_K^{EFT} n^a) .
\end{aligned} \tag{4.26}$$

A [27] cikkben levezetett eredményhez képest $\delta \mathcal{N} = \mathcal{N}$ -t tartalmazó, elsőrendű korrekciós tagot kaptunk.

A metrikus változók esetén a parciális deriváltak és az elsőrendű variáció felcserélhetők, például: $\partial_t M = \dot{M} = \delta \dot{M} = \partial_t (\delta M)$. Az utolsóelőtti (2.6) egyenletből, felhasználva a mennyiségek háttéren vett értékeit és függéseit, elsőrendben kapjuk, hogy

$$\delta \mathcal{K} = \frac{1}{\bar{M} \bar{N}} [\partial_t (\delta M) - \partial_r (\delta \mathcal{N})] , \tag{4.27}$$

az utolsó (2.6) egyenletből pedig

$$\delta\mathcal{L}^* = -\frac{\partial_r(\delta N)}{\bar{M}\bar{N}} + \frac{\bar{N}'}{\bar{M}\bar{N}} \left(\frac{\delta M}{\bar{M}} + \frac{\delta N}{\bar{N}} \right). \quad (4.28)$$

A hatás elsőrendű variációjának

$$\begin{aligned} \delta S^{EFT} &= \int d^4x \left(\sqrt{-\tilde{g}} \delta L^{EFT} + L^{EFT} \delta \sqrt{-\tilde{g}} \right) \\ &= \int d^4x \sqrt{-\tilde{g}} \left(\delta L^{EFT} + L^{EFT} \delta \ln \sqrt{-\tilde{g}} \right) \end{aligned} \quad (4.29)$$

számolásához szükséges még

$$\delta \ln \sqrt{-\tilde{g}} = \delta \ln \sqrt{g} + \delta \ln N + \delta \ln M \quad (4.30)$$

kifejezése. Ehhez megjegyezzük, hogy 2 dimenzióban két tetszőleges metrika mindig konformis kapcsolatba hozható egymással alkalmas koordinátarendszer választással:

$$g_{ab} = e^{2\zeta} \bar{g}_{ab}. \quad (4.31)$$

A megfelelő koordináta-transzformációt az 5. fejezetben fogom bemutatni, azonban a továbbiakban szükségem lesz erre az eredményre, mind a $\delta \ln \sqrt{g}$, mind a 2-dimenziós görbületi skalár δR variációjának számolásához. Előbbi, kis ζ -re

$$\delta \ln \sqrt{g} = \frac{\sqrt{g} - \sqrt{\bar{g}}}{\sqrt{\bar{g}}} = 2\zeta, \quad (4.32)$$

a 2-dimenziós görbületi skalár transzformációja konformis átskálázásra pedig $R = e^{-2\zeta} (\bar{R} - 2\bar{g}^{ab} \bar{D}_a \bar{D}_b e^\zeta)$ [48], így a perturbáció előtti és utáni görbületi skalárok közötti kapcsolat elsőrendben:

$$R = (1 - 2\zeta) [\bar{R} - 2\bar{g}^{ab} \bar{D}_a \bar{D}_b \zeta], \quad (4.33)$$

tehát

$$\delta R = R - \bar{R} = -2\zeta \bar{R} - 2\bar{g}^{ab} \bar{D}_a \bar{D}_b \zeta. \quad (4.34)$$

A hatás elsőrendű variációjának δR része

$$\int d^4x \sqrt{\tilde{g}} \bar{N} \bar{M} L_R^{EFT} \delta R = -2 \int dt \int dr \bar{N} \bar{M} L_R^{EFT} \int d\theta d\varphi \sqrt{\tilde{g}} [\zeta \bar{R} + \bar{D}_a (\bar{g}^{ab} \bar{D}_b \zeta)], \quad (4.35)$$

ahol a θ és φ integrálok a gömbön futnak végig. Mivel a második tag egy vektor kovariáns divergenciája, az

$$\int_S d\theta d\varphi \sqrt{\tilde{g}} \bar{D}_a \bar{V}^a = \int_{\partial S} d\rho \sqrt{\bar{h}} n_a \bar{V}^a \quad (4.36)$$

általánosított Stokes-tételt alkalmazhatjuk, ahol ρ az S felület ∂S határán futó koordináta, n^a a határfelület normálisa és \bar{h} metrikájának determinánsa. Esetünkben azonban S a gömb felszíne, aminek nincs határa, így ez a járulék eltűnik, ezért

$$\int d^4x \sqrt{\bar{g}} \bar{N} \bar{M} L_R^{EFT} \delta R = \int d^4x \sqrt{\bar{g}} \bar{N} \bar{M} \left(-\frac{4}{r^2} L_R^{EFT} \right) \zeta. \quad (4.37)$$

Összefoglalva az eddigieket, a hatás (4.29) elsőrendű variációja (4.13), (4.23), (4.26), (4.27), (4.28) összefüggések, parciális integrálások majd (4.20), (4.24), (4.30), (4.32), (4.37) azonosságok egymást követő alkalmazásával:

