SZEGEDI TUDOMÁNYEGYETEM

Természettudományi Kar

Kísérleti Fizikai Tanszék

DIPLOMAMUNKA

Porkeverékek a gravitáció kanonikus elméletében

Készítette: Horváth Zsolt

Témavezető: Dr. Gergely Árpád László

SZEGED

2004

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés

Az általános relativitáselmélet klasszikus alapjaiból hiányzik az időfejlődés fogalma. Az Einstein-egyenletek különféle egzakt megoldásai a téridő teljes leírását adják, adott szimmetriák és anyagi források jelenlétében. Sok esetben a választott koordinátarendszer eleve lehetetlenné teszi, hogy fizikai rendszerek időfejlődéséről beszéljünk. Ezért szokás tér- és időkoordináták helyett általában térszerű és időszerű koordinátákról beszélni., ráadásul a megoldások egy része legegyszerűbben fényszerű koordináták (advanzsált és retardált idő) használatával írható fel.

A relativitáselmélet fejlődése során a fizikai mezők evolúcióját sikerült belefoglalni az elmélet fogalmi rendszerébe. A gravitáció kanonikus formalizmusában a téridőt térszerű hiperfelületekkel fóliázzuk, az egyes felületeket egy időparaméter címkézi. Egy kezdeti hiperfelületen definiált mező változását az egymást követő fóliákon nyomon lehet követni a hamiltoni formalizmusban.

Maga a metrika is indukál egy mezőt a hiperfelületeken, ami a négyesmetrika egyfajta vetülete ezekre a felületekre. Arnowitt, Deser és Misner 1962-ben levezették a vákuum téridő mozgásegyenleteit [1]. Az ADM formalizmusban az indukált metrika evolúciója mintegy felépíti a téridő geometriáját. Általában a négyesmetrika rekonstrukciója az indukált metrika hamiltoni fejlődéséből problémákba ütközik. Egyszerűbb téridők esetében azonban számos sikert értek el a kutatók. Kuchař 1994-ben publikálta munkáját, amelyben egy gömbszimmetrikus téridő geometrodinamikáját tárgyalja [2]. Az ADM formalizmust a Schwarzschild téridőre alkalmazva sikerült összefüggést felírnia az indukált metrika geometriai adatai és a Schwarzschild tömeg között.

Hasonló sikereket értek el az anyagi mezők időfejlődésének leírásában is. A számolások jelentősen egyszerűsödnek, ha a téridő fóliáin a koordinátákat a rajta lévő anyag természetes módon meghatározza. Brown és Kuchař [3] dolgozták ki az ilyen tulajdonságú anyag, a referenciapor elméletét. Míg a vákuum gravitáció kiindulópontja az egyszerű Einstein-Hilbert hatás, addig az anyagi mezők tárgyalásakor kulcsfontosságú a megfelelő, az anyagi forrást egyértelműen leíró hatásfunkcionál konstrukciója. Kutatásaik során Brown megvalósította [4] a tökéletes folyadék, Bičák és Kuchař [5] pedig a null por kanonikus leírását.

A null por főszerepet játszik a dolgozatban. A null por a sugárzás geometria optikai közelítése. Olyan jelenségeknél, amikor az energia a téridő minden pontjában azonos irányban és fénysebességgel terjed, célszerű az anyagot a null por energia-impulzus tenzorával leírni. A VI. fejezetben összehasonlítjuk a por és a null por mozgásegyenleteit. A legfontosabb különbség a két anyag között, hogy a null por nem ad meg kitüntetett időt a téridőn.

A Schwarzschild téridőnél bonyolultabb téridők ADM formalizmusának kidolgozására alkalmas jelölt a Gergely által levezetett gömbszimmetrikus sztatikus téridő [6], [7] , amellyel a III. fejezetben fogunk megismerkedni. Gergely téridőjében az anyagi források egymáson átáramló null por ármok. Bičák és Hájíček Kuchař eredményeire [2] támaszkodva megvalósította a gömbszimmetrikus null por áramok és a gömbszimmetrikus téridő gravitációjának csatolását [8] .

A dolgozat megírása során a fent említett témák egységes szemléletben történő, szisztematikus bemutatására törekedtem. A II. fejezetben megismerkedünk a gravitáció egyik egyszerű forrásával, a null porral. . Letelier kimutatta, hogy egy kétkomponensű null por keverék egy folyadékkal ekvivalens [9]. Mivel a folyadék négyessebessége normált, a porhoz hasonlóan kitüntetett sajátidővel rendelkezik. Gergely rámutatott arra [10], hogy emiatt ez egyúttal a porkeverék természetes időparamétere is. Ha sikerülne megalkotni az anizotróp folyadék kanonikus leírását, akkor sajátidőt tudnánk származtatni a kétkomponensű null por keverék számára variációs elvből, annak ellenére, hogy magányos null porhoz nem létezik ilyen [5]. A III. fejezetben Gergely gömbszimmetrikus sztatikus téridő megoldását [6], [7] vezetjük le. Ebben a téridőben a forrás egy null por keverék. Teszünk egy kitérőt a hengerszimmetrikus téridőkben kialakuló szingularitások ismertetése felé [11]. Bebizonyítjuk, hogy összeomló hengerszimmetrikus null por felhőben mindig kialakul egy szingularitás.

A IV. fejezetben Arnowitt, Deser és Misner formalizmusát ismertetjük [1]. Technikai részletek tekintetében Kovács [12], [13] dolgozataira utalunk, amelyek a magyar szakirodalomban egyedülállóak. A V. fejezetben rátértünk a null por kanonikus tárgyalására. Bičák és Kuchař formalizmusa [5] tökéletesen leírja a null port. Megvizsgáljuk a kényszerek algebráját, végül a Brown és Kuchař [3] által bevezetett por tér fogalmával ismerkedtünk meg. A VI. fejezetben a közönséges porról lesz szó. A motivációnk az, hogy összehasonlítást végezzünk a null por és a közönséges por között. A por hatást több ekvivalens alakban is megadjuk. A VII. fejezetben a porkeverékeket jellemző általános hatást elemezzük. Ezután a tökéletes folyadékkal foglalkozunk a VIII. fejezetben, Brown nyomán [4] . A tökéletes folyadék energia-impulzus tenzora kölcsönhatási tagot tartalmaz, ami hasonló alakú, mint Letelier anizotróp folyadékának feszültségtenzora. A téma tanulmányozása közelebb vezethet az anizotróp folyadék kanonikus leírásához.

A IX. fejezet Kuchař eredményeinek [2] összefoglalása. A Schwarzschild-téridő ADM formalizmusa a kanonikus vákuum gravitáció mindmáig legnagyobb sikere. Kuchař kidolgozta a hengerszimmetrikus gravitációs hullámok kanonikus elméletét is [14]. A fejezet végén felvázoljuk a teljes téridőn regulárisan viselkedő, Varadarajan [15] által definiált kanonikus transzformációt. A Kruskal koordináták előnye, hogy nem szingulárisak a horizonton. A X. fejezetben Bičák és Hájíček mukáját mutatjuk be [8] . Az általuk megadott hatást egy speciális esetre, a gömbszimmetrikusan bezuhanó null por felhő leírására alkalmazzuk.

A következő fejezetben a null porra vonatkozó klasszikus (azaz nem-kanonikus) ismeretanyagot foglaljuk össze, amelyek nélkülözhetetlenek a továbbiak megértéséhez.

2. A null por

2.1. A null por, mint a sugárzás geometriai optikai közelítése

A null por a nempolarizált sugárzás egyirányú radiális áramának nagyfrekvenciájú, geometriai optikai közelítését képviseli[6]. Ez egy ésszerű közelítés, valahányszor a sugárzás hullámhossza elhanyagolható a háttér görbületi sugarához képest. Az Einstein-egyenleteknek sokféle egzakt megoldását találták null por jelenlétében[22]. Néhány esetben akár a gravitáció is null porként viselkedhet. Price kimutatta, hogy egy összeomló szferoid minden kezdeti jellemzőjét szétsugározza, kivéve a tömegét, az impulzusmomentumát és a töltését[18]. A megszökő sugárzás részlegesen visszaszóródva kölcsönhat a háttér görbületével. Mind a megszökő, mind a visszaszórt sugárzás modellezhető null porral, minthogy a háttér görbületi sugara nagyobb, mint a sugárzás hullámhossza[19].Az alábbiakban Misner, Thorne és Wheeler [17] nyomán áttekintjük a null porra vonatkozó alapvető ismereteket. A null por olyan anyag, amelynek energia-impulzus tenzora

$$T^{\alpha\beta} = M k^{\alpha} k^{\beta} \ . \tag{1}$$

alakban írható. M egy téridő függvény, a porrészecskék eloszlásának tömegsűrűsége. A részecskék mozgását leíró k^{α} négyessebesség mező nullvektor:

$$k^\alpha k_\alpha = 0 \; . \tag{2}$$

k^α integrálgörbéi fényszerű kongruenciát határoznak meg, azaz a részecskék fényszerű világvonalakon mozognak. A (1) energia-impulzus tenzor alakjából látszik, hogy ha a négyessebesség-mezőt egy s skalármezővel való szorzással átskálázzuk és egyúttal a tömegsűrűség mezőt az $1/\sqrt{s}$ skalármezővel skálázzuk át, akkor az energia-impulzus tenzor nem változik. (1) e tulajdonságát úgy szokás megfogalmazni, hogy a null por energiájának szétválasztása tömegsűrűségre és négyessebességre önkényes és tetszőleges. Alkalmas átskálázással a tömegsűrűség akár bele is olvasztható a sebességbe, azaz kiküszöbölhető az egyenletekből [3].

$$T^{\alpha\beta} = l^\alpha l^\beta \; . \tag{3}$$

Ez azt is jelenti, hogy a null por energia-impulzus tenzorának négy független komponense van. $T^{\alpha\beta}$ megmaradása miatt l^α autoparalel vektor:

$$l^\beta \nabla_\beta l^\alpha + \left(\nabla_\beta l^\beta\right) l^\alpha = 0 \; . \tag{4}$$

A porrészecskék szabad mozgást végeznek, ezért világvonalaik geodetikusok.

$$k^\beta \nabla_\beta k^\alpha = 0 \; . \tag{5}$$

A (5) egyenletet szorozva M -mel és kivonva a

$$\nabla_\beta T^{\alpha\beta} = 0$$

megmaradási törvényből, a

$$k^\alpha \nabla_\beta \left(M k^\beta\right) = 0$$

egyenlethez jutunk. Ebből következik, hogy a null por tömegsűrűsége folytonossági egyenletet elégít ki:

$$\nabla_\beta \left(M k^\beta\right) = 0 \; . \tag{6}$$

A szakirodalomban ezért gyakran nevezik a null port null folyadéknak is ([9]).

A (2) , (5) , (6) egyenletek levezethetők az elektrodinamika geometriai optikai határesetében. Olyan jelenségeknél, amikor az energia a téridő minden pontjában azonos irányban és fénysebességgel terjed, célszerű az anyagot a null por (1) energia-impulzus tenzorával leírni. Görbült téridőben a hullámok elegendően kis téridő tartományban síkhullámoknak tekinthetők. Ilyen hullámban a hely- és időfüggő elektromágneses $\overline{A}$ vektorpotenciál

$$\overline{A} = Re\left[\overline{a}e^{\frac{i}{\varepsilon}\theta}\right]$$

alakú. Az $\overline{a}$ vektormezőt amplitúdóvektornak nevezzük, komponensei komplex számok. A θ skalármezőt fázisnak nevezzük, valós értékeket vesz fel. $\overline{A}$ hely- és időfüggéséért θ felelős, míg $\overline{a}$ majdnem konstans mező. Az $\overline{a}$ amplitúdóvektor kis megváltozásaiért a téridő görbületi sugarának változása felelős. Ezért $\overline{a}$ -t R függvényének is tekinthetjük és az $\varepsilon = R/\lambda$ dimenziótlan paraméter alkalmazásávak másodrendig sorbafejtjük:

$$a^i = f^i + \varepsilon g^i + \varepsilon^2 h^i \ . \tag{7}$$

Az f^i , g^i , h^i komplex vektormezőkkel a vektorpotenciál

$$A^i = Re\left[\left(f^i + \varepsilon g^i + \varepsilon^2 h^i\right) e^{\frac{i}{\varepsilon}\theta}\right] \ .$$

A

$$k_j = \nabla_j \theta \tag{8}$$

vektormezőt hullámvektornak nevezzük. A (8) definíció alapján k^i merőleges θ fázisfelületeire. A fénysugarakat olyan görbékként definiáljuk, amelyek merőlegesek ezekre a felületekre. Tehát a fénysugarak a hullámvektorok integrálgörbéi. A vektorpotenciál kielégíti a forrásmentes hullámegyenletet:

$$\triangle A^i = 0 \ . \tag{9}$$

Kiszámoljuk $\triangle A^i$ -t:

$$\begin{aligned}\triangle A^i \ = \ & Re(\nabla_j[\nabla^j(f^i + \varepsilon g^i + \varepsilon^2 h^i)]e^{\frac{i}{\varepsilon}\theta} + 2\nabla^j(f^i + \varepsilon g^i + \varepsilon^2 h^i)e^{\frac{i}{\varepsilon}\theta}\nabla_j(\frac{i}{\varepsilon}\theta) \\ & +(f^i + \varepsilon g^i + \varepsilon^2 h^i)\nabla_j e^{\frac{i}{\varepsilon}\theta}\nabla^j(\frac{i}{\varepsilon}\theta) + e^{\frac{i}{\varepsilon}\theta}\nabla_j(\nabla^j(\frac{i}{\varepsilon}\theta)]) \ .\end{aligned}$$

Kiemelünk $e^{i\theta/\varepsilon}$ -t és alkalmazzuk (9) -et.

$$\begin{aligned}\triangle A^i &= Re(\nabla_j[\nabla^j(f^i+\varepsilon g^i+\varepsilon^2 h^i)] + 2\frac{i}{\varepsilon}k_j\nabla^j(f^i+\varepsilon g^i+\varepsilon^2 h^i) \\ &-\frac{1}{\varepsilon^2}k_jk^j(f^i+\varepsilon g^i+\varepsilon^2 h^i) + \frac{i}{\varepsilon}\nabla_j k^j(f^i+\varepsilon g^i+\varepsilon^2 h^i))e^{\frac{i}{\varepsilon}\theta} \ .\end{aligned}$$

A kifejezést ε hatványainak lineáris kombinációjává alakítjuk és a tagokat ε kitevője szerint csoportosítjuk

$$\begin{aligned}0 &= \triangle A^i \\ &= Re(\varepsilon^2\nabla_j(\nabla^j h^i) + [\varepsilon\nabla_j(\nabla^j g^i) + k_j\nabla^j(2ih^i) + \nabla_j k^j(ih^i) \\ &-\nabla_j(\nabla^j f^i) + k_j\nabla^j(2ig^i) - k_jk^jh^i + \nabla_j k^j(2ig^i)] \\ &+\frac{1}{\varepsilon}\left[k_j\nabla^j(2if^i) - k_jk^jg^i + \nabla_j k^j(if^i)\right] + \frac{1}{\varepsilon^2}k_jk^jf^i)e^{\frac{i}{\varepsilon}\theta} \ .\end{aligned}$$

Az egyenletnek tetszőleges hullámhosszú sugárzásra, azaz tetszőleges $\varepsilon = R/\lambda$ paraméterre teljesülnie kell, ezért

$$0 = k_j\nabla^j\left(2if^i\right) - k_jk^jg^i + \nabla_j k^j\left(if^i\right) \ , \tag{10}$$

$$0 = k_jk^jf^i \ . \tag{11}$$

A (11) egyenletből látszik, hogy k^j nullvektor:

$$k_jk^j = 0 \ . \tag{12}$$

Képezzük (12) gradiensét (8) felhasználásával.

$$\nabla_i\left(k^jk_j\right) = 2k^j\nabla_i k_j = 2k^j\nabla_i\left(\nabla_j\theta\right) = 2k^j\nabla_j\left(\nabla_i\theta\right) = 2k^j\nabla_j k_i \ .$$

(12) alapján tehát

$$k^j\nabla_j k_i = 0 \ . \tag{13}$$

azaz k^i kielégíti a geodetikus egyenletet. (12) és (13) a **geometriai optika első törvényét** szolgáltatja: a fénysugarak null geodetikus görbék. A (10) egyenlet (12) figyelembevételével egyszerűsödik:

$$0 = k_j \nabla^j f^i + \frac{1}{2} \nabla_j k^j f^i \ .$$

Szükségünk lesz az egyenlet alábbi következményeire:

$$\begin{aligned} k_j \nabla^j f^i &= -\frac{1}{2} \nabla_j k^j f^i \ , \\ k_j \nabla^j f^{i*} &= -\frac{1}{2} \nabla_j k^j f^{i*} \ , \\ k_j \nabla^j \overline{f} &= -\frac{1}{2} \nabla_j k^j \overline{f} \ , \qquad (14) \\ k_j \nabla^j \overline{f}^* &= -\frac{1}{2} \nabla_j k^j \overline{f}^* \ . \qquad (15) \end{aligned}$$

Jelöljük f -fel $\overline{f}$ hosszát, ekkor $f^2 = \overline{f}^* \overline{f}$ ($\overline{f}^*$ az $\overline{f}$ komplex konjugáltja) .Kiszámoljuk a $k_j \nabla^j f$ mennyiséget:

$$k_j \nabla^j f = \frac{1}{2f} k_j 2f \nabla^j f = \frac{1}{2f} k_j \nabla^j f^2 = \frac{1}{2f} k_j \nabla^j \left(\overline{f}^* \overline{f} \right) = \frac{1}{2f} k_j \left(\overline{f}^* k_j \nabla^j \overline{f} + \overline{f} k_j \nabla^j \overline{f}^* \right) \ .$$

Alkalmazzuk (14) -et és (**??**) -et¿

$$\begin{aligned} k_j \nabla^j f &= \frac{1}{2f} \left[\overline{f}^* \left(-\frac{1}{2} \nabla_j k^j \overline{f} \right) + \overline{f} \left(-\frac{1}{2} \nabla_j k^j \overline{f}^* \right) \right] \\ &= -\frac{1}{2f} \left[\frac{1}{2} \overline{f}^* \overline{f} + \frac{1}{2} \overline{f} \overline{f}^* \right] \nabla_j k^j = -\frac{1}{2f} \overline{f}^* \overline{f} \nabla_j k^j = -\frac{1}{2} \nabla_j k^j f \ . \end{aligned}$$

Nullára rendezünk és szorzunk $2f$ -fel:

$$0 = 2f k_j \nabla^j f + f^2 \nabla_j k^j = k_j \nabla^j f^2 + f^2 \nabla_j k^j = \nabla^j \left(f^2 k_j \right) \ .$$

Megkaptuk a **geometriai optika második törvényét**:

$$\nabla^j \left(f^2 k_j \right) = 0 \ . \qquad (16)$$

(7) szerint $f^2 \approx a^2$, a^2 pedig a fotonok koncentrációjával arányos, ezért (16) a fotonszám megmaradásának törvénye. A (12), (13), (16) egyenletek azonos alakúak a (2), (5), (6) egyenletekkel. Ezért szokás a tiszta sugárzást, azaz a görbült téridő geodetikus görbéin mozgó fotonok összességét null porként tárgyalni.

2.2. Kétkomponensű null por keverék, mint anizotróp folyadék

A következőkben ismertetjük Letelier gondolatmenetét, amelyben kétkomponensű porkeverékek energia-impulzus tenzorának alakját vizsgálja [9]. Az alábbi energia-impulzus tenzor két null por komponens energia-impulzus tenzorának összege:

$$T^{\alpha\beta} = mk^{\alpha}k^{\beta} + \mu l^{\alpha}l^{\beta} \ . \tag{17}$$

(17) egy folyadék energia-impulzus tenzorának is tekinthető. A folyadékok energia-impulzus tenzora

$$T^{\alpha\beta} = \rho U^{\alpha}U^{\beta} + S^{\alpha\beta} \ . \tag{18}$$

ρ a folyadék energiasűrűsége, $\rho U^{\alpha}U^{\beta}$ -t az energia-impulzus kinetikus részének nevezzük. $S^{\alpha\beta}$ a folyadék belső tulajdonságaiért felelős feszültségtenzor.Az U^{α} négyesvektor időszerű:

$$U_{\alpha}U^{\alpha} < 0 \ \ .$$

(18) egyértelmű felbontását kinetikus és feszültség részre az

$$\begin{aligned} U^{\alpha}U_{\alpha} &= -1 \ , & (19) \\ S^{\alpha\beta}U_{\alpha} &= 0 \ , & (20) \end{aligned}$$

relációk biztosítják. Az $S^{\alpha\beta} = (\varpi - \rho)\, g^{\alpha\beta}$ esetben tökéletes folyadékról beszélünk; ϖ skalármező.

$$T^{\alpha\beta} = \rho U^{\alpha}U^{\beta} + (\varpi - \rho)\, g^{\alpha\beta}$$

alakú energia-impulzus tenzorát szokásosabb

$$T^{\alpha\beta} = (\rho + \varpi)\, U^{\alpha}U^{\beta} - pg^{\alpha\beta}$$

alakban felírni a $p = \rho - \varpi$ jelölés mellett. p a tökéletes folyadék nyomása. Az

$$\begin{pmatrix} U^{\alpha} \\ X^{\alpha} \end{pmatrix} = \sqrt{\frac{\rho}{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k^{\alpha} \\ l^{\alpha} \end{pmatrix}$$

lineáris transzformációval az (18) energia-impulzus tenzor

$$T^{\alpha\beta} = \rho U^{\alpha} U^{\beta} + \rho X^{\alpha} X^{\beta} \tag{21}$$

alakú lesz. Ha $k^{\alpha} l_{\alpha} = \rho$, akkor $U^{\alpha} U_{\alpha} = -1$ és $U^{\alpha} X_{\alpha} = 0$. Ebben az esetben (21) egy anizotróp folyadék energia-impulzus tenzora, mert teljesülnek az (19), (20) relációk. A folyadék feszültségtenzora $S^{\alpha\beta} = \rho X^{\alpha} X^{\beta}$, amiből látszik, hogy csak X^{α} irányú nyomása van, amelynek nagysága a folyadék ρ energiasűrűségével megegyezik.

3. Kétkomponensű null por keverék által létrehozott téridő gömbi és henger szimmetriával

3.1. Gömbszimmetrikus megoldás

Ebben a fejezetben egy Gergely Lászlótól származó, gömbszimmetrikus sztatikus téridő megoldás levezetését és értelmezését tekintjük át [6], [7]. Egy gömbszimmetrikus, sztatikus metrika általános alakja egy $\Re^2 \times S^2$ topológiájú téridőben

$$ds^2 = -h(r)\, dt^2 + f(r)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2 \ .$$

Itt t az idő, r a görbületi koordináta, $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\Phi^2$ a térszögelem négyzete. Az $f(r)$ és $h(r)$ függvények pozitív értékűek. Bevezetjük az $m(r)$ lokális tömegfüggvényt [20]:

$$f(r) = 1 - \frac{2m(r)}{r} \ . \tag{22}$$

Az egymáson átáramló null porok tartományában az energia-impulzus tenzor a beáramló és a kiáramló komponensek energia-impulzus tenzorainak összege:

$$T^{ab} = \frac{\beta(r)}{8\pi r^2} \left(v^a v^b + u^a u^b \right) \ .$$

Ugyanazt a lineáris tömegsűrűség függvényt választottuk mindkét komponens számára, mivel a sztatikusság megköveteli, hogy ne legyen eredő áramlás egyik null irányban sem. A

$$v^a = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{h}}, \sqrt{f}, 0, 0 \right) \quad , \quad u^a = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{h}}, -\sqrt{f}, 0, 0 \right)$$

vektormezők a ki- és befelé tartó null kongruenciák érintői. Mindkét null kongruencia geodetikus. A nemtriviális Einstein egyenletekből kiküszöböljük a második deriváltakat és az alábbi rendszer marad:

$$
\begin{aligned}
r\frac{df}{dr} &= -\beta - f + 1 \\
rf\frac{dh}{dr} &= h\left(\beta - f + 1\right) \\
rf\frac{d\beta}{dr} &= \beta\left(-\beta + f - 1\right)
\end{aligned}
$$

A $\beta =$ állandó megoldások mind $\beta = 0$ -ra egyszerűsödnek, ez a vákuumot jelenti. Birkhoff tétele miatt ez vagy a Schwarzschild vagy a sík megoldás. $\beta \neq$ állandó esetben az egyenletek egyike egy reláció a $\beta\left(r\right)$ tömegsűrűség és a $h\left(r\right)$ metrikus függvény között:

$$
h = \frac{A}{\beta} \ .
$$

ahol $A > 0$ egy állandó. A maradék egyenletek nem tartalmazzák az A állandót.

$$
\begin{aligned}
f\frac{d\ln f}{d\ln r} &= -\beta - f + 1 && (23) \\
f\frac{d\ln \beta}{d\ln r} &= -\beta + f - 1 && (24)
\end{aligned}
$$

Date-et követve [21], kiküszöböljük f -et (23) -ból a (24)-ből adódó kifejezése segítségével:

$$
f = \frac{1+\beta}{1 - \frac{d\ln\beta}{d\ln r}} \ . \qquad (25)
$$

Az így kapott másodrendű közönséges differenciálegyenlet $1/\beta$ szerint integrálható:

$$
\frac{d}{d\ln r}\left(\frac{1}{\beta}\right) = \left(D - \frac{1}{\beta} - 2\ln\frac{\beta}{r}\right)\frac{1}{1+\beta} \ .
$$

D egy integrációs állandó. Behelyettesítve ezt a kifejezést (25) -be, egy algebrai reláció tűnik fel a metrika komponensei között:

$$
\frac{\left(1+\beta\right)^2}{2f\beta} = \ln\left(\frac{Cr}{\beta}\right) \ , \qquad (26)
$$

ahol $C = \exp\left(\left(1+D\right)/2\right)$. β -ra egy közönséges elsőrendű egyenlet írható fel.

$$\frac{df}{d\beta} = \frac{f(\beta + f - 1)}{\beta(\beta - f + 1)} \ . \tag{27}$$

Bevezetve az új pozitív változókat

$$P = (2f\beta)^{1/2} \qquad , \qquad L = \frac{1+\beta}{(2f\beta)^{1/2}} \ , \tag{28}$$

a (27) egyenlet egy elsőrendű lineáris közönséges differenciálegyenlet alakját ölti.

$$\frac{dP}{dL} = 2(1 - PL) \ .$$

A megoldás

$$P = 2e^{-L^2}\Phi_B(L) \qquad , \qquad \Phi_B(L) = B + \int e^{x^2} dx \ . \tag{29}$$

ahol B integrációs állandó.A (26), (29), (28) egyenletekből az r görbületi koordináta és a β , f metrika függvények megtalálhatók az L radiális koordináta függvényeiként:

$$\begin{aligned} Cr(L) &= -e^{L^2} + 2L\Phi_B(L) \\ \beta(L) &= -1 + 2Le^{-L^2}\Phi_B(L) \\ f(L) &= \frac{2\Phi_B^2(L)}{e^{L^2}\left[-e^{L^2} + 2L\Phi_B(L)\right]} \end{aligned}$$

Ezek után az $m = m(L)$ tömegfüggvény (22)-ből meghatározható:

$$2Cm(L) = -e^{L^2} + 2L\Phi_B(L) - 2e^{-L^2}\Phi_B^2(L) \ .$$

Most minden együtt van ahhoz, hogy a metrikát az új L radiális koordinátával írjuk fel:

$$ds^2 = \frac{-Ae^{L^2}dt^2}{-e^{L^2} + 2L\Phi_B(L)} + 2e^{L^2}\left[-e^{L^2} + 2L\Phi_B(L)\right]\frac{dL^2}{c^2} + \left[-e^{L^2} + 2L\Phi_B(L)\right]^2\frac{d\Omega^2}{C^2} \ . \tag{30}$$

A megoldás értelmezéséhez célszerű szemügyre venni a [7] -ben szereplő 1. és 2. ábrákat. A metrika invariáns az $(L, B) \longmapsto (-L, -B)$ egyidejű cserére. Ez a téridő két azonos példányának létezését sejteti. B minden értékéhez az $R = 0$ szingularitásnak két példánya tartozik, amelyek az L koordináta értékkészletét három tartományra osztják. Ezek közül $L \in (-\infty, L^-)$ és $L \in (L^+, \infty)$ a (30) metrika által lokálisan adott sztatikus csupasz szingularitás, ez a $c = -1$ eset. Az $(L^-, 0)$ és $(0, L^+)$ darabokat $L = 0$ -n keresztül simán össze lehet ragasztani, hogy egyetlen homogén zárt Kantowski-Sachs típusú világegyetemet kapjunk. Ez utóbbi esetben R a (30) által lokálisan leírt világegyetem időfüggő sugaraként értelmezhető, itt $c = 1$, amelyik az $R = 0$ szingularitásból születik és abba omlik össze.