$$\begin{aligned} \delta S^{EFT} &= \int d^4x \sqrt{-\tilde{g}} \left\{ [L_N^{EFT} \delta N + L_M^{EFT} \delta M + L_{\mathcal{K}}^{EFT} \delta \mathcal{K} + L_K^{EFT} \delta K \right. \\ &\quad \left. + L_{\mathcal{L}^*}^{EFT} \delta \mathcal{L}^* + L_{L^*}^{EFT} \delta L^* + L_{\lambda^*}^{EFT} \delta \lambda^* + L_R^{EFT} \delta R] + L^{EFT} \delta \ln \sqrt{-\tilde{g}} \right\} \\ &= \int d^4x \sqrt{-\tilde{g}} \left\{ [L_N^{EFT} \delta N + L_M^{EFT} \delta M + L_{\mathcal{K}}^{EFT} \delta \mathcal{K} + L_K^{EFT} \delta K \right. \\ &\quad \left. + L_{\mathcal{L}^*}^{EFT} \delta \mathcal{L}^* + \frac{\mathcal{F}'}{M^2} \delta M + \mathcal{F} \delta \mathcal{L}^* + L_R^{EFT} \delta R] + L^{EFT} \delta \ln \sqrt{-\tilde{g}} \right\} \\ &\quad + \int d^4x \sqrt{-\tilde{g}} \tilde{\nabla}_a [\mathcal{F} m^a \delta \ln \sqrt{-\tilde{g}}] - \int d^4x \partial_r (\sqrt{\bar{g}} \bar{N} \mathcal{F}) \delta \ln \sqrt{-\tilde{g}} \\ &= \int d^4x \sqrt{-\tilde{g}} \left\{ \left[L_N^{EFT} \delta N + \left(L_M^{EFT} + \frac{\mathcal{F}'}{M^2} \right) \delta M + (L_{\mathcal{K}}^{EFT} - L_K^{EFT}) \delta \mathcal{K} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{\bar{N} \bar{M}} \partial_r L_K^{EFT} \delta \mathcal{N} + (L_{\mathcal{L}^*}^{EFT} + \mathcal{F}) \delta \mathcal{L}^* + L_R^{EFT} \delta R \right] + L^{EFT} \delta \ln \sqrt{-\tilde{g}} \right\} \\ &\quad - \int d^4x \partial_r (\sqrt{\bar{g}} \bar{N} \mathcal{F}) \delta \ln \sqrt{-\tilde{g}} + \int d^4x \sqrt{-\tilde{g}} \tilde{\nabla}_a [L_K^{EFT} n^a + \mathcal{F} m^a \delta \ln \sqrt{-\tilde{g}}] \\ &= \int d^4x \sqrt{-\tilde{g}} \left\{ \left[\bar{N} L_N^{EFT} + \frac{\bar{N}'}{\bar{M} \bar{N}} (L_{\mathcal{L}^*}^{EFT} + \mathcal{F}) \right] \delta \ln N \right. \\ &\quad \left. + \left(\bar{M} L_M^{EFT} + \frac{\mathcal{F}'}{\bar{M}} + \frac{\bar{N}'}{\bar{M} \bar{N}} (L_{\mathcal{L}^*}^{EFT} + \mathcal{F}) \right) \delta \ln M \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\bar{N} \bar{M}} \partial_r L_K^{EFT} \delta \mathcal{N} + L_R^{EFT} \delta R + L^{EFT} \delta \ln \sqrt{-\tilde{g}} \right. \\ &\quad \left. + (L_{\mathcal{K}}^{EFT} - L_K^{EFT}) \frac{1}{\bar{M} \bar{N}} [\partial_t (\delta M) - \partial_r (\delta \mathcal{N})] - (L_{\mathcal{L}^*}^{EFT} + \mathcal{F}) \frac{\partial_r (\delta N)}{\bar{M} \bar{N}} \right\} \\ &\quad - \int d^4x \partial_r (\sqrt{\bar{g}} \bar{N} \mathcal{F}) \delta \ln \sqrt{-\tilde{g}} + \int d^4x \sqrt{-\tilde{g}} \tilde{\nabla}_a [L_K^{EFT} n^a + \mathcal{F} m^a \delta \ln \sqrt{-\tilde{g}}] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int d^4x \sqrt{-\tilde{g}} \left\{ \left[\bar{N} L_N^{EFT} + \frac{\bar{N}'}{\bar{M}\bar{N}} (L_{\mathcal{L}^*}^{EFT} + \mathcal{F}) \right] \delta \ln N \right. \\
&\quad + \left(\bar{M} L_M^{EFT} + \frac{\mathcal{F}'}{\bar{M}} + \frac{\bar{N}'}{\bar{M}\bar{N}} (L_{\mathcal{L}^*}^{EFT} + \mathcal{F}) \right) \delta \ln M \\
&\quad + \left. \frac{1}{\bar{N}\bar{M}} \partial_r L_K^{EFT} \delta \mathcal{N} + L_R^{EFT} \delta R + L^{EFT} \delta \ln \sqrt{-\tilde{g}} \right\} \\
&\quad + \int d^4x \partial_r (\sqrt{\tilde{g}} (L_K^{EFT} - L_K^{EFT})) \delta \mathcal{N} \\
&\quad + \int d^4x \partial_r (\sqrt{\tilde{g}} (L_{\mathcal{L}^*}^{EFT} + \mathcal{F})) \delta \mathcal{N} \\
&\quad - \int d^4x \partial_r (\sqrt{\tilde{g}} \bar{N} \mathcal{F}) \delta \ln \sqrt{-\tilde{g}} \\
&\quad + \int d^4x \sqrt{-\tilde{g}} \tilde{\nabla}_a \left[L_K^{EFT} n^a + (L_K^{EFT} - L_K^{EFT}) n^a \delta \ln M + \mathcal{F} m^a \delta \ln \sqrt{-\tilde{g}} \right. \\
&\quad \left. - (L_{\mathcal{L}^*}^{EFT} + \mathcal{F}) m^a \delta \ln N - (L_K^{EFT} - L_K^{EFT}) m^a \frac{\delta \mathcal{N}}{\bar{N}} \right] \\
&= \int d^4x \sqrt{-\tilde{g}} \left\{ \left[\bar{N} L_N^{EFT} + \frac{1}{\bar{M}} \left(\frac{2}{r} + \frac{\bar{N}'}{\bar{N}} + \partial_r \right) (L_{\mathcal{L}^*}^{EFT} + \mathcal{F}) \right] \delta \ln N \right. \\
&\quad + \left(\bar{M} L_M^{EFT} + \frac{\mathcal{F}'}{\bar{M}} + \frac{\bar{N}'}{\bar{M}\bar{N}} (L_{\mathcal{L}^*}^{EFT} + \mathcal{F}) \right) \delta \ln M \\
&\quad + \frac{1}{\bar{N}\bar{M}} \left[\partial_r L_K^{EFT} + \frac{2}{r} (L_K^{EFT} - L_K^{EFT}) \right] \delta \mathcal{N} \\
&\quad + L_R^{EFT} \delta R + \left[L^{EFT} - \frac{1}{\bar{M}\bar{N}} \left(\frac{2}{r} + \partial_r \right) (\bar{N} \mathcal{F}) \right] \delta \ln \sqrt{-\tilde{g}} \left. \right\} \\
&\quad + \int d^4x \sqrt{-\tilde{g}} \tilde{\nabla}_a \left[L_K^{EFT} n^a + (L_K^{EFT} - L_K^{EFT}) n^a \delta \ln M + \mathcal{F} m^a \delta \ln \sqrt{-\tilde{g}} \right. \\
&\quad \left. - (L_{\mathcal{L}^*}^{EFT} + \mathcal{F}) m^a \delta \ln N - (L_K^{EFT} - L_K^{EFT}) m^a \frac{\delta \mathcal{N}}{\bar{N}} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int d^4x \sqrt{-\tilde{g}} \left\{ \left[L^{EFT} + \bar{N} L_N^{EFT} + \frac{1}{\bar{M}} \left(\frac{2}{r} + \frac{\bar{N}'}{\bar{N}} + \partial_r \right) L_{\mathcal{L}^*}^{EFT} \right] \delta \ln N \right. \\
&\quad + \left[L^{EFT} + \bar{M} L_M^{EFT} - \frac{2}{r\bar{M}} \mathcal{F} + \frac{\bar{N}'}{\bar{M}\bar{N}} L_{\mathcal{L}^*}^{EFT} \right] \delta \ln M \\
&\quad + \frac{1}{\bar{N}\bar{M}} \left[\partial_r L_{\mathcal{K}}^{EFT} + \frac{2}{r} (L_{\mathcal{K}}^{EFT} - L_K^{EFT}) \right] \delta \mathcal{N} \\
&\quad + 2 \left[L^{EFT} - \frac{1}{\bar{M}} \left(\frac{2}{r} + \frac{\bar{N}'}{\bar{N}} + \partial_r \right) \mathcal{F} - \frac{2}{r^2} L_R^{EFT} \right] \zeta \left. \right\} \\
&\quad + \int d^4x \sqrt{-\tilde{g}} \tilde{\nabla}_a \left[L_{\mathcal{K}}^{EFT} n^a + (L_{\mathcal{K}}^{EFT} - L_K^{EFT}) n^a \delta \ln M + \mathcal{F} m^a \delta \ln \sqrt{-\tilde{g}} \right. \\
&\quad \left. - (L_{\mathcal{L}^*}^{EFT} + \mathcal{F}) m^a \delta \ln N - (L_{\mathcal{K}}^{EFT} - L_K^{EFT}) m^a \frac{\delta \mathcal{N}}{\bar{N}} \right]. \tag{4.38}
\end{aligned}$$

Ezzel előállt az elsőrendű hatás azon alakja, amelyről leolvashatók a mozgásegyenletek:

$$L^{EFT} + \bar{N} L_N^{EFT} + \frac{1}{\bar{M}} \left(\frac{2}{r} + \frac{\bar{N}'}{\bar{N}} + \partial_r \right) L_{\mathcal{L}^*}^{EFT} = 0, \tag{4.39}$$

$$L^{EFT} + \bar{M} L_M^{EFT} - \frac{2}{r\bar{M}} \mathcal{F} + \frac{\bar{N}'}{\bar{M}\bar{N}} L_{\mathcal{L}^*}^{EFT} = 0, \tag{4.40}$$

$$L^{EFT} - \frac{1}{\bar{M}} \left(\frac{2}{r} + \frac{\bar{N}'}{\bar{N}} + \partial_r \right) \mathcal{F} - \frac{2}{r^2} L_R^{EFT} = 0, \tag{4.41}$$

$$\partial_r L_{\mathcal{K}}^{EFT} + \frac{2}{r} (L_{\mathcal{K}}^{EFT} - L_K^{EFT}) = 0. \tag{4.42}$$

Az első három mozgásegyenlet reprodukálja [27] megfelelő eredményét, ezeket tehát nem változtatja meg a kettős fóliázás merőlegességtől való eltérése. A negyedik egyenlet \mathcal{N} variációjából származik és új. Ez az egyenlet átírható az egyszerűbb

$$\partial_r (r^2 L_{\mathcal{K}}^{EFT}) = 2r L_K^{EFT} \tag{4.43}$$

alakra is. Legegyszerűbb megoldása

$$L_{\mathcal{K}}^{EFT} = L_K^{EFT} = 0, \tag{4.44}$$

a hatást egyszerűsíti:

$$S^{EFT} = \int d^4x \sqrt{-\tilde{g}} L^{EFT} (N, M, \mathfrak{R}, \mathcal{N}, \mathcal{L}^*, L^*, \lambda^*, R; r). \tag{4.45}$$

Megjegyzem még, hogy a mozgásegyenletek levezetése során elkerültem a [27] munka azon állítását, miszerint az elsőrendű variációk egy nulladrendű, egyébként kovariáns négyesdivergencia járulékot adnának. A kérdéses járulék a (4.18) egyenlőség baloldalának utolsó tagja. Azzal, hogy az előtte található négyesdivergenciát (ami nulladrendű

részt is tartalmazott) a számolás során megtartottam, sikerült a járulék nulladrendű részét egzaktul egyszerűsíteni.