3.2. Hengerszimmetrikus megoldás

A szingularitások keletkezése hengerszimmetrikus téridőben is tárgyalható. Két merőleges Killing vektorral rendelkező hengerszimmetrikus téridőket a következő metrika jellemez ([22]) :

$$ds^2 = e^{-\Omega}\left(dt^2 - dr^2\right) - e^{-h}\left\{e^{\Phi}dz^2 + e^{-\Phi}d\varphi^2\right\} \; . \tag{31}$$

ahol Ω, h és Φ csak t és r függvényei. t az időszerű koordináta, r a térszerű radiális koordináta, z és φ az axiális és azimut koordináták. Letelier és Wang gondolatmenetét követve [11] megmutatjuk, hogy hengerszimmetrkus null por felhő gravitációs összeomlásakor midnig keletkezik egy szingularitás a téridőben. Célszerű dupla null koordinátarendszerben dolgozni, amit

$$u = \frac{t+r}{\sqrt{2}} \quad , \quad v = \frac{t-r}{\sqrt{2}} \tag{32}$$

definiál. u -ban és v -ben (31) az alábbi alakú lesz

$$ds^2 = 2e^{-\Omega}dudv - e^{-h}\left\{e^{\Phi}dz^2 + e^{-\Phi}d\varphi^2\right\} \; . \tag{33}$$

Ω , h és Φ itt u és v függvényei a (32) reláción keresztül. Bevezetjük az l_μ és n_μ nullvektorokat:

$$l_\mu = \delta^a_\mu \quad , \quad n_\mu = \delta^1_\mu \; , \tag{34}$$

ahol a koordináták számozása $\{x^\mu\} = \{u, v, z, \varphi\}$, $\mu = 0, 1, 2, 3$. A (33) és (34) egyenletekből

$$l_{\mu;v}l^v = n_{\mu;v}n^v = 0 \; , \tag{35}$$

ahol a pontosvessző kovariáns deriválást jelöl. A (35) egyenlet szerint az l_μ és n_μ nullvektorok egy-egy affin paraméterezett null geodetikus kongruenciát definiálnak. Így a

$$Q_l \equiv -l^\lambda_{;\lambda} = e^\Omega h_{,v} \quad , \quad Q_n \equiv -n^\lambda_{;\lambda} = e^\Omega h_{,v}$$

mennyiségek az l_μ ill. n_μ által definiált null geodetikus kongruenciák összehúzódásának ütemét mérik. Tegyük fel, hogy $\left\{\Omega^{(0)}, h^{(0)}, \Phi^{(0)}\right\}$ az Einstein egyenletek egy megoldása,

$$R^{(0)}_{\mu v} - \frac{1}{2} g^{(0)}_{\mu\nu} R^{(0)} = -T^{(0)}_{\mu\nu} \ ,$$

ahol $R^{(0)}_{\mu\nu}$ a $g^{(0)}_{\mu\nu}$ metrikából felépült Ricci tenzort jelöli és $T^{(0)}_{\mu\nu}$ a megfelelő energia-impulzus tenzor. Ekkor

$$\{\Omega, h, \Phi\} = \left\{\Omega^{(0)} + a(u) + b(v), h^{(0)}, \Phi^{(0)}\right\}$$

megadja az Einstein egyenletek egy új megoldását [22] a

$$T^\mu_v = \rho_1 l^\mu l_\nu + \rho_2 n^\mu n_v + e^{a+b} T^{(0)\mu}_\nu \tag{36}$$

energia-impulzus tenzor mellett. ρ_1 és ρ_2 definíciója

$$\rho_1 = a'(u)\, h_{,u} \quad , \quad \rho_2 = b'(v)\, h_{,v} \ ,$$

és $a(u)$ és $b(v)$ a jelzett argumentumaik függvényei. A felülvonás közönséges deriválást jelent. A (36) egyenlet első tagja az l_μ által definiált null geodetikus mentén mozgó null folyadékot képvisel, míg a második az n_μ által definiált null geodetikus mentén mozgót. Bár a ρ_1 és a ρ_2 mennyiségeknek nincs határozott fizikai jelentése, a két null folyadék kombinációjának van [9]. A 36 egyenlet első két tagja az alábbi alakra hozható:

$$\rho_1 l_\mu l_\nu + \rho_2 n_\mu n_\nu = \rho \left\{U_\mu U_\nu + X_\mu X_\nu\right\} \ , \tag{37}$$

ahol

$$
\begin{aligned}
U_\mu &= e^{-\Omega/2}\left\{\frac{\rho_2}{4\rho_1}\right\}^{1/4}\left\{n_\mu+\left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)^{1/2} l_\mu\right\} \\
X_\mu &= e^{-\Omega/2}\left\{\frac{\rho_1}{4\rho_2}\right\}^{1/4}\left\{l_\mu-\left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)^{1/2} n_\mu\right\} \\
\rho &= e^{\Omega}\left(\rho_1\rho_2\right)^{1/2} \\
U^\alpha U_\alpha &= -X^\alpha X_\alpha = 1 \quad , \qquad U^\alpha X_\alpha = 0
\end{aligned}
\tag{38}
$$

A (37), (38) egyenletekből látható, hogy a két null folyadék összege olyan anizotróp folyadékként viselkedik, aminek nyomása csak X_μ irányban van és annak nagysága megegyezik az anizotróp folyadék energiasűrűségével. Érdemes megjegyezni, hogy a fenti fizikai értelmezés ρ_1 , $\rho_2 <$ esetén is alkalmazható. Amikor null folyadék hengerek összeomlanak, mindig kialakul egy közbülső szingularitás. Ahhoz, hogy ezt megmutassuk, tekintsük az időszerű geodetikusokat egy ilyen téridőben. Egy egyébként sík háttéren egy null folyadék gravitációs kollapszusát a

$$
ds^2 = 2e^{-a(u)}dudv - dz^2 - r^2 d\varphi^2 \tag{39}
$$

metrika képviseli. Az energia-impulzus tenzor

$$
T_{\mu v} = -\frac{a'(u)}{\sqrt{2}r} l_\mu l_v \ .
$$

A következőkben feltesszük, hogy $a'(u) < 0$. Ezek után az időszerű radiális geodetikust

$$
\ddot{u} - a'(u)\,\dot{u} = 0 \quad , \qquad \ddot{v} = 0 \tag{40}
$$

adja, ahol a pontok a τ sajátidő szerinti deriválást jelölik. 40 első integrálja

$$
\dot{u} = e^{a_0 + a(u)} \quad , \qquad \dot{v} = e^{b_0} \ ,
$$

ahol a_0 és b_0 integrációs állandók. Az alábbi négy vektor,

$$
\begin{aligned}
t^\mu &= e^{a_0+a(u)}\delta^\mu_u + e^{b_0}\delta^\mu_v \\
\lambda^\mu_{(1)} &= e^{a_0+a(u)}\delta^\mu_u + e^{b_0}\delta^\mu_v \\
\lambda^\mu_{(2)} &= \delta^\mu_z \\
\lambda^\mu_{(3)} &= r^{-1}\delta^\mu_\varphi
\end{aligned}
\tag{41}
$$

ortogonális tetrádot alkot. A (39) egyenlet alapján ebben a bázisban a Riemann tenzornak csak egy független komponense van.

$$R_{\mu\nu\sigma\delta}t^{\mu}\lambda^{\nu}_{(3)}t^{\sigma}\lambda^{\delta}_{(3)} = e^{2a_0+2a(u)}\frac{a'(u)}{\sqrt{2}r}$$

Nyilvánvaló, hogy amikor elérjük az $r = 0$ hiperfelületet, ez a komponens korlátlanná válik.

4. Az ADM formalizmus

Az általános relativitáselmélet kanonikus formalizmusának magyar nyelven egyedülálló, páratlanul részletes ismertetése Kovács Zoltán munkáiban [12], [13] található.Ebben a fejezetben Wald [16] és Kovács [12], [13] nyomán áttekintjük Arnowitt, Deser és Misner 1962-ben publikált elméletét [1]. Egy térelmélet Hamilton formalizmusa megköveteli a téridő felbontását térre és időre. Egy térelmélet Hamilton formalizmusa létrehozásának első lépése az, hogy választunk egy t időfüggvényt és egy t^{α} vektormezőt a téridőn úgy, hogy az állandó t érték Σ_t felületei térszerű Cauchy felületek legyenek és $t^{\alpha}\nabla_{\alpha}t = 1$. A Σ_t -n értelmezett q mezőhöz egy π impulzust rendelünk hozzá valamilyen előírással. Az utólsó lépés egy $H[q,\pi]$ funkcionál megadása Σ_t -n. A

$$H = \int_{\Sigma_t} \mathcal{H} \; . \tag{42}$$

Hamilton-funkcionál a $\mathcal{H}$ Hamilton sűrűség integrálja. $\mathcal{H}$ a q és π és ezek véges sok térderiváltjának függvénye, függhet még q és π első időderiváltjától. $\mathcal{H}$ -t úgy választjuk, hogy a

$$\begin{aligned} \dot{q} &\equiv \mathcal{L}_t q = \frac{\delta H}{\delta \pi} \; , \\ \dot{\pi} &\equiv \mathcal{L}_t \pi = -\frac{\delta H}{\delta q} \; . \end{aligned} \tag{43}$$

egyenletrendszer q téregyenleteinek rendszerével ekvivalens legyen. Ha adott egy térelmélet Lagrange formalizmusa, akkor van egy szabványos előírás arra, hogy egy Hamilton formalizmust nyerjünk A Legendre-transzformációt a térelméletben hasonlóan végezzük, mint a mechanikában. A q -hoz kanonikusan konjugált impulzus definíciója

$$\pi = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \dot{q}} \ . \tag{44}$$

Ezután megkíséreljük megoldani a (44) egyenletet, hogy kifejezzük $\dot{q}$ -ot q és π függvényeként. Ha ez sikerült, akkor $\mathcal{H}$ definíciója

$$\mathcal{H}\left(q, \pi\right) = \pi \dot{q} - \mathcal{L} \ ,$$

ahol a $\dot{q} = \dot{q}\left(q, \pi\right)$ kifejezés értendő $\dot{q}$ -nak mind az explicit, mind az $\mathcal{L}$ -ben történő implicit megjelenésekor. Ekkor a (43) kanonikus mozgásegyenletek ekvivalensek a

$$\frac{\delta S}{\delta q} = 0$$

Euler-Lagrange egyenletekkel. . Ha adott egy $g_{\alpha\beta}$ metrika, akkor hasznos t^α -t felbontani a Σ_t felületre merőleges ill. érintőleges részeire. Definiáljuk az N lapse függvényt

$$N = -g_{\alpha\beta} t^\alpha N^\beta = \left(n^\alpha \nabla_\alpha t\right)^{-1} \ , \tag{45}$$

és az N^α shift vektort

$$N^\alpha = h^\alpha_\beta t^\beta \ ,$$

ahol n^a a Σ_t egységnormálisa és $h_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} + n_\alpha n_\beta$ a Σ_t -n indukált térmetrika. N a τ sajátidő ütemét méri a t koordináta idő függvényében, a Σ_t -re merőleges irányban, míg N^α a t^α vektor eltolódását méri a Σ_t -vel érintőlegesen. n^α -t ki tudjuk fejezni

$$n^\alpha = \frac{1}{N}\left(t^\alpha - N^\alpha\right)$$

alakban és így a téridő metrika

$$g^{\alpha\beta} = h^{\alpha\beta} - n^\alpha n^\beta = h^{\alpha\beta} - N^{-2}\left(t^\alpha - N^\alpha\right)\left(t^\beta - N^\beta\right)$$

alakú lesz. A továbbiakban a mezőváltozónk a $h_{\alpha\beta}$ térmetrika, az N lapse függvény és az N_α shift vektor lesz. A $\left(h_{\alpha\beta}, N, N_\alpha\right)$ hármasban lévő információ ekvivalens a $g^{\alpha\beta}$ -ban lévővel. A vákuum gravitáció Hamilton-funkcionáljának megkeresését azzal kezdjük, hogy az Einsten-Hilbert hatást kifejezzük a $h_{\alpha\beta}$, N , N_a mennyiségekkel és ezek tér és időderiváltjaival [16].

$$
\begin{aligned}
S &= \int \mathcal{L} d^4x \,, \qquad (46)\\
\mathcal{L} &= \sqrt{-g}R = \sqrt{h}N\left(\tilde{R} + K_{ab}K^{ab} - K^2\right) \,.
\end{aligned}
$$

ahol a K_{ab} külső görbület felírható az indukált metrikával [12], [13]:

$$
\begin{aligned}
K_{ab} &= \frac{1}{2}\mathcal{L}_t h_{ab} = \frac{1}{2}\left[n^c\nabla_c h_{ab} + h_{ac}\nabla_b n^c + h_{cb}\nabla_a n^c\right]\\
&= \frac{1}{2}N^{-1}\left[Nn^c\nabla_c h_{ab} + h_{ac}\nabla_b\left(Nn^c\right) + h_{cb}\nabla_a\left(Nn^c\right)\right]\\
&= \frac{1}{2}N^{-1}\left[\mathcal{L}_t h_{ab} - \mathcal{L}_N h_{ab}\right] = \frac{1}{2}N^{-1}\left[\dot{h}_{ab} + \tilde{\nabla}_{(a}N_{b)}\right] \,. \qquad (47)
\end{aligned}
$$

Itt $\tilde{\nabla}$ a térbeli kovariáns derivált. (47)-t (46) -be helyettesítve a gravitációs hatás Arnowitt, Deser és Misner által megadott alakját kapjuk [1]. A h_{ab} indukált metrikához kanonikusan konjugált impulzus

$$
\pi^{ab} = \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\dot{h}_{ab}} = \sqrt{h}\left(K^{ab} - Kh^{ab}\right) \,. \qquad (48)
$$

A Hamilton-sűrűség

$$
\begin{aligned}
\mathcal{H} &= \pi^{ab}\dot{h}_{ab} - \mathcal{L} = h^{1/2}[N(-\tilde{R} + h^{-1}\pi^{ab}\pi_{ab} - \frac{1}{2}h^{-1}\pi^2)\\
&\quad -2N_b(\tilde{\nabla}_a(h^{-1/2}\pi^{ab})) + 2\tilde{\nabla}_a(h^{-1/2}N_b\pi^{ab})] \,,
\end{aligned}
$$

ahol π (48) nyoma. Az ADM formalizmus dinamikai egyenletei:

$$
\begin{aligned}
\dot{h}_{ab} &= \frac{\delta H}{\delta\pi^{ab}} = 2\frac{1}{\sqrt{h}}N\left(\pi_{ab} - \frac{1}{2}h_{ab}\pi\right) + \widetilde{\nabla}_a N_b + \widetilde{\nabla}_b N_a \,,\\
\dot{\pi}_{ab} &= -\frac{\delta H}{\delta h^{ab}} = -N\sqrt{h}\left(\widetilde{R}_{ab} - \frac{1}{2}\widetilde{R}h^{ab}\right) + \frac{1}{2}N\frac{1}{\sqrt{h}}h^{ab}\left(\pi_{cd}\pi^{cd} - \frac{1}{2}\pi^2\right) -\\
&\quad -2N\frac{1}{\sqrt{h}}\left(\pi^{ac}\pi_c^b - \frac{1}{2}\pi\pi^{ab}\right) + \sqrt{h}\left(\widetilde{\nabla}^a\widetilde{\nabla}^b N - h^{ab}\widetilde{\nabla}^c\widetilde{\nabla}_c N\right)\\
&\quad +\sqrt{h}\widetilde{\nabla}_c\left(\frac{1}{\sqrt{h}}N^c\pi^{ab}\right) - \pi^{ca}\widetilde{\nabla}_c N^b - \pi^{cb}\widetilde{\nabla}_c\pi N^a \,. \qquad (49)
\end{aligned}
$$

$H = \int_{\Sigma_t}\mathcal{H}$ variációja N és N_a szerint a vákuum gravitáció kényszeregyenleteit szolgáltatja:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{h}}\left(\pi^{ab}\pi_{ab} - \frac{1}{2}\pi^2\right) - \sqrt{h}\widetilde{R} &= 0 \,,\\
-2h_{ba}\nabla_c\pi^{cb} &= 0 \,. \qquad (50)
\end{aligned}
$$

A gravitációs kényszerek algebrájának további vizsgálatáról részleteket Kovács dolgozatában [12] olvashatunk.

5. A null por kanonikus elmélete

5.1. A null por mozgásegyenletei

Bičák és Kuchař kidolgozták a null por ADM formalizmusát [5]. A következőkben ezt az elméletet ismertetjük. A null port a Z^k , W_k hat db téridő skalárral írjuk le. A Z^k , W_k állapotváltozóink értelmezése a hatás alakjából és az abból eredő mozgásegyenletekből ered. A három $Z^k_{,\alpha}$ gradiensről feltesszük, hogy három független kovektor. Egy fényszerű részecske l_α négyessebesség kovektora a W_k komponensei által adott a $Z^k_{,\alpha}$ kobázisban.

$$l_\alpha = W_k Z^k_{,\alpha} \ . \tag{51}$$

A null por hatás,

$$S^{ND}\left[Z^k, W_k; \gamma_{\alpha\beta}\right] = \int d^4y L^{ND}(y) \ , \tag{52}$$

a hat állapotváltozónk és a $\gamma_{\alpha\beta}$ metrika funkcionálja. Az L^{ND} Lagrange-sűrűséget

$$L^{ND} = -\frac{1}{2} \left|\gamma\right|^{1/2} \gamma^{\alpha\beta} l_\alpha l_\beta \tag{53}$$

alakban vesszük fel, ahol l_α az (51) kifejezés rövidítése. A mozgásegyenletek a hatás W_k és Z^k szerinti variációjából következnek:

$$0 = \frac{\delta S^{ND}}{\delta W_k} = -\left|\gamma\right|^{-1/2} Z^k_{,\alpha} l^\alpha \ , \tag{54}$$

$$0 = \frac{\delta S^{ND}}{\delta Z^k} = \left(\left|\gamma\right|^{1/2} W_k l^\alpha\right)_{,\alpha} \ . \tag{55}$$

A (54) egyenlet szerint Z^k együttmozgó koordináták. A (55) egyenlet azt mondja, hogy a három

$$J^\alpha_k = W_k l^\alpha \tag{56}$$

áram kielégíti a folytonossági egyenleteket

$$\nabla_\alpha J^k_\alpha = \nabla_\alpha \left(W_k l^\alpha \right) = 0 \; . \tag{57}$$

A (52) és (53) hatások $\gamma_{\alpha\beta}$ szerinti variációja az energia-impulzus tenzort eredményezi

$$T^{\alpha\beta} = 2 \left| \gamma \right|^{-1/2} \delta S^{ND} / \delta \gamma_{\alpha\beta} = l^\alpha l^\beta \; .$$

Az (51) Pfaff-alak kielégíti a

$$\nabla_\beta \left(l_\alpha l^\beta \right) = -W_{k,\alpha} \left(Z^k_{,\beta} l^\beta \right) + Z^k_{,\alpha} \nabla_\beta \left(W_k l^\beta \right) + \frac{1}{2} \nabla_\alpha \left(l_\beta l^\beta \right)$$

összefüggést. A (54), (55) mozgásegyenletek ezután maguk után vonják az energia-impulzus megmaradási törvényt. A null por csatolva van a gravitációhoz S^{ND} hatásának az (46) Einstein-Hilbert hatáshoz való hozzáadása által. A teljes $S = S^G + S^{ND}$ hatás $\gamma_{\alpha\beta}$ metrika szerinti variációja az Einstein gravitációs törvényre vezet null por forrás jelenlétében. Fóliázzuk az M téridőt térszerű Σ hiperfelületekkel,

$$Y : \Re \times \Sigma \to M \qquad (t, x) \to y = Y\,(t, x) \; . \tag{58}$$

A (58) fóliázást Σ x^a ill. M y^α lokális koordinátáiban Y^α reprezentálja.

$$(t, x^a) \longmapsto y^\alpha = Y^\alpha \left(t, x^a \right) \; .$$

Az $Y^{\cdot\alpha}$ deformáció vektor a fóliázás egyik fóliájáról a másikra való átmenetet írja le.

$$\dot{Y}^\alpha = N^\perp n^\alpha + N^a Y^\alpha_{,a} \; .$$

Felbontása a szeletek normális n^α és érintőleges $Y^\alpha_{,a}$ irányaiba elvezet az $N^\perp$ lapse függvényhez és az N^a shift vektorhoz.

$$\dot{Y}^\alpha = N^\perp n^\alpha + N^a Y^\alpha_{,a} \; . \tag{59}$$

Mindegyik szeleten a $\gamma_{\alpha\beta}\,(y)$ téridő metrika indukálja a belső metrikát

$$g_{ab}(t, x) = \gamma_{\alpha\beta} \Big(Y\,(t, x)\, Y^\alpha_{,a}\,(t, x)\, Y^\beta_{,b}\,(t, x) \Big) \; .$$

A téridő metrika rekonstruálható, mint

$$\gamma^{\alpha\beta} = -n^\alpha n^\beta + g^{ab} Y^\alpha_{,a} Y^\beta_{,b} \ ,$$

ahol g^{ab} a g_{ab} inverze és $\gamma_{\alpha\beta}$ $|\gamma|$ determinánsa és g_{ab} $|g|$ determinánsa közötti kapcsolat [16]

$$|\gamma|^{1/2} = N^\perp |g|^{1/2} \ .$$

Az M -en értelmezett skalármezők, mint a Z^k , W_k null por változók, átértelmezhetők $\Re \times \Sigma$ -re a (58) leképezés segítségével

$$Z^k_{,\alpha} n^\alpha = \left(N^\perp\right)^{-1} V^k \ .$$

Bevezettük a normálsebességeket

$$V^k := \dot{Z}^k - Z^k_{,a} n^a \qquad , \qquad Z^k_{,a} = Z^k_{,\alpha} Y^\alpha_{,a} \ .$$

Ez megengedi, hogy a (52), (53) null por hatást, ahol l_α (51) által adott, $\Re \times \Sigma$ feletti integrálként írjuk fel, azaz (3+1)-felbontás alakban:

$$S^{ND}\left[Z^k, W_k; g_{ab,} N^\perp, N^a\right] = \int dt \int d^3x L^{ND} \ . \tag{60}$$

Az L^{ND} Lagrange-sűrűség $\Re \times \Sigma$ -n a W_k Lagrange multiplikátorok másodrendű alakja:

$$L^{ND} = \frac{1}{2} |g|^{1/2} \left(\left(N^\perp\right)^{-1} V^i V^j - N^\perp g^{ij} \right) W_i W_j \ . \tag{61}$$

A $g^{ij}(t,x) = g^{ab} Z^i_{,a} Z^j_{,b}$ metrika a Z^i együttmozgó koordináták $Z^i_{,a}$ bázisában kifejezett indukált metrika Σ -n. A hatást W_i szerint variálva, egy lineáris homogén egyenletrendszert kapunk W_j -re:

$$\left(g^{ij} - \left(N^\perp\right)^{-2} V^i V^j\right) W_j = 0 \ .$$

Ennek csak akkor van nemtriviális megoldása, ha a

$$\det\left(g^{ij} - \left(N^\perp\right)^{-2} V^i V^j\right) = \left(1 - \left(N^\perp\right)^{-2} g_{ij} V^i V^j\right) \det\left(g^{ij}\right)$$

determináns eltűnik. Ez előírja a

$$g_{ij}V^iV^j - \left(N^\perp\right)^2 = 0$$

kényszert a $\dot{Z}^i$ sebességekre. Az általános megoldást

$$W_j = \sqrt{W} V_j \left(V_i V^i\right)^{-1/2} \tag{62}$$

alakban írjuk, ahol W egy tetszőleges pozitív tényező. Az (62) megoldást a (61) Lagrange-sűrűségbe visszahelyettesítve, eltűntetjük a W_j multiplikátorokat a hatásból és kicseréljük azokat az egyetlen W multiplikátorral:

$$L^{ND} = \frac{1}{2} |g|^{1/2} W \left(\left(N^\perp\right)^{-1} g_{ij} V^i V^j - N^\perp \right) .$$

Az egyszerűsített hatás:

$$S^{ND}\left[Z^k, W; g_{ab}, N^\perp, N^a\right] = \int_{\Re} dt \int_\Sigma d^3x L^{ND} .$$

Ahhoz, hogy az egyszerűsített hatást kanonikus alakra hozzuk, végrehajtunk egy Legendre-transzformációt $\left(Z^k, \dot{Z}^k\right)$ -ból $\left(Z^k, P_k\right)$ -ba, meghagyva W -t multiplikátornak.Először, bevezetjük az impulzusokat

$$P_k := \frac{\partial L^{ND}}{\partial \dot{Z}^k} = |g|^{1/2} W \left(N^\perp\right)^{-1} V_k . \tag{63}$$

Észrevehetjük, hogy a P_k -k a (56) egyenletben bevezetett J_k^α áramok normális irányú vetületei:

$$P_k = |g|^{1/2} J_k^\alpha n_\alpha .$$

A (63) egyenlet invertálható, hogy meghatározzuk a sebességeket

$$\dot{Z}^k = N^\perp |g|^{-1/2} W^{-1} g^{kj} P_j + N^a Z^k_{,a} .$$

Ez a

$$H^{ND} := P_k \dot{Z}^k - L^{ND} = N^\perp H_\perp^{ND} + N^a H_a^{ND} \tag{64}$$

Hamilton-sűrűségre vezet, ami a por

$$H_a^{ND} = P_k Z_{,a}^k \tag{65}$$

impulzussűrűségének és a

$$H_\perp^{ND} = \frac{1}{2} W^{-1} |g|^{-1/2} g^{ij} P_i P_j + \frac{1}{2} W |g|^{1/2} = \frac{1}{2} W^{-1} |g|^{-1/2} g^{ab} H_a^{ND} H_b^{ND} + \frac{1}{2} W |g|^{1/2} \tag{66}$$

energia sűrűségének lineáris kombinációja. A hatás kanonikus alakja ezután

$$S^{ND}\left[Z^k, P_k, W; g_{ab}, N^\perp, N^a\right] = \int_{\Re} dt \int_\Sigma d^3x \left(P_k \dot{Z}^k - N^\perp H_\perp^{ND} - N^a H_a^{ND}\right) , \tag{67}$$

ahol H_a^{ND} -t és $H_\perp^{ND}$ -t (65) és (66) adja meg.A (65), (67) hatást W szerint variálva egy egyenlethez jutunk,

$$\frac{\delta S^{ND}}{\delta W} = -N^\perp \frac{\partial H_\perp^{ND}}{\partial W} = 0 ,$$

ami meghatározza W -t a kanonikus adatok függvényében:

$$W = |g|^{-1/2} \sqrt{g^{ij} P_i P_j} = |g|^{-1/2} \sqrt{g^{ab} H_a^{ND} H_b^{ND}} .$$