A partikuláris skalár-tenzor elmélet megválasztása után a (4.39)-(4.41), (4.43) egyenletek megoldása gömbszimmetrikus, sztatikus feketelyuk-megoldásokhoz vezet.

4.6. Alkalmazás: Schwarzschild-téridő az általános relativitáselméletben

Elsőként az általános relativitáselméletre alkalmazzuk az előző alfejezetben levezetett dinamikát.

A (2.12) Einstein–Hilbert hatás (3.2) Lagrange-függvényéből elhagyva a 4-es kovariáns divergenciát, majd skalár változókra áttérve

$$\begin{aligned}
L^{EFT} &= R + K_{ab}K^{ab} - K^2 - 2K\mathcal{K} + 2\mathcal{K}_a\mathcal{K}^a - L_{ab}^*L^{ab*} \\
&\quad + (L^*)^2 - 2L^*\mathcal{L}^* + 2D_a \ln N D^a \ln M \\
&= R + \varkappa - K^2 - 2K\mathcal{K} + 2\mathfrak{K} - \lambda^* + (L^*)^2 \\
&\quad - 2L^*\mathcal{L}^* + 2D_a \ln N D^a \ln M .
\end{aligned} \tag{4.46}$$

A (4.39)-(4.42) mozgásegyenletekben szereplő funkcionál-deriváltak így

$$\begin{aligned}
L_N^{EFT} &= -2 \frac{D_a D^a \ln M}{N} , \\
L_M^{EFT} &= -2 \frac{D_a D^a \ln N}{M} , \\
L_R^{EFT} &= 1 , \\
L_{\mathcal{L}^*}^{EFT} &= -2L^* , \\
L_K^{EFT} &= -2(K + \mathcal{K}) , \\
L_{\mathcal{K}}^{EFT} &= -2K ,
\end{aligned} \tag{4.47}$$

valamint

$$\mathcal{F} = 2(L^* - \mathcal{L}^*) - \frac{2}{Mr} . \tag{4.48}$$

Az \mathcal{N} variációjából nyert (4.42) új egyenlet ebben az esetben

$$\partial_r K = \frac{2}{r} \mathcal{K} \tag{4.49}$$

alakra egyszerűsödik.

A 4.4 alfejezetben megadtam a skalár változók értékét gömbszimmetrikus, statikus háttéren. Ezek felhasználásával az EFT Lagrange-függvény

$$\begin{aligned}\bar{L}^{EFT} &= \frac{2}{r^2} - \frac{2}{r^2 \bar{M}^2} + \frac{4}{r^2 \bar{M}^2} + \frac{4\bar{N}'}{r \bar{M}^2 \bar{N}} + D_a \ln \bar{N} D^a \ln \bar{M} \\ &= \frac{2}{r^2} \left[1 + \frac{1}{\bar{M}^2} \left(1 + \frac{2r\bar{N}'}{\bar{N}} \right) \right],\end{aligned}\quad (4.50)$$

továbbá

$$\begin{aligned}\bar{L}_N^{EFT} &= 0, \\ \bar{L}_M^{EFT} &= 0, \\ \bar{L}_R^{EFT} &= 1, \\ \bar{L}_{\mathcal{L}^*}^{EFT} &= -\frac{4}{r\bar{M}}, \\ \bar{L}_K^{EFT} &= 0, \\ \bar{L}_{\mathcal{K}}^{EFT} &= 0.\end{aligned}\quad (4.51)$$

és

$$\bar{\mathcal{F}} = \frac{2}{r\bar{M}} \left(1 + \frac{r\bar{N}'}{\bar{N}} \right),$$

így a (4.39)-(4.41) mozgásegyenletek a háttéren:

$$\bar{M}^2 - 1 + \frac{r\bar{M}'}{\bar{M}} = 0, \quad (4.52)$$

$$\bar{M}^2 - 1 - \frac{2r\bar{N}'}{\bar{N}} = 0, \quad (4.53)$$

$$\frac{2}{r^2} \left[1 + \frac{1}{\bar{M}^2} \left(1 + \frac{2r\bar{N}'}{\bar{N}} \right) \right] - \frac{1}{\bar{M}} \left(\frac{2}{r} + \frac{\bar{N}'}{\bar{N}} + \partial_r \right) \bar{\mathcal{F}} - \frac{2}{r^2} L_R^{EFT} = 0. \quad (4.54)$$

A negyedik (4.42) egyenlet azonossággá válik, mivel (4.44) teljesül.

Az (4.52), (4.53) egyenletekből megkapjuk a Schwarzschild téridőben szereplő együtt-hatókat. Először kivonjuk egymásból a két egyenletet, melyből az

$$\bar{M} = \bar{N}^{-1} \quad (4.55)$$

összefüggéshez jutunk, majd ezt visszahelyettesítve a (4.53) egyenletbe, az integrációs konstanst $2m$ -nek választva megkapjuk, hogy:

$$\bar{N} = \sqrt{1 - \frac{2m}{r}}, \quad (4.56)$$

$$\bar{M} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{2m}{r}}}, \quad (4.57)$$

a (4.54) egyenlet pedig azonossághoz vezet.

Ezzel ellenőriztük, hogy az EFT gravitációelméletek gömbszimmetrikus, sztatikus téridőire levezetett egyenletrendszer az általános relativitáselméletre alkalmazva a Schwarzschild megoldás áll elő.

5. Mértéktranszformációk és rögzítés skalár-tenzor elméletekben

A skalár-tenzor elméletekben a feketelyuk-perturbációk tárgyalásában ezidáig nem sikerült megfelelő mértékrögzítést létesíteni. A probléma abban áll, hogy a mértékrögzítés után a perturbációk tetszőleges időfüggvényt tartalmaznak [27].

Ebben a fejezetben tárgyalni fogom a nemmerőleges $2 + 1 + 1$ felbontás segítségével elérhető mértékrögzítést a gravitáció legáltalánosabb skalár-tenzor elméleteiben, mely megszünteti ezt a problémát. Az ívelemnégyszet a perturbációk első rendjében

$$\begin{aligned}
ds^2 &= d\bar{s}^2 - (2\bar{N}\delta N - 2\bar{g}_{ab}\bar{N}^a\delta N^b \\
&\quad - \bar{N}^a\bar{N}^b\delta g_{ab} - 2\bar{\mathcal{N}}\delta\mathcal{N}) dt^2 \\
&\quad + (2\bar{g}_{ab}\bar{M}^a\delta M^b + \bar{M}^a\bar{M}^b\delta g_{ab} + 2\bar{M}\delta M) d\chi^2 \\
&\quad + 2(\bar{g}_{ab}\bar{N}^a\delta M^b + \bar{g}_{ab}\bar{M}^a\delta N^b + \bar{N}^a\bar{M}^b\delta g_{ab} \\
&\quad + \bar{\mathcal{N}}\delta M + \bar{M}\delta\mathcal{N}) dt d\chi + \delta g_{ab} dx^a dx^b \\
&\quad + 2(\bar{g}_{ab}\delta N^b + \bar{N}^b\delta g_{ab}) dt dx^a \\
&\quad + 2(\bar{g}_{ab}\delta M^b + \bar{M}^b\delta g_{ab}) d\chi dx^a .
\end{aligned} \tag{5.1}$$

Itt a felülvonás a perturbálatlan mennyiségeket jelöli. Gömbszimmetrikus háttér esetén $\bar{N}^a = \bar{M}^a = 0$, valamint nem csökkentjük a tárgylás általános jellegét, amennyiben a háttéren merőleges kettős fóliázást engedünk meg $\bar{\mathcal{N}} = 0$, így

$$\begin{aligned}
d\bar{s}^2 &= -(\bar{N}^2 + 2\bar{N}\delta N) dt^2 + 2\bar{M}\delta\mathcal{N} dt d\chi + 2\delta N_a dt dx^a \\
&\quad + (\bar{g}_{ab} + \delta g_{ab}) dx^a dx^b + 2\delta M_a dx^a d\chi + (\bar{M}^2 + 2\bar{M}\delta M) d\chi^2 .
\end{aligned} \tag{5.2}$$

Természetesen a perturbált \mathcal{N} eltűnését nem fogjuk kikötni.