Ha ezt az egyenletet visszahelyettesítjük $H_\perp^{ND}$ -be, azt kapjuk, hogy

$$H_\perp^{ND} = \sqrt{g^{ab} H_a^{ND} H_b^{ND}} . \tag{68}$$

Látjuk, hogy W éppen a $H_\perp^{ND}$ Hamilton-sűrűség $W = |g|^{-1/2} H_\perp^{ND}$ skaláris alakja. Az energiasűrűség az impulzussűrűség normája a térmetrika szerint. Az eredményül kapott $S^{ND}\left[Z^k, P_k; g_{ab}, N^\perp, N^a\right]$ egyszerűsített kanonikus hatás, a (65) és (68) egyenletekkel együtt, a Hamilton egyenleteket szolgáltatja $Z^k(t,x)$ és $P_k(t,x)$ számára. Ezek leírják a null por időfejlődését egy adott $\gamma_{\alpha\beta} \longleftrightarrow \left(N^\perp(t,x), N^a(t,x), g_{ab}(t,x)\right)$ geometriai háttéren. A Hamilton egyenletből rekonstruálni tudjuk az l^α nullvektort, amely biztosítja a por téridő leírását.

$$l^\alpha = l^\perp n^\alpha + l^a Y_{,a}^\alpha , \tag{69}$$

ahol $l^\perp$ és l^a a kanonikus változók függvényeként kifejezhető:

$$
\begin{aligned}
l^{\perp} &= -l_{\alpha} n^{\alpha} = -W^{1/2} \ , \\
l_a &= l_{\alpha} Y^{\alpha}_{,a} = W^{-1/2} \left| g \right|^{-1/2} H^{ND}_a \ .
\end{aligned} \tag{70}
$$

Ahhoz, hogy a null port a geometriához csatoljuk, hozzá kell adnunk az S^{ND} hatást a gravitációs Dirac-ADM hatáshoz

$$
S^G \left[g_{ab}, p^{ab}, N^{\perp}, N^a \right] = \int_{\Re} dt \int_{\Sigma} d^3x \left(p^{ab} g_{ab} - N^{\perp} H^G_{\perp} - N^a H^G_a \right) \ ,
$$

a szokásos gravitációs szuper hamiltoni és szuper impulzus sűrűségekkel [12] :

$$
\begin{aligned}
H^G_{\perp} \left[x; g_{ab}, p^{ab} \right] &= G_{abcd} \left[x; g \right] p^{ab}(x)\, p^{cd}(x) - \left| g \right|^{1/2} R \left[x; g \right] \ , \\
H^G_a \left[x; g_{ab}, p^{ab} \right] &= -2 D_b p^b_a (x) \ , \\
G_{abcd} &= \frac{1}{2} \left| g \right|^{-1/2} \left(g_{ac} g_{bd} + g_{ad} g_{bc} - g_{ab} g_{cd} \right) \ ,
\end{aligned}
$$

ahol D_b a térbeli kovariáns derivált. A teljes hatás variációja az $N^{\perp}$ lapse és az N^a shift szerint ezután a szokásos hamiltoni és impulzus kényszerekre vezet

$$
H_{\perp} \ : \ = H^G_{\perp} + H^{ND}_{\perp} = 0 \ , \tag{71}
$$

$$
H_a \ : \ = H^G_a + H^{ND}_a = 0 \ . \tag{72}
$$

Felhasználva a szuperimpulzus kényszert, kicserélhetjük a por H^{ND}_a impulzussűrűségét a por energiasűrűségének (68) kifejezésében a H^G_a sűrűséggel. Ez a (71), (72) kényszer rendszert egy

$$
H_{\perp} \ : \ = H^G_{\perp} + \sqrt{g^{ab} H^G_a H^G_b} = 0 \tag{73}
$$

$$
H_a \ : \ = H^G_a + H^{ND}_a = 0 \tag{74}
$$

ekvivalens alakra hozza. Csak a (74) szuperimpulzus kényszer tartalmazza a por változókat. Az új (73) hamiltoni kényszert egyedül a g_{ab}, p^{ab} gravitációs változókból képezzük.Vagy pedig megszabadulhatunk egy kellemetlen négyzetgyöktől újraírva a (73) egyenletet

$$
G := \left(H^G_{\perp} \right)^2 - g^{ab} H^G_a H^G_b = 0 \tag{75}
$$

alakban. Brown és Kuchař bebizonyították azt a figyelemreméltó tényt [3], hogy a (75) sűrűségnek erős értelemben eltűnő Poisson zárójele van:

$$\{G(x), G(x')\} = 0 \, .$$

A vákuum gravitáció $H_a^G = 0 = H_\perp^G$ kényszerei felválthatók egy alternatív rendszerrel:

$$H_a^G = 0 = G \, . \tag{76}$$

Ellentétben az eredeti kényszerekkel, H_a^G és G valódi Lie algebrát alkotnak. Sajnos a vákuum gravitációban az új (75) kényszer nem generálja a g_{ab} , p^{ab} geometriai adatok időfejlődését Ricci-sima téridővé.A (75) kifejezés a felelős ezért, mert hamiltoni vektormezője eltűnik a (76) kényszerfelületen. A null por esetében nem létezik ilyen nehézség. A (72) impulzuskényszer különbözik a $H_a^G = 0$ vákuumkényszertől és mindaddig, amíg van valamennyi por a kérdéses pontban, H_a^{Nd} és emiatt H_a^G nem tűnhet el. A (75) dinamikai változó hamiltoni vektormezője ezután nem tűnik el a geometriához csatolt null por (71), (72) kényszerfelületein. Az új (75) kényszer helyesen generálja a null por által létrehozott geometria időfejlődését. Sőt, ugyanúgy, mint vákuum téridőben, a (72) és (75) kényszerek valódi Lie algebrát alkotnak.

5.2. A por tér

Brown és Kuchař a közönséges por hamiltoni tárgyalása során bevezették a por tér fogalmát [3]. A közönséges por referenciális anyagi rendszert képez a téridőben, azaz mindig van egy kitüntetett koordinátarendszer a téridőn, ha abban por található. Bičák és Kuchař megállapították [5], hogy a null por a közönséges porhoz hasonlóan referenciapornak tekinthető, ugyanakkor van egy lényeges különbség is: míg a por rögzíti a tér és az időkoordinátákat is, addig a null por nem képes egy egyértelmű sajátidőt meghatározni. Az alábbiakban [5] alapján áttekintjük a null por kongruenciákkal kapcsolatos ismereteket.

A téridő egy porral teli tartományában, aminek világvonalai nem metszik egymást, az U^α vektormező egy S vonalkongruenciát definiál. Ez a kongruencia egy absztrakt háromdimenziós térnek tekinthető, aminek pontjai az egyes világvonalak. A $z \in S$ világvonalakat lokálisan három $z^k(z)$ paraméter címkézi, amelyek egy koordinátarendszert vezetnek be S -en. A tartomány minden eseményén pontosan egy világvonal halad át. Minden y eseményhez egyértelműen hozzá tudjuk rendelni annak a világvonalnak a z^k címkéit:

$$z^k = Z^k\left(y\right) \ . \tag{77}$$

A $Z^k\left(y\right)$ skalármezők értelmezése előfeltételezi, hogy z^k értékeik jó koordinátarendszert alkotnak S -en. Emiatt a három $Z^k_{,\alpha}$ gradiensnek három lineárisan független kovektornak kell lennie:

$$U^\alpha \propto \frac{1}{3!}\delta^{\alpha\beta\gamma\delta}Z^i_{,\beta}Z^j_{,\gamma}Z^k_{,\delta}\delta_{ijk} \neq 0 \ . \tag{78}$$

Paraméterezzük S görbéit egy u paraméterrel, aminek megváltozási ütemét abból vonjuk le, hogy U^α egységvektor. Ha

$$u = U\left(y\right) \tag{79}$$

az u értéke az y eseményen áthaladó S -beli görbén, fennál, hogy

$$U^\alpha \nabla_\alpha U = 1 \ . \tag{80}$$

A (78) és (80) egyenletekből következik, hogy $Z^K = \left(U, Z^K\right)$ az y^α téridő koordináták négy független függvénye:

$$\det\left(Z^K_{,\alpha}\right) = \frac{1}{3!}\delta^{\alpha\beta\gamma\delta}U_{,\alpha}Z^i_{,\beta}Z^j_{,\gamma}Z^j_{,\delta}\delta_{ijk} \ .$$

Így a $Z : M \longmapsto \Re \times S$ leképezés, amelyet lokálisan (79) és (77) ad meg, invertálható, az inverz $Y : \Re \times S \longmapsto M$, ami lokálisan

$$y^\alpha = Y^\alpha\left(u, z^k\right) \ .$$

Egy geodetikus null kongruenciának ki kell elégítenie a geodetikus és a null feltételeket. Ezek a feltételek továbbra is fennállnak, amikor a vektormezőt egy tetszőleges szorzóval átskálázzuk. Mutassuk meg, hogy létezik egy pozitív skálafaktor

$$\Lambda\left(y\right) = e^{\lambda(y)} \ ,$$

úgy, hogy

$$\nabla_\beta \left(\Lambda^{-1} l^\beta\right) = 0 \ . \tag{81}$$

A (81) egyenlet egy lineáris inhomogén egyenlettel ér fel λ -ra

$$l^\beta \nabla_\beta \lambda = \nabla_\beta l^\beta \ .$$

Az u, z^k adaptált koordinátákban

$$\frac{\partial \lambda}{\partial u} = \nabla_\beta l^\beta \ .$$

Az általános megoldás

$$\lambda = \int_0^u du \left(\nabla_\beta l^\beta\right) + \lambda_0 \left(z\right) \ .$$

A (3), (4),(81) egyenletek az új

$$\begin{aligned} K^\alpha &: = \Lambda l^\alpha \\ M &: = \Lambda^{-2} \end{aligned}$$

változókban

$$\begin{aligned} k^\beta \nabla_\beta k^\alpha &= 0 \\ \nabla_\beta \left(M k^\beta\right) &= 0 \\ T^{\alpha\beta} &= M k^\alpha k^\beta \end{aligned} \tag{82}$$

A k^α vektormező affin paraméterezett és az M tömegeloszlás kielégíti a folytonossági egyenletet. A v affin paraméter a régi u paraméter monoton növő függvénye:

$$v = \int_0^u du \Lambda^{-1} + v_0 \left(z\right) \ . \tag{83}$$

Ha definiálunk egy új $Y^\alpha_{AFF} : \Re \times S \longmapsto M$ leképezést

$$Y^\alpha_{AFF} \left(v, z\right) := Y^\alpha \left(u \left(v, z\right), z\right) \ ,$$

akkor a következőt kapjuk.

$$k^{\alpha} = \frac{\partial Y^{\alpha}_{AFF}(v,z)}{\partial v} \ .$$

A (83) affin paraméterezés két tetszőleges függvénytől függ, $\lambda_0(z)$ -től és $v_0(z)$ -től. Ez azt jelenti, hogy az affin paraméter csak egy lineáris transzformáció erejéig van meghatározva.

$$\overline{v} = \Lambda_0^{-1}(z)\, v + v_0 \qquad \Lambda_0(z) > 0 \ . \tag{84}$$

Ha (84) alapján affin paramétert váltunk, akkor a $k^{\alpha}(y)$ null vektormező átskálázódik

$$\overline{k}^{\alpha}(y) = \Lambda_0(z(y))\, k^{\alpha}(y) \ .$$

Így az affin paraméterezett $k^{\alpha}(y)$ null vektormező csak egy tetszőleges pozitív Λ_0 szorzótényező erejéig van meghatározva. Ez a mélyen fekvő oka annak, hogy null por rendszerekben nem definiálható természetes időparaméter.

6. A közönséges por kanonikus elmélete

6.1. A közönséges por mozgásegyenletei

A közönséges por kanonikus elmélete Brown és Kuchař [3] kutatásai során született meg. Ebben a fejezetben ismertetjük a közönséges por ADM formalizmusát és összehasonlítjuk a mozgásegyenleteket a null por elméletével. A közönséges por téridő hatását nyolc skalármezőből képezzük: Z^k, W_k és T, M .

$$S^D\left[T, Z^k; M, W_k, \gamma_{\alpha\beta}\right] = \int_M d^4y L^D(y) \ . \tag{85}$$

A Lagrange-sűrűség

$$L^D = -\frac{1}{2}|\gamma|^{1/2} M\left(\gamma^{\alpha\beta}U_\alpha U_\beta + 1\right) \ . \tag{86}$$

Az U_α négyessebességet Pfaff-alakban fejezzük ki

$$U_\alpha = -Z_{,\alpha} + W_k Z^k_{,\alpha} \ , \tag{87}$$

hét skalármező segítségével. A mozgásegyenletek:

$$
\begin{aligned}
0 &= \frac{\delta S^D}{\delta M} = -\frac{1}{2}\,|\gamma|^{1/2}\left(\gamma^{\alpha\beta}U_\alpha U_\beta + 1\right)\ , && (88)\\
0 &= \frac{\delta S^D}{\delta W_k} = -\,|\gamma|^{1/2}\,MZ^k_{,\alpha}U^\alpha\ , && (89)\\
0 &= \frac{\delta S}{\delta T} = -\left(|\gamma|^{1/2}\,MU^\alpha\right)_{,\alpha}\ , && (90)\\
0 &= \frac{\delta S^D}{\delta Z^k} = \left(|\gamma|^{1/2}\,MW_kU^\alpha\right)_{,\alpha}\ . && (91)
\end{aligned}
$$

Ezek az állapotváltozók értelmezésére vezetnek.A (89) egyenlet analóg a null porra vonatkozó (54) egyenlettel. Biztosítja, hogy a három Z^k vektormező állandó legyen U^α áramvonalai mentén és ezáltal z^k értékeiket a por együttmozgó koordinátáiként értelmezhessük. A (88) egyenlet biztosítja, hogy az U^α négyessebesség egy egység időszerű vektormező. Ez analóg a (2) egyenlettel, ami garantálja, hogy a null por l^α négyessebessége fényszerű. A (89) egyenlet lehetővé teszi, hogy M -et a por nyugalmi tömege sűrűségeként értelmezzük és a tömegmegmaradás törvényét fejezi ki. Ez analóg a null por (82) egyenletével affin paraméterezés mellett. A (91) egyenlet az impulzusmegmaradás törvényeként értelmezhető. Ez a null por (57) egyenletével analóg. A (87) egyenletet U^α -val szorozva és felhasználva a (88) és (89)egyenleteket, megtudjuk, hogy

$$T_{,\alpha}U^\alpha = 1\ .$$

azaz T sajátidő egy kezdeti $T = 0$ hiperfelület és egy tetszőleges $T =$ áll. hiperfelület között a por világvonalai mentén. A (87) egyenletből látjuk, hogy a W_k változók az U_α négyessebesség vetületei az állandó T érték hiperfelületeire a por tér $Z^k_{,\alpha}$ kobázisában kifejezve. A (90) és (91) megmaradási törvényeknek köszönhetően ezek a vetületek változatlanok U^α egy áramvonala mentén. A null por esetében W_k az l^α null kovektor komponense a por tér $Z^k_{,\alpha}$ kobázisában. Ezek a komponensek nem maradnak meg az áramvonalak mentén. Az S^D és S^{ND} hatások között a fő különbség, hogy a por hatás nyolc változótól függ, míg a null por hatás csak hat változótól. A T és M változók nem jelennek meg az (51) , (52), (53) null por hatásban. Ez azt a tényt tükrözi, hogy a null por M tömegfüggvénye nincs egyértelműen meghatározva, mert belefoglaltuk l^α definíciójába. (90) a nyugalmi tömeg

$$J^\alpha := MU^\alpha\ . \qquad (92)$$

áramának folytonossági egyenlete: A (91) egyenlet folytonossági egyenlet

$$J_k^\alpha := W_k J^\alpha$$

számára, amit impulzusáramnak tekintünk. Ebből a két egyenletből következik, hogy

$$\mathcal{L}_U W_k = W_{k,\alpha} U^\alpha = 0 \ ,$$

azaz W_k változatlan mindegyik áramvonal mentén. Ezért a W_k sebesség csak a $z = Z\left(y\right)$ Lagrange koordinátákon keresztül függ y -tól:

$$W_k\left(y\right) = W_k\left(Z\left(y\right)\right) \ .$$

A port hozzácsatoljuk a metrika mezőhöz, ha hozzáadjuk az S^D hatást a S^G (46) Einstein-Hilbert hatáshoz. A teljes S hatás variációja $\gamma_{\alpha\beta}$ szerint Einstein gravitációs törvényére vezet az alábbi energia-impulzus tenzorral:

$$T^{\alpha\beta} := 2\left|\gamma\right|^{1/2} \frac{\delta S^D}{\delta \gamma_{\alpha\beta}} = M U^\alpha U^\beta + \frac{1}{2}\gamma^{\alpha\beta} M \left(\gamma^{\mu\nu} U_\mu U_\nu + 1\right)$$

A (88) normálási egyenlet alapján

$$T^{\alpha\beta} = M U^\alpha U^\beta \ .$$

Ez a tenzor olyan alakú, amilyen egy M tömegsűrűségű, U^α négyessebességű inkoherens por leírásához szükséges. Az energia-impulzus megmaradásából és a (90) tömegmegmaradásból következik, hogy a porrészecskék pályái geodetikusok:

$$U^\beta \nabla_\beta U^\alpha = 0 \ .$$

Ez azt bizonyítja, hogy a porrészecskék nem fejtenek ki mechanikai erőket egymásra. Fóliázzuk a téridőt térszerű hiperfelületekkel.

$$Y : \Re \times \Sigma \longmapsto M \quad , \quad (t, x) \longmapsto y = Y\left(t, x\right) \ . \tag{93}$$

A (93) fóliázást Σ x^a ill. M y^α lokális koordinátáiban Y^α reprezentálja.

$$(t, x^a) \longmapsto y^\alpha = Y^\alpha\left(t, x^a\right) \tag{94}$$

Az $\dot{Y}^\alpha$ deformáció vektor a fóliázás egyik fóliájáról a másikra való átmenetet írja le.

$$\dot{Y}^\alpha = N^\perp n^\alpha + N^a Y^\alpha_{,a} \tag{95}$$

felbontása az n^α egység normális és $Y^\alpha_{,a}$ érintőleges irányba az $N^\perp$ lapse függvényt és az N^a shift vektort szolgáltatja. A $\gamma_{\alpha\beta}$ téridő metrika

$$\gamma^{\alpha\beta} = -n^\alpha n^\beta + g^{ab} Y^\alpha_{,a} Y^\beta_{,b} \quad , \quad |\gamma|^{1/2} = N^\perp |g|^{1/2} \ .$$

A (95) egyenletből

$$Z^k_{,\alpha} n^\alpha = \left(N^\perp\right)^{-1} \left(\dot{Z}^k - Z^k_{,a} N^a\right) \tag{96}$$

A (85), (86) por hatás $\Re \times \Sigma$ feletti integrálként írható:

$$S^D \left[T, Z^k; M, W_k; g_{ab}, N^\perp, N^a\right] = \int_\Re dt \int_\Sigma d^3x L^D \ ,$$

ahol

$$L^D = \frac{1}{2} |g|^{1/2} M \left(\frac{1}{N^\perp} \left(-\dot{T} + W_k \dot{Z}^k - U_a N^a\right)^2 - N^\perp \left(g^{ab} U_a U_b + 1\right) \right) \ .$$

a por Lagrange-sűrűsége és $U_a := U_\alpha Y^\alpha_{,a} = -T_{,a} + W_k Z^k_{,a}$. Bevezetjük a T -hez konjugált P impulzust

$$P := \frac{\partial L^D}{\partial \dot{T}} = |g|^{1/2} M \left(N^\perp\right)^{-1} \left(\dot{T} - W_k \dot{Z}^k - U_a N^a\right) \ .$$

A (87) és (96) egyenletekből

$$-U_\alpha n^\alpha = \left(N^\perp\right)^{-1} \left(\dot{T} - W_k \dot{Z}^k + U_a N^a\right) \tag{97}$$

Ez mutatja, hogy a P kanonikus impulzus a (92) nyugalmi tömeg négyesáram vetülete az euleri megfigyelők négyessebességére:

$$P = |g|^{1/2} \left(-J^\alpha n_\alpha\right) \ .$$

A (97) egyenlet alapján a P impulzus szükségképpen pozitív, $P > 0$, mert J^α és n^α jövő-irányított időszerű vektorok. Most végezzük el a $\left(T, \dot{T}\right) \longmapsto (T, P)$ Legendre transzformációt, miközben a Z^k, M és W_k változókat érintetlenül hagyjuk. Bevezetjük a

$$P_k := -PW_k \tag{98}$$

jelölést a $-P$ -vel átskálázott W_k Lagrange-multiplikátor számára. Az eredményül kapott $P\dot{T} - L^D$ Hamilton sűrűség

$$P\dot{T} - L^D = -P_k Z^{k\cdot} + N^{\perp} H^D_{\perp} + N^a H^D_a \ , \tag{99}$$

$$H^D_a := -PU_a = PT_{,a} + P_k Z^k_{,a} \ , \tag{100}$$

$$H^D_{\perp} := \frac{1}{2}\frac{P^2}{M\,|g|^{1/2}} + \frac{1}{2}\frac{M\,|g|^{1/2}}{P^2}\left(P^2 + g^{ab}H^D_a H^D_b\right) \ .$$

A (99) egyenlet megmutatja, hogy az

$$S^D\left[T, P; Z^k, P_k; M; g_{ab}, N^{\perp}, N^a\right] = \int_{\Re} dt \int_{\Sigma} d^3x \left(P\dot{T} + P_k \dot{Z}^k + N^{\perp} H^P_{\perp} - N^a H^D_a\right) \tag{101}$$

Legendre transzformált hatás nemcsak a T és P, hanem a Z^k és P_k változókban is kanonikus alakú. Így a (98) változó a Z^k -hoz kanonikusan konjugált impulzus. Variáljuk a (101) hatást M szerint.

$$\begin{aligned} \frac{\delta S^D}{\delta M} &= -N^{\perp}\frac{\partial H^D_{\perp}}{\partial M} = 0 \\ M &= \frac{1}{|g|^{1/2}}\frac{P^2}{\sqrt{P^2 + g^{ab}H^D_a H^D_b}} \end{aligned} \tag{102}$$

Helyettesítsük vissza (102) -t $H^D_{\perp}$ -ba.

$$H^D_{\perp} = \sqrt{P^2 + g^{ab}H^D_a H^D_b} \tag{103}$$

Az M tömeg multiplikátort kiküszöböltük a hatásból. A (196) és (102) egyenletek összekapcsolják a téridő hatás M , W_k multiplikátor változóit a P , P_k kanonikus impulzusokkal. A gravitációhoz csatolt por

$$\begin{aligned} H_{\perp} &: = H^G_{\perp} + H^D_{\perp} = 0 \ , \\ H_a &: = H^G_a + H^D_a = 0 \ , \end{aligned}$$

kényszerei a szokásos Dirac "algebrát" alkotják.

$$\begin{aligned}
\{H_\perp(x), H_\perp(x')\} &= g^{ab}(x) H_b(x) \delta_{,a}(x,x') - (x \longleftrightarrow x') && (104)\\
\{H_\perp(x), H_a(x')\} &= -H_\perp(x') \delta_{,a'}(x,x') && (105)\\
\{H_a(x), H_b(x')\} &= H_b(x) \delta_{,a}(x,x') - (ax \longleftrightarrow bx') && (106)
\end{aligned}$$

A $H_\perp^G(x)$ és $H_a^G(x)$ gravitációs szuper hamiltoni ill. szuper impulzus kényszerek ugyanazokat az (104), (106) relációkat elégítik ki, mint a teljes $H_\perp(x)$ és $H_a(x)$ kényszerek. $H_\perp^D(x)$ és $H_\perp^D(x')$ (104) szerint záródik. A $\left\{H_\perp^D(x), H_a^D(x')\right\}$ Poisson zárójelek nem követik (105) -et, mert $H_a^D(x')$ nem hat a $H_\perp^D(x)$ -ben lévő metrikára. A $H_\perp^D(x)$ energiasűrűség a

$$D(x) := P^2(x) + g^{ab}(x) H_a^D(x) H_b^D(x)$$

kifejezés négyzetgyöke. A $H^D(x)$ -re vonatkozó (104) relációból következik, hogy

$$\{D(x), D(x')\} = 4D(x) H^D(x) \delta_{,a}(x,x') - (x \longleftrightarrow x') \ .$$

A közönséges por esetében, a $H_\perp^D$ energiasűrűség és a H_a^D impulzussűrűség négy pár kanonikus változótól függ, T, P és Z^k , P_k . A null por (65) és (68) kényszerei csak három pár kanonikus változótól függnek, Z^k és P_k . Míg a közönséges pornak négy szabadsági foka van a tér egy $x\epsilon\Sigma$ pontjában, a null pornak csak három. A por nyugalmi tömegének M sűrűsége közvetlen kapcsolatban van a P impulzussal (102) szerint. A (69), (70) egyenletekből l^α rekonstruálható, a tömegfüggvény nem. Formálisan a (65) és (68) kényszerek megkaphatók a megfelelő (100) és (103) kifejezésekből P helyére 0 -t helyettesítve. A (85) hatás a T , Z^k és M , W_k nyolc állapotváltozó funkcionálja. Ez egy ekvivalens alakra hozható, ami kevesebb állapotváltozótól függ, a (89) Euler-egyenlet megoldásával. Az eredmény

$$W_k = h_{kl} Z^l_{,\alpha} \gamma^{\alpha\beta} T_{,\beta} \ , \tag{107}$$

ahol h_{kl} a

$$h^{kl} := Z^k_{,\alpha} \gamma^{\alpha\beta} Z^l_{,\beta}$$

mátrix inverze. A h_{kl} metrika az áramvonalakra merőleges ds távolságot méri. a z^k és $z^k + dz^k$ Lagrange koordinátájú szomszédos áramvonalak között.

$$ds^2 = h_{kl} dz^k dz^l \ .$$

Felhasználva az (107) egyenletet, W_k -t eltűntethetjük a hatásból és egy ekvivalens hatáshoz jutunk:

$$S^D \left[T, Z^k; M; \gamma_{\alpha\beta}\right] := S^D \left[T, Z^k; M, W_k = W_k \left[T, Z^l, \gamma_{\alpha\beta}\right]; \gamma_{\alpha\beta}\right] \ . \tag{108}$$

ami a T, Z^k négy dinamikai változótól és egy M multiplikátortól függ. A tömeg multiplikátort téridő szinten algebrai úton nem lehet eltűntetni, mert az M variálásával kapott (88) egyenlet nem függ M -től. Megmutattuk, hogyan lehet M -et felváltani a T idő függvényhez konjugált kanonikus impulzus segítségével. Ahelyett, hogy a mezőegyenletek megoldásával a változók számát csökkentenénk, növelhetjük a változók számát a hatáshoz érvényes egyenleteket adva, kiegészítő multiplikátorokkal. Például U_α (87) definíciója a (85) hatásba illeszthető négy $\widetilde{J}^\alpha$ multiplikátorral, ezek 1 súlyú skalársűrűségek.

$$S^D \left[T, Z^k; M, W_k; U_\alpha, \widetilde{J}^\alpha; \gamma_{\alpha\beta}\right] \tag{109}$$

$$= \int_M d^4y \left(-\frac{1}{2} |\gamma|^{1/2} M \left(\gamma^{\alpha\beta} U_\alpha U_\beta + 1\right) + \widetilde{J}^\alpha \left(U_\alpha + T_{,\alpha} - W_k Z^k_{,\alpha}\right)\right) \tag{110}$$

A hatás tizenhat állapotváltozótól függ: T, Z^k, M, W_k és U_α , $\widetilde{J}^\alpha$. A (109) hatást $\widetilde{J}^\alpha$ szerint variálva, visszakapjuk U_α 87 definícióját. U_α -t variálva

$$\widetilde{J}^\alpha - |\gamma|^{1/2} M U^\alpha = 0 \ , \tag{111}$$

azaz a $\widetilde{J}^\alpha$ multiplikátorok a tömegáram komponensei. Kifejezzük U^α -t az (111) egyenletből

$$U^\alpha = M^{-1} |\gamma|^{-1/2} \widetilde{J}^\alpha \ .$$

Ezt visszahelyettesítve az (109) hatásba, egy ekvivalens hatást kapunk.

$$S^D \left[T, Z^k; M, W_k; \widetilde{J}^\alpha; \gamma_{\alpha\beta}\right] \tag{112}$$

$$= \int_M d^4y \left(\frac{1}{2} |\gamma|^{-1/2} M^{-1} \gamma_{\alpha\beta} \widetilde{J}^\alpha \widetilde{J}^\beta - \frac{1}{2} |\gamma|^{1/2} M + \widetilde{J}^\alpha \left(T_{,\alpha} - W_k Z^k_{,\alpha}\right)\right) \tag{113}$$

ami tizenkét állapotváltozótól függ: T , Z^k , M , W_k és $\widetilde{J}^\alpha$. Az (112) hatás M szerinti variációja egy M -et meghatározó egyenletet szolgáltat.

$$M = |\gamma|^{-1/2} \sqrt{-\gamma_{\alpha\beta}\widetilde{J}^\alpha \widetilde{J}^\beta} \tag{114}$$

(114) felhasználásával M eltűntethető az hatásból.

$$S^D \left[T, Z^k; W_k; \widetilde{J}^\alpha; \gamma_{\alpha\beta}\right] = \int d^4y \left(-\sqrt{-\gamma_{\alpha\beta}\widetilde{J}^\alpha \widetilde{J}^\beta} + \widetilde{J}^\alpha \left(T_{,\alpha} - W_k Z^k_{,\alpha}\right)\right) \tag{115}$$

(115) tizenegy állapotváltozótól függ: T, Z^k, W_k és $\widetilde{J}^\alpha$. A (85), (108), (109), és (112), (115) hatások mindegyike ugyanarra a kanonikus hatásra vezet. A fentiek alapján kimondhatjuk, hogy a por kanonikus tárgyalása korántsem egyértelmű, több ekvivalens módon elvégezhető.