5.1. Vektorok és szimmetrikus tenzorok felbontása páros és páratlan szektorokra

Gömbszimmetrikus háttéren Helmholtz-szerű felbontások érvényesek, az alábbiak szerint vektorokra:

$$V_a = \bar{D}_a V_{\text{rotfree}} + E^b{}_a \bar{D}_b V_{\text{divfree}} , \tag{5.3}$$

ahol

$$E_{ab} = \sqrt{\bar{g}} \varepsilon_{ab} , \quad \varepsilon_{\theta\varphi} = 1 \quad (5.4)$$

a Levi–Civita sűrűség, a rotfree, illetve divfree pedig rotációmentes, illetve divergenciamentes járulékokat jelöl. Szimmetrikus tenzorokra pedig:

$$S_{ab} = S_{ba} = \bar{g}_{ab} S_{\text{scalar}} + \bar{D}_a \bar{D}_b S_{\text{rotfree}} + \frac{1}{2} (E^c{}_a \bar{D}_c \bar{D}_b + E^c{}_b \bar{D}_c \bar{D}_a) S_{\text{divfree}} . \quad (5.5)$$

Megjegyezzük, hogy a divergenciamentes járulékok alkotják a páratlan szektort, a rotációmentes és skalár jellegű járulékok pedig a páros szektort. Alkalmazva a felbontásokat a feketelyuk-perturbációkra:

$$\begin{aligned} \delta N_a &= \bar{D}_a P + E^b{}_a \bar{D}_b Q , \\ \delta M_a &= \bar{D}_a V + E^b{}_a \bar{D}_b W , \\ \delta g_{ab} &= \bar{g}_{ab} A + \bar{D}_a \bar{D}_b B + \frac{1}{2} (E^c{}_a \bar{D}_c \bar{D}_b + E^c{}_b \bar{D}_c \bar{D}_a) C , \end{aligned} \quad (5.6)$$

a páros szektor metrikus változói:

$$P, V, A, B, \delta N, \delta \mathcal{N}, \delta M ,$$

a páratlan szektoré pedig:

$$Q, W, C .$$

Megjegyzem, hogy az előző fejezetben tárgyalt konformis faktor a páros szektorú A változóval $A = e^{2\zeta} - 1$ kapcsolatban áll.

5.2. Mértéktranszformációk

A mértéktranszformációkat a diffeomorfizmusok jelentik. Ezek tulajdonképpen a 4 koordináta megváltoztatásából származnak az alábbi kis mennyiségekkel:

$$(\xi^t, \xi^x, \xi^a = \bar{D}^a \xi + E^{ba} \bar{D}_b \eta) , \quad (a = \theta, \varphi) .$$

A diffeomorfizmusok hatására a metrika és a skalár következőképpen változnak meg:

$$\mathfrak{L}_\xi \tilde{g}_{ab} = \delta \tilde{g}_{ab} - \widehat{\delta \tilde{g}_{ab}} , \quad \mathfrak{L}_\xi \phi = \delta \phi - \widehat{\delta \phi} . \quad (5.7)$$

Itt a kalap az adott (perturbált) mennyiség diffeomorfizmus utáni értéke. Részletesen kiírva:

$$\begin{aligned}
\widehat{\delta N} &= \delta N - \bar{N}\dot{\xi}^t - \bar{N}'\xi^x, \\
\widehat{\delta \mathcal{N}} &= \delta \mathcal{N} - \frac{\bar{N}^2}{2\bar{M}}\xi^{t'} + \frac{\bar{M}}{2}\dot{\xi}^x, \\
\widehat{\delta M} &= \delta M + \bar{M}'\xi^x + \bar{M}\xi^{x'}, \\
\widehat{P} &= P - \bar{N}^2\xi^t + \dot{\xi}, \\
\widehat{Q} &= Q + \dot{\eta}, \\
\widehat{V} &= V + \bar{M}^2\xi^x + \xi' - \frac{2}{\chi}\xi, \\
\widehat{W} &= W + \eta' - \frac{2}{\chi}\eta, \\
\widehat{A} &= A + \frac{2}{\chi}\xi^x, \\
\widehat{B} &= B + 2\xi, \\
\widehat{C} &= C + 2\eta, \\
\widehat{\delta\phi} &= \delta\phi - \bar{\phi}'\xi^x.
\end{aligned} \tag{5.8}$$

5.3. Mértékrögztés

A következőkben végrehajtjuk azt a mértékrögztést, mely a perturbációk tárgyalását egyértelművé teszi:

$$\begin{aligned}
\xi^x \text{ megválasztásával elérhető } \widehat{\delta\phi} &= 0 \\
\xi \text{ megválasztásával elérhető } \widehat{B} &= 0 \\
\eta \text{ megválasztásával elérhető } \widehat{C} &= 0
\end{aligned}$$

Ezek következményeként a perturbált metrika a háttérmetrikából konformis transzformáció segítségével áll elő:

$$\widehat{g}_{ab} = (1 + \widehat{A})\bar{g}_{ab}. \tag{5.9}$$

Hátra van a ξ^t diffeomorfizmus-generátor megválasztása. Korábban, a merőleges kettős fóliázás követelménye miatt egyetlen lehetőség adódott:

$$\widehat{\delta \mathcal{N}} = 0.$$

Azonban az új formalizmus kidolgozása ezt már nem követeli meg, így

$$\widehat{P} = 0$$

választással élhetünk.

Összefoglalásul megadjuk mégegyszer a mérték-választás merőleges kettős fóliázás esetén:

$$\xi^t = \int d\chi \frac{2\bar{M}}{\bar{N}^2} \left(\delta\mathcal{N} + \frac{\bar{M}}{2} \dot{\xi}^x \right) + F(t, \theta, \varphi), \quad \xi^x = \frac{\delta\phi}{\bar{\phi}}, \quad \xi = -\frac{B}{2}, \quad \eta = -\frac{C}{2}, \quad (5.10)$$

valamint nemmerőleges kettős fóliázás esetén:

$$\xi^t = \frac{P + \dot{\xi}}{\bar{N}^2}, \quad \xi^x = \frac{\delta\phi}{\bar{\phi}}, \quad \xi = -\frac{B}{2}, \quad \eta = -\frac{C}{2}. \quad (5.11)$$

Belátható, hogy a \widehat{Q}, \widehat{W} páratlan szektort az utolsó választás nem befolyásolja. Ezért volt lehetséges a feketelyuk-perturbációk páratlan szektorának tárgyalása. Az egyébként is jóval bonyolultabb $\widehat{V}, \widehat{A}, \widehat{\delta N}, \widehat{\delta \mathcal{N}}, \widehat{\delta M}, \widehat{P}$ változók által alkotott páros szektor tárgyalása azonban függ ξ^t megválasztásától. Első esetben \widehat{P} tetszőleges időfüggvényt tartalmaz, második esetben pedig eltűnik. Tehát megfelelő mértékrögztítés után 5 páros jellegű változó marad.

5.4. A feketelyuk-perturbációs változók páros / páratlan jellege

A következőkben megvizsgálom a 4. fejezetben bevezetett feketelyuk-perturbációkat jellemző mennyiségek páros / páratlan jellegét elsőrendben. A (4.4) hatás változói közül a metrikus N, M elsőrendű variációi páros változók (origóra tükrözés esetén változatlanok), ilyen $\mathcal{N} = \delta\mathcal{N}$ is. A 2-dimenziós görbületi skalár (integrális értelemben igaz) elsőrendű variációja $\delta R = -4\zeta/r^2$ szintén páros. A fennmaradó $\mathcal{K}, K, \mathcal{L}^*, L^*, \lambda^*$ származtatott mennyiségek elsőrendű variációjának paritását pedig az alábbiakban vizsgáljuk meg.

A \mathcal{K} mennyiség elsőrendű variációja (4.27) szerint a páros δM és $\delta\mathcal{N}$ miatt szintén páros jellegű. Mivel K elsőrendű variációja (4.26) szerint megadható (elhagyható négyesdivergencia erejéig) a páros $\delta\mathcal{K}$ és $\delta\mathcal{N}$ segítségével, ő is páros. Az \mathcal{L}^* változó

elsőrendű variációja (4.28) értelmében a páros δM és δN változók függvénye, tehát páros.

A λ^* mennyiség (4.12) elsőrendű variációja arányos δL^* -vel, tehát utóbbi határozza meg páros / páratlan jellegét. A (4.23), (4.30), (4.32) összefüggés δL^* perturbációt a páros δN , δM , ζ , $\delta \mathcal{L}^*$ változókkal adja meg.

Tehát elsőrendben a hatás összes változója páros.

6. Gömbszimmetrikus, statikus feketelyuk-perturbációk a EFT skalár-tenzor elméletekben

6.1. Perturbációszámítás és stabilitási kritériumok

A modern fizikában nem elegendő a jelenségek dinamikáját figyelni, hanem a perturbációk viselkedését is nyomon kell követni. Klasszikus példa erre az állításra az Einstein sztatikus univerzum, mely egy negatív kozmológiai állandóval kiegészített Einstein-egyenlet megoldásaként áll elő. A konstans bevezetésével remélte Einstein megoldani azt a számára elfogadhatatlan eredményt, hogy az általános relativitáselmélet szerint az Univerzum nem sztatikus. A megoldás azonban nem bizonyult stabilnak: a perturbációk időben monoton növekedtek, Eddington–Lemaître, Lemaître, illetve de Sitter univerzumokhoz vezetve [49].

A perturbációk dinamikájának viselkedésében (a már említett Ostrogradsky instabilitáson kívül) a következő instabilitások fordulhatnak elő:

- ghost típusú instabilitások (negatív kinetikus tag),
- Laplace- vagy gradiens-instabilitások (negatív hangsebesség),
- tachion instabilitások (negatív tömegtag).

A skalár-tenzor elméletek gömbszimmetrikus fekete lyukainak perturbációit vizsgálni lehet a speciális feketelyuk-megoldások konkrét ismerete nélkül is. Egyedül a megoldásokhoz vezető differenciálegyenletek ismerete szükséges. Mint láttuk, ezeket a hatás elsőrendű perturbációi határozzák meg.

A hatás másodrendű perturbációi pedig a perturbációk fejlődésegyenleteit adják meg.

6.2. A metrika determinánsának első- és másodrendű variációja

A teljes EFT hatás perturbációjához szükség van a metrika 4-dimenziós determinánsának az első és másodrendű variációjára. Ehhez felhasználom a (4.31) képletet, melyben a perturbáció csak komformisan átskálázza az indukált metrikát (így választottam a mértékrögzítést is), továbbá a (3.7) összefüggést:

$$\begin{aligned}\delta g_{ab} &= \delta (e^{2\zeta} \bar{g}_{ab}) = (e^{2\zeta} - 1) \bar{g}_{ab} , \\ \bar{g}^{ab} \delta g_{ab} &= 2 (e^{2\zeta} - 1) .\end{aligned}\tag{6.1}$$

A determináns tehát: $g = (e^{2\zeta})^2 \bar{g}$. A metrika determinánsának (2.13) 2+1+1 felbontott alakja felhasználásával elvégezhető a variáció másodrendig:

$$\begin{aligned}\delta \sqrt{-\tilde{g}} &= \delta (NM \sqrt{g}) = NM \sqrt{g} - \overline{NM \sqrt{g}} \\ &= [(\bar{N} + \delta N) (\bar{M} + \delta M) e^{2\zeta} - \bar{N} \bar{M}] \sqrt{\bar{g}} \\ &= \left[\left(1 + \frac{\delta N}{\bar{N}}\right) \left(1 + \frac{\delta M}{\bar{M}}\right) (1 + 2\zeta + 2\zeta^2) - 1 \right] \bar{N} \bar{M} \sqrt{\bar{g}} \\ &= \left[\frac{\delta N}{\bar{N}} + \frac{\delta M}{\bar{M}} + \frac{\delta M \delta N}{\bar{M} \bar{N}} + 2\zeta + 2\zeta \frac{\delta N}{\bar{N}} + 2\zeta \frac{\delta M}{\bar{M}} + 2\zeta^2 \right] \overline{\sqrt{-\tilde{g}}} \\ &= \delta_1 \sqrt{-\tilde{g}} + \delta_2 \sqrt{-\tilde{g}},\end{aligned}\tag{6.2}$$

ahol

$$\begin{aligned}\delta_1 \sqrt{-\tilde{g}} &= \sqrt{-\tilde{g}} \left(\frac{\delta N}{\bar{N}} + \frac{\delta M}{\bar{M}} + 2\zeta \right) \\ \delta_2 \sqrt{-\tilde{g}} &= \sqrt{-\tilde{g}} \left[\frac{\delta M \delta N}{\bar{M} \bar{N}} + 2\zeta \left(\frac{\delta N}{\bar{N}} + \frac{\delta M}{\bar{M}} \right) + 2\zeta^2 \right].\end{aligned}\tag{6.3}$$

Megfigyelhető, hogy mind az elsőrendű, mind a másodrendű variációk csak a páros szektorba tartozó változókat tartalmazzák.

6.3. Az EFT hatás másodrendű variációja

A hatás másodrendű variációjához

$$\delta_2 S^{EFT} = \int d^4x \left(\sqrt{-\tilde{g}} \delta_2 L^{EFT} + \delta_1 \sqrt{-\tilde{g}} \delta_1 L^{EFT} + L^{EFT} \delta_2 \sqrt{-\tilde{g}} \right)\tag{6.4}$$

járulékait kell kiszámolni. A metrika determinánsának (6.3) első- és másodrendű variációját az előző alfejezetben kiszámoltam. A 4.5 alfejezetben számolt teljes elsőrendű (4.38) járulékból kivonva az $L^{EFT} \delta_1 \sqrt{-\tilde{g}}$ járulékot

$$\begin{aligned}
 \delta_1 L^{EFT} = & \left[\bar{N} L_N^{EFT} + \frac{1}{M} \left(\frac{2}{r} + \frac{\bar{N}'}{\bar{N}} + \partial_r \right) L_{\mathcal{L}^*}^{EFT} \right] \delta \ln N \\
 & + \left[\bar{M} L_M^{EFT} - \frac{2}{rM} \mathcal{F} + \frac{\bar{N}'}{\bar{M}\bar{N}} L_{\mathcal{L}^*}^{EFT} \right] \delta \ln M \\
 & - 2 \left[\frac{1}{\bar{M}} \left(\frac{2}{r} + \frac{\bar{N}'}{\bar{N}} + \partial_r \right) \mathcal{F} + \frac{2}{r^2} L_R^{EFT} \right] \zeta \\
 & + \frac{1}{\bar{N}\bar{M}} \left[\partial_r L_{\mathcal{K}}^{EFT} + \frac{2}{r} (L_{\mathcal{K}}^{EFT} - L_K^{EFT}) \right] \delta \mathcal{N}
 \end{aligned} \tag{6.5}$$

is előáll. Hátra van tehát $\delta_2 L^{EFT}$ meghatározása.

A (4.4) hatás változóinak variációi közül $\delta \varkappa$ és $\delta \mathfrak{K}$ másodrendű. A (4.5) definíciók szerint

$$\begin{aligned}
 \delta_2 \varkappa &= \delta K^a_b \delta K^b_a, \\
 \delta_2 \mathfrak{K} &= \delta \mathcal{K}^a \delta \mathcal{K}_a.
 \end{aligned} \tag{6.6}$$

A λ^* változó másodrendű pontossággal vett variációja $\delta \lambda^* = \delta_1 \lambda^* + \delta_2 \lambda^*$, ahol az elsőrendű variációt (4.12), a másodrendűt pedig:

$$\delta_2 \lambda^* = \delta L^{*a}_b \delta L^{*b}_a \tag{6.7}$$

adja.