6.2. A por hatás, mint az egyrészecske-hatás általánosítása

Brown és Kuchař igazolta, hogy a por hatás a porrészecskéket jellemző hatások összegzéséből származtatható[3]. Ebben a fejezetben ezt a gondolatmenetet vázoljuk fel. Egyetlen m tömegű relativisztikus részecske geodetikus mozgását a

$$H := \frac{1}{2m}\left(\gamma^{\alpha\beta}(y) P_\alpha P_\beta + m^2\right)$$

szuper Hamilton sűrűség generálja. Az y^α téridő koordináták és a P_α négyesimpulzus kanonikusan konjugált változók. Ezek a változók felbonthatók tér és idő komponenseikre a (93) és (94) fóliázás szerint. A t -hez és x^a -hoz konjugált impulzusok

$$p_t := \dot{X}^\alpha P_\alpha \quad , \quad p_\alpha := X^\alpha_{,a} P_\alpha \, .$$

A (95) és (**??**) egyenletek felhasználásával a $H = 0$ szuper hamiltoni kényszer megoldható a $-p_t$ energia változóra:

$$-p_t = h\left(t, x^a, p_a\right) = -N^a(t,x)\, p_a + N^\perp(t,x) \sqrt{m^2 + g^{ab}(t,x)\, p_a p_b} \, . \tag{116}$$

$h\left(t, x^a, p_a\right)$ a részecske Hamilton sűrűsége. Az (116) Hamilton sűrűséghez tartozó hatás

$$S\left[x^{a},p_{a}\right]=\int dtL\left(x^{a},p_{a},x^{a}\right)=\int dt\left(p_{a}\frac{dx^{a}}{dt}-h\left(t,x^{a},p_{a}\right)\right)\ . \tag{117}$$

Vegyük észre, hogy az L Lagrange sűrűség m tömeg szerinti deriváltja

$$\frac{\partial L}{\partial m}=-\frac{N^{\perp}}{\sqrt{1+g^{ab}P_{a}P_{b}/m^{2}}}\ .$$

Mivel $N^{\perp}dt$ a $t=$ áll. felületek közötti merőleges sajátidő távolság és $\sqrt{1+g^{ab}p_{a}p_{b}/m^{2}}$ a relativisztikus "γ faktor", $\partial L/\partial m$ egyenlő a $d\tau/dt$ aránnyal, ahol τ a sajátidő a részecske világvonala mentén. Ebből látszik, hogy az (117) hatás kibővíthető $m\left(t\right)$ és $\tau\left(t\right)$ funkcionáljává:

$$S\left[\tau,m;x^{a},p_{a}\right]=\int dt\left(m\frac{d\tau}{dt}+p_{a}\frac{dx^{a}}{dt}-N^{a}\left(t,x\right)\left(-p_{a}\right)-N^{\perp}\left(t,x\right)\sqrt{m^{2}+g^{ab}\left(t,x\right)p_{a}p_{b}}\right)\ . \tag{118}$$

S extrémálása m szerint kapcsolatba hozza $\partial L/\partial m$ -et $d\tau/dt$ -vel. S extrémálása τ szerint a dm/dt feltételt adja, azaz a részecske tömege egy mozgásállandó. Most összevetjük az (118) relativisztikus részecske hatást a (101) por hatással. Az új $X^{a}\left(z\right)$ változó megadja a z^{k} Lagrange koordinátájú részecske térbeli helyét. Ha $P_{a}\left(z\right)$ jelöli az $X^{a}\left(z\right)$ -hez konjugált impulzust, a (101) hatás

$$\begin{aligned}&S^{D}\left[X^{a},P_{a};T,P\right]\\=&\int dt\int d^{3}zP\left(z\right)T^{\bullet}\left(z\right)+P_{a}\left(z\right)X^{a\bullet}\left(z\right)-N^{a}\left(t,X\left(z\right)\right)\left(-P_{a}\left(z\right)\right)\\&-N^{\perp}\left(t,x\left(z\right)\right)\sqrt{P^{2}\left(z\right)+g^{ab}\left(t,x\left(z\right)\right)P_{a}\left(z\right)P_{b}\left(z\right)}\ .\end{aligned} \tag{119}$$

A hatás több relativisztikus részecskére az (118) egyrészecske hatás egyes részecskék szerinti felösszegzésével adódik. Ha a részecskéket $z=1,2,...$ címkézzük, a kanonikus változók $(\tau_{z},m_{z},x_{z}^{a},p_{za})$ lesznek. Folytonos határesetben végtelen számú részecske szóródik szét a térben, az egyes részecskék szerinti $\sum_{z}$ összegzést felváltja egy $\int d^{3}x$ integrálás a részecskék címkéinek terén, az S por téren. A keletkező hatásfunkcionál éppen az (119) por hatás a $\tau_{z}\rightarrow T\left(z\right)$, $m\left(z\right)\rightarrow P\left(z\right)d^{3}z$, $x_{z}^{a}\rightarrow X^{a}\left(z\right)$ és $p_{za}\rightarrow P_{a}\left(z\right)d^{3}z$ megfeleltetések mellett.

7. A porkeverékek Lagrange formalizmusa

7.1. Az általános hatás

A vizsgált rendszerek és az előállítandó mozgásegyenletek tükrében az $n$komponensű porkeveréket leíró általános hatást a következő alakban keressük:

$$S\left[\beta^{\alpha\beta}, M_J, m_J^{KL}, n_J^K, N; c_L^J, A_\alpha^L, E^J, B_{L\alpha}^J\right] = \int \mathcal{L} d^4x \tag{120}$$

A Lagrange-sűrűség

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= -\frac{\gamma^{1/2}}{2}\sum_{J,K,L}[M_J(\gamma^{\alpha\beta}V_\alpha^J V_\beta^J + D^J) + m_J^{KL}(\gamma^{\alpha\beta}B_{K\alpha}^J B_{L\beta}^J + d_{KL}^J) \\ &\quad + n_J^K B_K^{J\alpha} V_\beta^J \nabla^\beta V_\alpha^J + N((m_J^{KL})^2 + (n_J^K)^2)] \end{aligned} \tag{121}$$

A nagybetűs J, H indexek az egyes porkomponensek változóit, az F, G, I, K, L indexek bázisvektorokat különböztetnek meg, **Ezeket sohasem használjuk vektor- vagy tenzorkomponensek megkülönböztetésére, és a megismételt indexekre sem összegzünk.** J és H 1-től n-ig fut, F, G, I, K és L 1-től 4-ig (általánosabban a téridő dimenziójáig) . A hatásban a következő jelöléseket alkalmaztuk:

$$V_\alpha^J = \sum_L (c_L^J A_\alpha^L + \partial_\alpha E^J) \tag{122}$$

$$d_{KL}^J = \delta_L^K \tag{123}$$

$\gamma^{\alpha\beta}$, M_J, m_J^{KL}, n_J^K, N multiplikátorok szerepét töltik be, c_L^J, A_α^L, $E_{L\alpha}^J$ és $B_{L\alpha}^J$ pedig dinamikai változók. Az alább levezetendő mozgásegyenletek alapján V_α^J -t a J sorszámú porkomponens négyessebességeként tudjuk értelmezni. A D^J mennyiségek nem változók, hanem az áltlános hatás azon paraméterei, amellyel a J sorszámú porkomponens típusát írjuk elő egy konkrét hatásban. $D^J = 0$ a null por, $D^J = 1$ a közönséges por esetében. A_α^L négy tetszőleges vektor lehet, alkothatnak bázist a téridőben, de ezt nem követeljük meg. A V_α^J vektorokat a c_L^J skalár együtthatókkal fejtjük ki a négy A_α^L vektor segítségével. Ez a 4 dimenziós téridőben azt a szándékunkat formalizálja, hogy nem élünk semmilyen előfeltételezéssel a V_α^J sebességeket illetően: minden, amit a sebességekről tudunk, a variációs elvből kell következnie. Az E^J potenciálok a folytonossági egyenlet levezethetősége miatt kerültek a hatásba. A $B^J_{L\alpha}$ vektorokról látni fogjuk, hogy tögzített J -re $\left\{B^J_{L\alpha}\right\}$ ortonormált bázis a téridőn. Ennek a geodetikus egyenlet előállításában van jelentősége. A mozgásegyenletek alapján M_J a J sorszámú porkomponens tömegsűrűségeként értelmezhető. A porkeverékek Euler-Lagrange egyenletei a következők:

$$\begin{aligned}
T_{\varepsilon\varphi} &= -2\gamma^{-1/2}\frac{\delta S}{\delta\gamma^{\varepsilon\varphi}} = -2\gamma^{-1/2}\sum_{J,K,L}\langle -\gamma^{1/2}\{\frac{M_J}{4}(-V^J_\alpha V^J_\beta\gamma^{\alpha\beta}\gamma_{\varepsilon\varphi} + 2V^J_\varepsilon V^J_\varphi - D^J\gamma_{\varepsilon\varphi}) \\
&+\frac{m^{KL}_J}{4}(-B^J_{K\alpha}B^J_{L\beta}\gamma^{\alpha\beta}\gamma_{\varepsilon\varphi} + B^J_{K(\varepsilon}B^J_{L\varphi)} - d^J_{KL}\gamma_{\epsilon\varphi}) \\
&+\frac{n^K_J}{4}(-B^J_{K\eta}V^J_\beta\partial_\mu V^J_\alpha\gamma^{\alpha\eta}\gamma^{\beta\mu}\gamma_{\varepsilon\varphi} + V^J_\beta\gamma^{\beta\mu}\partial_\mu V^J_{(\varepsilon}B^J_{K\varphi)} \\
&+B^J_{K\eta}\gamma^{\alpha\eta}V^J_{(\varphi}\partial_{\varepsilon)}V^J_\alpha) + [\frac{n^K_J}{8}(B^J_{K\eta}V^J_\nu V^J_\beta\gamma^{\alpha\eta}\gamma^{\beta\mu}\gamma^{\nu\sigma}\partial_\mu\gamma_{\sigma\alpha}\gamma_{\varepsilon\varphi} \\
&-V^J_\nu V^J_\beta\gamma^{\beta\mu}\gamma^{\nu\sigma}\partial_\mu\gamma_{\sigma(\varepsilon}B^J_{K\varphi)} - B^J_{K\eta}V^J_\nu\gamma^{\alpha\eta}\gamma^{\upsilon\sigma}V^J_{(\varepsilon}\partial_{\varphi)}\gamma_{\sigma\alpha} \\
&-B^J_{K\eta}V^J_\beta\gamma^{\alpha\eta}\gamma^{\beta\mu}\partial_\mu\gamma_{\alpha(\varphi}V^J_{\varepsilon)} + B^J_{K\eta}V^J_\beta\gamma^{\alpha\eta}\gamma^{\beta\mu}\partial_\mu\gamma_{\alpha(\varphi}V^J_{\varepsilon)}) \\
&+\partial_\mu(\frac{n^K_J}{8}B^J_{K\eta}V^J_\nu V^J_\beta\gamma^{\beta\mu}\gamma^\nu_{(\varepsilon}\gamma^\eta_{\varphi)})] + [\alpha\leftrightarrow\mu] + [\mu\leftrightarrow\sigma] \\
&+\frac{N}{4}(m^{KL}_J)^2\gamma_{\varepsilon\varphi} + \frac{N}{4}(n^K_J)^2\gamma_{\varepsilon\varphi}\}\rangle \qquad (124)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
0 &= \frac{\delta S}{\delta c_I^H} = \sum_K [-\gamma^{1/2}(M_H \gamma^{\alpha\beta} V_\alpha^H A_\beta^I + \frac{n_H^K}{2} B_K^{H\alpha} A_\beta^I \nabla^\beta V_\alpha^H) \\
&\quad + \nabla^\beta(\gamma^{1/2} \frac{n_H^K}{2} B_K^{H\alpha} V_\beta^{H\alpha} V_\beta^H) A_\alpha^I] && (125) \\
0 &= \frac{\delta S}{\delta A_\varepsilon^I} = \sum_{J,K} [-\gamma^{1/2}(M_J \gamma^{\alpha\varepsilon} V_\alpha^J c_I^J + \frac{n_J^K}{2} B_K^{J\alpha} c_I^J \nabla^\varepsilon V_\alpha^J) \\
&\quad + \nabla^\beta(\gamma^{1/2} \frac{n_J^K}{2} B_K^{J\varepsilon} V_\beta^J) c_I^J] && (126) \\
0 &= \frac{\delta S}{\delta E^H} = \sum_K \{-\partial_\beta [\frac{\gamma^{1/2}}{2}(-M_H \gamma^{\alpha\beta} V_\alpha^H - n_H^K B_K^{H\alpha} \nabla^\beta V_\alpha^H) \\
&\quad + \nabla^\alpha(\frac{\gamma^{1/2}}{2} n_H^K B_K^{H\beta} V_\alpha^H)]\} && (127) \\
0 &= \frac{\delta S}{\delta B_{I\varepsilon}^H} = -\gamma^{1/2} \sum_K (m_H^{KI} \gamma^{\alpha\varepsilon} B_{K\alpha}^H - \frac{1}{2} n_H^I V_\beta^H \nabla^\beta V^{H\varepsilon}) && (128) \\
0 &= \frac{\delta S}{\delta M_H} = -\frac{\gamma^{1/2}}{2}(\gamma^{\alpha\beta} V_\alpha^H V_\beta^H + D^H) && (129) \\
0 &= \frac{\delta S}{\delta m_H^{FG}} = -\frac{\gamma^{1/2}}{2}(\gamma^{\alpha\beta} B_{F\alpha}^H V_{G\beta}^H + d_{FG}^H + 2N m_H^{FG}) && (130) \\
0 &= \frac{\delta S}{\delta n_H^I} = -\frac{\gamma^{1/2}}{2}(B_I^{H\alpha} V_\beta^H \nabla^\beta V_\alpha^H + 2N n_H^I) && (131) \\
0 &= \frac{\delta S}{\delta N} = \sum_{J,K,L} [(m_J^{KL})^2 + (n_J^K)^2] && (132)
\end{aligned}
$$

A következő alfejezetben ezeket a bonyolult egyenleteket leegyszerűsítjük azáltal, hogy mindegyikben felhasználjuk a többiből származó információkat. Így a porkeverék valódi, fizikai jelentéssel rendelkező mozgásegyenleteit tudjuk származtatni.