A Taylor-sorfejtés formálisan elsőrendű részéből

$$L_{\varkappa}^{EFT} \delta_2 \varkappa + L_{\mathfrak{K}}^{EFT} \delta_2 \mathfrak{K} + L_{\lambda^*}^{EFT} \delta_2 \lambda^* \tag{6.8}$$

másodrendűek.

A teljes másodrendű járulékot a változók szerinti másodrendű Taylor-sorfejtéssel

határozhatjuk meg:

$$\begin{aligned}
 \delta_2 L^{EFT} = & L_{\varkappa}^{EFT} \delta_2 \varkappa + L_{\mathfrak{R}}^{EFT} \delta_2 \mathfrak{R} + L_{\lambda^*}^{EFT} \delta_2 \lambda^* + L_R^{EFT} \delta_2 R \\
 & + L_{\mathcal{K}}^{EFT} \delta_2 \mathcal{K} + L_K^{EFT} \delta_2 K + L_{\mathcal{L}^*}^{EFT} \delta_2 \mathcal{L}^* + L_{L^*}^{EFT} \delta_2 L^* \\
 & + \frac{1}{2} [L_{NN}^{EFT} (\delta N)^2 + L_{MM}^{EFT} (\delta M)^2 + L_{\mathcal{K}\mathcal{K}}^{EFT} (\delta_1 \mathcal{K})^2 + L_{KK}^{EFT} (\delta_1 K)^2 \\
 & + L_{\mathcal{L}^* \mathcal{L}^*}^{EFT} (\delta_1 \mathcal{L}^*)^2 + L_{L^* L^*}^{EFT} (\delta_1 L^*)^2 + L_{\lambda^* \lambda^*}^{EFT} (\delta_1 \lambda^*)^2 + L_{RR}^{EFT} (\delta_1 R)^2] \\
 & + L_{NM}^{EFT} \delta N \delta M + L_{NK}^{EFT} \delta N \delta_1 \mathcal{K} + L_{NK}^{EFT} \delta N \delta_1 K + L_{N\mathcal{L}^*}^{EFT} \delta N \delta_1 \mathcal{L}^* \\
 & + L_{NL^*}^{EFT} \delta N \delta_1 L^* + L_{N\lambda^*}^{EFT} \delta N \delta_1 \lambda^* + L_{NR}^{EFT} \delta N \delta_1 R + L_{MK}^{EFT} \delta M \delta_1 \mathcal{K} \\
 & + L_{MK}^{EFT} \delta M \delta_1 K + L_{M\mathcal{L}^*}^{EFT} \delta M \delta_1 \mathcal{L}^* + L_{ML^*}^{EFT} \delta M \delta_1 L^* + L_{M\lambda^*}^{EFT} \delta M \delta_1 \lambda^* \\
 & + L_{MR}^{EFT} \delta M \delta_1 R + L_{\mathcal{K}\mathcal{K}}^{EFT} \delta_1 \mathcal{K} \delta_1 \mathcal{K} + L_{\mathcal{K}\mathcal{L}^*}^{EFT} \delta_1 \mathcal{K} \delta_1 \mathcal{L}^* + L_{\mathcal{K}L^*}^{EFT} \delta_1 \mathcal{K} \delta_1 L^* \\
 & + L_{\mathcal{K}\lambda^*}^{EFT} \delta_1 \mathcal{K} \delta_1 \lambda^* + L_{\mathcal{K}R}^{EFT} \delta_1 \mathcal{K} \delta_1 R + L_{K\mathcal{L}^*}^{EFT} \delta_1 K \delta_1 \mathcal{L}^* + L_{KL^*}^{EFT} \delta_1 K \delta_1 L^* \\
 & + L_{K\lambda^*}^{EFT} \delta_1 K \delta_1 \lambda^* + L_{KR}^{EFT} \delta_1 K \delta_1 R + L_{\mathcal{L}^* L^*}^{EFT} \delta_1 \mathcal{L}^* \delta_1 L^* + L_{\mathcal{L}^* \lambda^*}^{EFT} \delta_1 \mathcal{L}^* \delta_1 \lambda^* \\
 & + L_{\mathcal{L}^* R}^{EFT} \delta_1 \mathcal{L}^* \delta_1 R + L_{L^* \lambda^*}^{EFT} \delta_1 L^* \delta_1 \lambda^* + L_{L^* R}^{EFT} \delta_1 L^* \delta_1 R \\
 & + L_{\lambda^* R}^{EFT} \delta_1 \lambda^* \delta_1 R .
 \end{aligned} \tag{6.9}$$

Az elsőrendű variációk közötti kapcsolatokat a 4.5 alfejezetben már meghatároztam. A fennmaradó másodrendű variációkat a következőkben tárgyalom.

A 2-dimenziós görbületi skalár variációját $R = e^{-2\zeta} (\bar{R} - 2\bar{g}^{ab} \bar{D}_a \bar{D}_b e^\zeta)$ összefüggés másodrendű sorfejtéséből lehet előállítani:

$$\delta R = \delta_1 R + \delta_2 R , \tag{6.10}$$

ahol

$$\delta_2 R = 2\bar{R}\zeta^2 + 4\zeta\bar{g}^{ab}\bar{D}_a\bar{D}_b\zeta - \bar{g}^{ab}\bar{D}_a\bar{D}_b\zeta^2 . \tag{6.11}$$

Az utolsó tag (az elsőrendű tag megfelelő tagjához hasonlóan) az általánosított Stokes-tétel értelmében nem ad járulékot a hatás másodrendű variációjához, ezért elhagyható. A \mathcal{K} , K , \mathcal{L}^* és L^* másodrendű variációjának meghatározása még hátra van. Ezek után meghatározom a másodrendű variációk páros / páratlan jellegét. Például $\delta_2 R$ páros, mert a ζ páros változóval lett kifejezve. A (2.6) összefüggések azt mutatják továbbá, hogy ezeknek a mennyiségeknek a variációi tartalmaznak páros változókat, valamint az N^a és M^a mind páros, mind páratlan részeit. Utóbbiak azonban D -deriváltakal kontrahálva jelennek meg az említett \mathcal{K} , K , \mathcal{L}^* és L^* változóknak, így parciális integrálás után a páratlan rész divergenciája állítható elő, ami eltűnik. Tehát páratlan szektorú másodrendű variációk csak az (6.6) és (6.7) kifejezésekből származnak.

A másodrendű hatás páros és páratlan szektorú változói szerinti variáció meg fogja adni a perturbációk mozgásegyenleteit. Ezeket a 6.1 alfejezetben ismertetett stabilitási kritériumok szerint kell vizsgálni és kiróni a stabilitási kritériumokat.

7. Összefoglalás

A modern fizikában a gravitáció nem más, mint téridő-görbület. Az árapályerőkhöz hasonló szerepet betöltő Riemann-tenzort a metrikus tenzorból lehet származtatni, mely a newtoni potenciált általánosítja. A metrikus tenzor dinamikáját az általános relativitáselméletben az Einstein-egyenletek adják meg. Az elmélet jóslatait rendkívül pontosan sikerült ellenőrizni, mind a Naprendszer-tesztek, mind a kettős pulzárak és gravitációs hullámok megfigyelése igazolta őket. Kozmológiai megfigyeléseink szerint, viszont az Univerzum összesen mintegy 95%-át ismeretlen alkotóelemek, sötét energia és sötét anyag alkotja, ezeket ezidáig nem sikerült közvetlenül megfigyelni. Emiatt elképzelhető, hogy ezek nem új fizikai mezők / részecskék, hanem a gravitáció módosul nagy távolságokon. Ez a felismerés adta a létjogosultságát a módosított gravitációelméleteknek. A megfigyelésekkel leginkább összhangban lévő ilyen elméletek az ún. skalár-tenzor elméletek. Ezen belül a Horndeski elméletcsaládban kizárólag másodrendű differenciálegyenletek fordulnak elő, míg az ún. effektív térelméleti modellekben előfordulhat magasabb rendű dinamika is, de a szabadsági fokok terjedése továbbra is másodrendű, tehát Ostrogradsky-instabilitásoktól mentes.

A módosított gravitációelméleteknek főként a kozmológiai jellegű és a feketelyuk-megoldásait lehet összevetni a megfigyelésekkel, ezért ezek tanulmányozása igen fontos. Míg előbbiek vizsgálata előrehaladott, a feketelyuk-megoldások stabilitásának vizsgálata távolról sem befejezett. A perturbációk szétesnek páratlan és páros, egymással kölcsön nem ható részekre, és csupán előbbiek tárgyalása volt eddig sikeres. A páros perturbációk vizsgálatának útjába az alkalmazott ún. $2+1+1$ felbontás egyik technikai feltétele, a fóliázások merőlegessége állt. A nem-merőleges kettős fóliázáson alapuló $2+1+1$ felbontás kidolgozását bemutató munkával a 2017-ben szervezett XXXIII. Országos Tudományos Diákköri Konferencia Extragalaktikus Asztrofizika tagozat első díját nyertem el.

Az új formalizmus első alkalmazásaként az általános relativisztikus Einstein–Hilbert hatást bontottam fel. Megadtam a beágyazási geometriai mennyiségekkel szoros kapcsolatban álló impulzusokat, levezettem a hamiltoni- és diffeomorfizmus-kényszereket, valamint a hatásban előállítható határ-tagokat. Megadtam a hamiltoni mozgásegyenleteket a kényszerek segítségével. Ehhez át kellett térnem a fázistérre, funkcionális Poisson-zárójeleket és simított hamiltoni kényszereket vezettem be. Az [31]-es hivatkozásban prezentált hamiltoni formalizmus eredményeit reprodukáltam, azokat a

harmadik diffeomorfizmus-kényszer és megfelelő határtag levezetésével egészítettem ki. Ezt a munkát a referált Universe folyóiratban publikáltuk [33], illetve a nemzetközi Solvay konferencián mutattam be poszter formájában [34].

A hamiltoni formalizmus dinamikusan fejlődő fekete lyukak tanulmányozására alkalmazható. Gömbszimmetrikus vákuum esetén az einsteini fekete lyukak kizárólag Schwarzschild-téridők lehetnek. Egyéb, kompakt eseményhorizonttal rendelkező fekete lyukak esetén a χ koordináta radiális jellegűvé válik, így az \mathcal{L}_χ^G határtag az origóban egy regularitási feltételhez vezet, az \mathcal{L}_D^G határtag pedig az általánosított Stokes-tétel értelmében eltűnik. A többi határtag eltűnését a t és χ koordináták végtelen értékénél a hatás megfelelő határtagokkal való korrekciója biztosíthatja. Az Einstein-gravitáció 3. fejezetben bemutatott hamiltoni tárgyalása mintájául szolgálhat bonyolultabb skalár-tenzor elméletek hamiltoni tárgyalásának.

A 4. fejezetben a gravitációshullám-mérésekkel kompatibilis legáltalánosabb skalár-tenzor, az ún. EFT elméletek dinamikáját vizsgáltam. Gömbszimmetrikus, sztatikus háttéren elvégeztem a legáltalánosabb, metrikus és beágyazási változókból képezett skalároktól függő hatás elsőrendű variációját, levezetve a mozgásegyenleteket. A számolások során kijavítottam az [27]-es hivatkozás állítását, miszerint egy adott elsőrendű perturbáció nulladrendű járulékhöz vezet. Ez azonban [27]-ben nem vezetett hibához, az ott bemutatott három mozgásegyenletet reprodukáltam. A kettős fóliázás nem-merőlegessége azonban egy negyedik, új mozgásegyenlethez vezetett, melynek legegyszerűbb megoldása lényegesen egyszerűsíti a dinamikát. Az EFT hatást az Einstein–Hilbert hatásra specifikálva a dinamikai egyenletekből levezettem, hogy a Schwarzschild-téridő az egyetlen megoldás.

Az 5. fejezetben a megengedett legáltalánosabb skalár-tenzor elméletekben vizsgáltam meg a gömbszimmetrikus fekete lyukak perturbációit és egyértelmű mértékrögzítést vezettem be. Helmholtz-szerű tételek alkalmazásával megadtam a perturbációk felbontását páros és páratlan szektorokra, majd a diffeomorfizmusok hatását vizsgálva, megmutattam, hogy elérhető a mérték alkalmas megválasztásával, hogy az indukált metrika mindössze konformis átskálázáson esik át a perturbáció hatására, valamint a korábbi formalizmusban megjelenő tetszőleges időfüggvény kiküszöbölhető. Ezt a munkát eddig három nemzetközi előadáson ismertettem, a Szcsecini Egyetem Kozmológiai csoportjában, a római La Sapienza egyetemen szervezett 15. Marcel Grossmann találkozón, illetve a Valenciában tartott FUGA konferencián. A 2+1+1 felbontott általános relativisztikus Hamiltoni dinamikát és a skalár-tenzor elméletek mértékrögzítését tárgyaló szakkikkünket 2019-ben a Physical Review D folyóirat közlésre elfogadta, valamint az ezeket szintén ismertető XXXIV. Országos Tudományos Diákköri Konferenciára benyújtott dolgozatom az Elméleti asztrofizika és asztrodinamika tagozat

első díját nyerte el.

Az egyértelmű mértékrögzítés lehetővé teszi a perturbáció dinamikájának vizsgálatát. Ehhez a megengedett általános EFT hatás másodrendű variációjára van szükség. A másodrendű variációk ugyanis megadják az elsőrendű perturbációk fejlődését. Ennek levezetése folyamatban van, részleges eredményeket a 6. fejezet tartalmaz.

8. Nyilatkozat

Alulírott Gergely Cecília Fizikus MSc szakos hallgató (ETR azonosító: NACWAAT.SZE, Neptun kód: OJYI8X) a *Hamiltoni fejlődés és feketelyuk-perturbációk skalár-tenzor gravitációelméletekben* diplomamunka szerzője fegyelmi felelősségem tudatában kijelentem, hogy dolgozatom önálló munkám eredménye, saját szellemi termékem, abban a hivatkozások és idézések általános szabályait következetesen alkalmaztam, mások által írt részeket a megfelelő idézés nélkül nem használtam fel.

Szeged, 2019. május 16.

.....
hallgató aláírása

9. Köszönetnyilvánítás

Köszönöm a családomnak, hogy támogatták az MSc tanulmányaimat költségtérítéses formában is. Ez a munka nem jöhetett volna létre témavezetőm és társszerzőim útmutatása nélkül. Köszönettel tartozom az Új Nemzeti Kiválósági Programnak a 2017-18. és 2018-19. tanévek során nyújtott ösztöndíjakért. Hálás vagyok a CANTATA CA-15117 COST és a GWverse CA-16104 COST kollaborációknak, továbbá a 123996 számú NKFI kutatási pályázatnak, hogy lehetőséget biztosítottak nemzetközi konferenciákon való részvételhez.

Hivatkozások

- [1] LIGO Scientific and Virgo Collaborations, *Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger*, Phys. Rev. Lett. **116**, 061102 (2016).
- [2] LIGO Scientific and Virgo Collaborations, *GW151226: Observation of Gravitational Waves from a 22-Solar-Mass Binary Black Hole Coalescence*, Phys. Rev. Lett. **116**, 241103 (2016).
- [3] LIGO Scientific and Virgo Collaborations, *GW170104: Observation of a 50-Solar-Mass Binary Black Hole Coalescence at Redshift 0.2*, Phys. Rev. Lett. **118**, 221101 (2017).
- [4] LIGO Scientific and Virgo Collaborations, *GW170608: Observation of a 19-Solar-Mass Binary Black Hole Coalescence*, Astrophys. J. Lett. **851**, L35 (2017).
- [5] LIGO Scientific and Virgo Collaborations, *GW170814: A Three-Detector Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Coalescence*, Phys. Rev. Lett. **119**, 141101 (2017).
- [6] LIGO Scientific and Virgo Collaborations, *GW170817: Observation of Gravitational Waves from a Binary Neutron Star Inspiral*, Phys. Rev. Lett. **119**, 161101 (2017).
- [7] LIGO Scientific and Virgo Collaborations, *Tests of General Relativity with GW150914*, Phys. Rev. Lett. **116**, 221101 (2016).
- [8] LIGO Scientific and Virgo Collaborations, Fermi Gamma-ray Burst Monitor, and INTEGRAL, *Gravitational Waves and Gamma-Rays from a Binary Neutron Star Merger: GW170817 and GRB170817A*, Astrophys. J. Lett. **848**, L13 (2017).
- [9] S. Mirshekari, N. Yunes, and C. M. Will, *Constraining Lorentz-violating, Modified Dispersion Relations with Gravitational Waves*, Phys. Rev. D **85**, 024041 (2012).
- [10] LIGO Scientific and Virgo Collaborations, *Tests of General Relativity with the Binary Black Hole Signals from the LIGO-Virgo Catalog GWTC-1*, (2019) [arXiv:1903.04467 [gr-qc]].
- [11] I. H. Stairs, *Testing General Relativity with Pulsar Timing*, Living Rev. Relativ. **6**(1): 5 (2003).

-
- [12] C. W. F. Everitt et al., *Gravity Probe B: Final Results of a Space Experiment to Test General Relativity*, Phys. Rev. Lett. **106**, 221101 (2011).
- [13] The Event Horizon Telescope Collaboration, *First M87 Event Horizon Telescope Results. I. The Shadow of the Supermassive Black Hole*, Astrophys. J. Lett. **875**, L1 (2019).
- [14] The Event Horizon Telescope Collaboration, *First M87 Event Horizon Telescope Results. II. Array and Instrumentation*, Astrophys. J. Lett. **875**, L2 (2019).
- [15] The Event Horizon Telescope Collaboration, *First M87 Event Horizon Telescope Results. III. Data Processing and Calibration*, Astrophys. J. Lett. **875**, L3 (2019).
- [16] The Event Horizon Telescope Collaboration, *First M87 Event Horizon Telescope Results. IV. Imaging the Central Supermassive Black Hole*, Astrophys. J. Lett. **875**, L4 (2019).
- [17] The Event Horizon Telescope Collaboration, *First M87 Event Horizon Telescope Results. V. Physical Origin of the Asymmetric Ring*, Astrophys. J. Lett. **875**, L5 (2019).
- [18] The Event Horizon Telescope Collaboration, *First M87 Event Horizon Telescope Results. VI. The Shadow and Mass of the Central Black Hole*, Astrophys. J. Lett. **875**, L6 (2019).
- [19] M. Milgrom, *MOND theory*, Canadian Journal of Physics, **93**(2): 107 (2015) [arXiv:1404.7661 [astro-ph.CO]].
- [20] Planck Collaboration, *Planck 2018 results. VI. Cosmological parameters*, benyújtva publikálásra az Astronomy & Astrophysics folyóirathoz (2018), [arXiv:1807.06209 [astro-ph.CO]].
- [21] M. Jerome, *Everything you always wanted to know about the cosmological constant problem (but were afraid to ask)*, Comptes Rendus Physique **13.6-7** : 566-665 (2012).
- [22] M. P. Hobson, G. P. Efstathiou, A. N. Lasenby, *General Relativity: An introduction for physicists*, 187, Cambridge University Press (2006).
- [23] G. W. Horndeski, *Second-Order Scalar-Tensor Field Equations in a Four-Dimensional Space*, Int. J. Theor. Phys. **10**, 363-384 (1974).

-
- [24] C. Deffayet, X. Gao, D. A. Steer, G. Zahariade, *From k-essence to generalized Galileons*, Phys. Rev. D. **84**, 064039 (2011).
- [25] J. Gleyzes, D. Langlois, F. Piazza, and F. Vernizzi, *Healthy theories beyond Horndeski*, Phys. Rev. Lett. **114**, 211101 (2015).
- [26] J. Gleyzes, D. Langlois, F. Piazza, and F. Vernizzi, *Essential building blocks of dark energy*, J. Cosmol. Astropart. Phys. 08 (2013) 025.
- [27] R. Kase, L. Á. Gergely, S. Tsujikawa, *Effective field theory of modified gravity on spherically symmetric background: leading order dynamics and the odd mode perturbations*, Phys. Rev. D **90**, 124019 (2014) [arXiv:1406.2402 [hep-th]].
- [28] R. Arnowitt, S. Deser, C. W. Misner, *Gravitation: An Introduction to Current Research*, 7. fejezet, 227–265, szerkesztő L. Witten, Wiley, New York (1962).
- [29] C. Nagy, *Gravitációs dinamika kétszeresen fóliázható téridőkben*, OTDK pályamunka, FiFöMa szekció, Extragalaktikus Asztrofizika tagozat, I. helyezés (2017).
- [30] L. Á. Gergely, Z. Kovács, *Gravitational dynamics in $s+1+1$ dimensions*, Phys. Rev. D **72**, 064015 (2005). A (β_a) mennyiségek jelölései ebben a munkában (λ_a) .
- [31] Z. Kovács, L. Á. Gergely, *Gravitational dynamics in $s+1+1$ dimensions II. Hamiltonian theory*, Phys. Rev. D **77**, 024003 (2008).
- [32] C. Gergely, Z. Keresztes, L. Á. Gergely, *Hamiltonian dynamics in doubly-foliable space-times*, 10th Bolyai–Gauss–Lobachevsky Conference, előadás, (2017).
- [33] C. Gergely, Z. Keresztes, L. Á. Gergely, *Hamiltonian Dynamics of Doubly-Foliable Space-Times*, Universe (2018), 4(1), 9; doi:10.3390/universe4010009.
- [34] C. Gergely, Z. Keresztes, L. Á. Gergely, *Gravitational waves and scalar perturbations in spherically symmetric scalar-tensor theories*, Solvay workshop on "Sugar2018: Searching for the sources of galactic and extragalactic cosmic rays", poszter (2018).
- [35] C. Gergely, Z. Keresztes, L. Á. Gergely, *Hamiltonian dynamics and gauge choices in doubly-foliable space-times*, Szczecin Cosmology Group, Faculty of Mathematics and Physics, Institute of Physics, University of Szczecin, előadás (2018).

-
- [36] C. Gergely, Z. Keresztes, L. Á. Gergely, *Doubly-foliable space-times and gauge-fixing of scalar-tensor perturbations*, The 15th Marcel Grossmann Meeting, Alternative Theories, Extended Theories of Gravity and Quantum Cosmology (S. Capozziello, M. De Laurentis) **C**, előadás (2018).
- [37] C. Gergely, Z. Keresztes, L. Á. Gergely, *Gauge-fixing of black hole perturbations in the beyond Horndeski theories*, The FUTURE Gravitational Alternatives (FUGA), előadás (2018).
- [38] C. Gergely, Z. Keresztes, L. Á. Gergely, *Gravitational dynamics in 2+1+1 decomposed space-time along nonorthogonal double foliations: Hamiltonian evolution and gauge fixing*, Phys. Rev. D, publikálásra elfogadva (2019).
- [39] C. Gergely, Feketelyuk-perturbációk skalár-tenzor gravitációelméletekben, OTDK pályamunka, FiFöMa szekció, Elméleti asztrofizika és asztrodinamika tagozat, I. helyezés (2019).
- [40] P. Creminelli, F. Vernizzi, *Dark Energy after GW170817*, Phys. Rev. Lett. **119**, 251302 (2017).
- [41] C. Deffayet, O. Pujolàs, I. Sawicki, A. Vikman, *Imperfect dark energy from kinetic gravity braiding*, JCAP 10(2010)026.
- [42] W. Israel, *Event Horizons in Static Vacuum Space-Times*, Phys. Rev. **164**, 1776 (1967).
- [43] D. C. Robinson, *Uniqueness of the Kerr Black Hole*, Phys. Rev. Lett. **34**, 905 (1975).
- [44] C. W. Misner, *Taub-Nut Space as a Counterexample to almost anything*, Relativity Theory and Astrophysics 160. oldal (1967).
- [45] A. Ashtekar, B. Krishnan, *Isolated and Dynamical Horizons and Their Applications*, Living Rev. Relativ. (2004) 7: 10.
- [46] S. W. Hawking, *Black holes in the Brans-Dicke theory of gravitation*, Commun. Math. Phys. **25**, 167 (1972).
- [47] T.P. Sotiriou, V. Faraoni, *Black Holes in Scalar-Tensor Gravity*, Phys. Rev. Lett. **108**, 081103 (2012).
- [48] R. Wald, *General Relativity*, University of Chicago Press, 446. oldal (1984).

- [49] S. Weinberg, *Cosmology*, Oxford University Press, 44.oldal (2008).