7.2. A porkeverék mozgásegyenletei

A fenti egyenletek vizsgálata nyomán az egyenletrendszer egyszerűsíthető. A (132) egyenlet alapján az M_J^{KL} és n_J^K multiplikátorok eltűnnek..

$$0 = m_J^{KL} = n_J^K \tag{133}$$

A (129) egyenlet normálja a sebességvektorokat az előírt D^J paraméterek szerint.

$$0 = \gamma^{\alpha\beta} V_\alpha^H V_\beta^H + D^H \tag{134}$$

A normákat és (133) -t (134) -ben felhasználva az energia impulzus tenzor

$$T_{\varepsilon\varphi} = \sum_J M_J V^J_\varepsilon V^J_\varphi \ . \tag{135}$$

Ezért a porkeverékek energia-impulzus tenzora az egyes porkomponensek energia-impulzus tenzorainak összege. A további egyenletek:

$$\begin{aligned} 0 &= \gamma^{\alpha\beta} B^H_{F\alpha} B^H_{G\beta} + d^H_{FG} & (136) \\ 0 &= B^{H\alpha}_I V^H_\beta \nabla^\beta V^H_\alpha & (137) \\ 0 &= \nabla_\beta \left(M_H \gamma^{\alpha\beta} V^H_\alpha \right) & (138) \\ 0 &= \sum_J M_J \gamma^{\alpha\varepsilon} V^J_\alpha c^J_I & (139) \end{aligned}$$

(136) és (123) alapján a $B^H_{F\alpha}$ vektorok rögzített H -ra ortonormált bázist alkotnak:

$$\gamma^{\alpha\beta} B^H_{F\alpha} B^H_{G\beta} = -d^H_{FG} = -\delta^F_G$$

Így a variációs elv mindegyik porkomponenshez konstruál egy bázist. Emiatt a (137) egyenlet alapján a $V^H_\beta \nabla^\beta V^H_\alpha$ iránymenti deriváltaknak négy független komponense tűnik el, minden H -ra. 4 dimenziós téridőben ez éppen azt jelenti, hogy maga az iránymenti derivált eltűnik:

$$0 = V^H_\beta \nabla^\beta V^H_\alpha \tag{140}$$

Azt kaptuk, hogy mindegyik négyessebesség geodetikus vektormező. A porrészecskék tehát szabad mozgást végeznek. A (138) egyenlet a folytonossági egyenleteket adja:

$$\nabla_\beta \left(M_H V^{H\beta} \right)$$

mindegyik porkomponensre. A geodetikus és folytonossági egyenleteket kombinálva, a

$$\nabla^\beta \left(M_H V^H_\alpha V^H_\beta \right) = 0$$

megmaradási tételhez jutunk. Látjuk, hogy a porkomponensek energia-impulzus tenzorai külön-külön megmaradnak. A különböző porok tehát semmilyen kölcsönhatásban nincsenek egymással. A (139) egyenlet szerint a V^J_α vektorok lineárisan függőek. Ebből következik, hogy ha kevesebb porkomponens van a téridőben, mint a tér dimenziószáma, akkor a négyessebességek egyállású csoportokat alkotnak.

8. A tökéletes folyadék kanonikus elmélete

Időrendben az egyszerű anyagi források kanonikus elmélete a tökéletes folyadék tárgyalásával kezdődött. Brown 1993-as munkája [4] alapján az alábbiakban bemutatjuk a tökéletes folyadék hamiltoni formalizmusát. Definíció szerint egy tökéletes folyadék energia-impulzus tenzora

$$T^{ab} = \rho U^a U^b + p\left(g^{ab} + U^a U^b\right) \tag{141}$$

alakú, ahol U^a a folyadék egység négyessebességvektora. Az S tökéletes folyadék hatás egy J^a téridő kovariáns vektorsűrűség funkcionálja, amit az nU^a részecskeszám fluxus vektor $\sqrt{-g}nU^a$ sűrűségeként értelmezünk. A folyadék négyessebességét

$$U^a := J^a / |J|$$

definiálja, ahol

$$|J| := \sqrt{-J^a g_{ab} J^b}$$

J^a nagysága és a részecskeszám sűrűség

$$n := |J| / \sqrt{-g}\ .$$

Ez a hatás függ még a g_{ab} téridő metrikától, az egy részecskére eső s entrópiától, az Z^A Lagrange koordinátáktól és a φ -vel, θ -val és W_A -val jelölt téridő skalároktól. Az A , B indexek értékei 1,2,3 . A termodinamika első törvényének lokális kifejezése [17]

$$d\rho = \mu dn + nTds \tag{142}$$

ahol ρ az energiasűrűség , n a koncentráció, s az egy részecskére eső entrópia, μ a kémiai potenciál és T a hőmérséklet. A nyomás definíciója $p := n\mu - \rho$. Ezek a mennyiségek jellemzik egy folyadék termodinamikai állapotát a folyadék nyugalmi rendszerében. A (142) egyenletekből látszik, hogy a folyadék állapotegyenletét a $\rho(n, s)$ függvény határozza meg. Tetszőleges $\rho(n, s)$ állapotfüggvénnyel a hatás

$$S\left[g_{ab},J^a,\varphi,\theta,s,Z^A,W_A\right]=\int d^4x\left\{-\sqrt{-g}\rho\left(|J|/\sqrt{-g},s\right)+J^a\left(\varphi_{,a}+s\theta_{,a}+W_AZ^A_{,a}\right)\right\}\ . \tag{143}$$

Ebből a hatásból a

$$T^{ab}:=\frac{2}{\sqrt{-g}}\frac{\delta S}{\delta g_{ab}}=\rho U^aU^b+\left(n\frac{\partial\rho}{\partial n}-\rho\right)\left(g^{ab}+U^aU^b\right)$$

energia-impulzus tenzor vezethető le, ami (141) tökéletes folyadék alakú ρ energiasűrűséggel és

$$p:=n\frac{\partial\rho}{\partial n}-\rho$$

nyomással. A (143) folyadék hatásból levezetett folyadék mozgásegyenletek a következők:

$$0=\frac{\delta S}{\delta J^a}=\mu U_a+\varphi_{,a}+s\theta_{,a}+W_AZ^A_{,a}\ , \tag{144}$$

$$0=\frac{\delta S}{\delta\varphi}=-J^a_{,a}\ , \tag{145}$$

$$0=\frac{\delta S}{\delta\theta}=-\left(sJ^a\right)_{,a}\ , \tag{146}$$

$$0=\frac{\delta S}{\delta s}=-\sqrt{-g}\frac{\partial\rho}{\partial s}+\theta_{,a}J^a\ , \tag{147}$$

$$0=\frac{\delta S}{\delta\alpha^a}=-\left(W_AJ^a\right)_{,a}\ ,$$

$$0=\frac{\delta S}{\delta\beta_A}=Z^A_{,a}J^a\ . \tag{148}$$

Az $Z^A(x)$ mezőket Lagrange koordinátákként értelmezzük a folyadék számára, és ezek címkékként szolgálnak, amelyek megadják, hogy melyik áramvonal megy át egy adott x téridő ponton. A θ skalármező jelentőségére fény derül, ha a (147) mozgásegyenletet összevetjük a termodinamika első törvényével. Ez a

$$T=\theta_{,a}U^a=\frac{1}{n}\frac{\partial S}{\partial s} \tag{149}$$

azonosításra vezet a T folyadékhőmérséklettel kapcsolatban. Kontraháljuk a (144) egyenletet U^a -val és alkalmazzuk a (148) és (149) egyenleteket.

$$f=\varphi_{,a}U^a$$

Így θ egy "potenciál" T -hez és φ egy potenciál az f kémiai szabadenergiához. A részecskeáram megmaradását a (145) egyenlet fejezi ki. ([17]) alapján

$$0 = U_a T^{ab}_{;b} = -\frac{\partial \rho}{\partial s} s_{,a} U^a \ .$$

Ez az egyenlet összekapcsolja a (145) részecskeráram megmaradást és a (146) entrópiacsere kényszert. Az egy részecskére eső entrópia állandó a folyadék áramvonalai mentén. A

$$V_a := \mu U_a$$

vektort gyakran Taub áramnak nevezik és fontos szerepet játszik a relativisztikus folyadékdinamikában, különösen a keringés és örvénylés leírásában [23]. A mozgásegyenletekből következik a

$$2V_{[a;b]}U^b = Ts_{,a}$$

egyenlet. Számoljuk ki $2V_{[a;b]}U^b$ -t V_a (144) egyenletből nyert kifejezésével.

$$2V_{[a;b]}U^b = -2\left(\varphi_{,[a} + s\theta_{,[a} + W_A Z^A_{,[a}\right)_{;b]} U^b \tag{150}$$

A mozgásegyenletekből következik, hogy az s , Z^A és W_A gradienseit tartalmazó tagok az áramvonalak mentén mind eltűnnek. A (150) egyenlet jobb oldalán csak az $s_{,a}\theta_{,b}U^b$ tag marad. A (149) egyenlet miatt ez a tag $Ts_{,a}$ -val egyenlő. A (143) hatás hamiltoni alakban írható, ha előbb bevezetjük a mezők téridő felbontását. Jelöljön t egy skalárfüggvényt a téridőn, aminek gradiense időszerű. A $t =$ állandó felületek a téridőt térszerű hiperfelületekkel fóliázzák, amelyek $n_a = -Nt_{,a}$ egység normálisa definiálja az $N := \left(-t_{,a}g^{ab}t_{,b}\right)^{-1/2}$ lapse függvényt. Vezessük be a t^a idő vektormezőt is, úgy hogy $t_{,a}t^a = 1$ és a $h^a_b := \delta^a_b + n^a n_b$ tenzort, ami a fóliázás rétegeire vetít. Az $N^a := h^a_b t^b$ shift vektorral az idő vektormező $t^a = Nn^a + N^a$ alakban írható. A J^a vektorsűrűség felbontása

$$J^a = h^a_b J^b - n^a n_b J^b = (hJ)^a + (t^a - N^a)\,\Pi\ , \tag{151}$$

ahol alkalmaztuk a $(hJ)^a := h^a_b J^b$ és $\Pi := t_{,a}J^a$ definíciókat. Mivel $J^a = \sqrt{-g}nU^a$ a részecskeszám fluxus vektorsűrűség, az utóbbi definícióból

$$\Pi = \sqrt{h}n\left(-n_a U^a\right)\ ,$$

ahol $\sqrt{-g} = N\sqrt{h}$ -t használtuk. $\Pi/\sqrt{h}$ a folyadékrészecskék koncentrációja a $t =$ áll. hiperfelületeken nyugalomban lévő euleri megfigyelők szerint. A (151) felbontás alapján a (143) hatás

$$\begin{aligned} S &= \int d^4x \{ -\sqrt{-g}\rho(|J|/\sqrt{-g}, s) + \Pi t^a(\varphi_{,a} + s\theta_{,a} + W_A Z^A_{,a}) \\ &+ ((hJ)^a - \Pi N^a)(\varphi_{,a} + s\theta_{,a} + W_A Z^A_{,a}) \} \, . \end{aligned} \tag{152}$$

Kössük a téridő koordinátákat a fóliázáshoz és válasszuk t -t időszerű koordinátának és válasszuk a tér koordinátákat úgy, hogy $(\partial/\partial t)^a = t^a$. Ebben a koordinátarendszerben a metrika ADM alakú:

$$g_{ab}dx^a dx^b = -N^2dt^2 + h_{ij}\left(dx^i + N^i dt\right)\left(dx^j + N^j dt\right) \ ,$$

ahol x^i a térkoordináták a $t =$ áll. hiperfelületeken és h_{ij} a h_{ab} téridő tenzor térbeli komponensei. A (152) hatás

$$\begin{aligned} S &= \int dt d^3x [(\Pi\dot{\varphi} + s\dot{\theta} + W_A \dot{Z}^A) \\ &-N\sqrt{h}\rho(|J|/N\sqrt{h}, s) + ((hJ)^i - \Pi N^i)(\varphi_{,i} + s\theta_{,i} + W_A Z^A_{,i})] \, . \end{aligned}$$

A hatás kanonikus alakja

$$S = \int dt d^3x \left[\Pi\dot{\varphi} + (\Pi s)\,\dot{\theta} + (\Pi W_A)\,\dot{Z}^A - N\mathcal{H}^f - N^i\mathcal{H}^f_i\right] \ ,$$

ahol a folyadék hozzájárulása a hamiltoni és impulzus kényszerekhez

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^f &= \sqrt{h}\left[\rho\left(1 + U^iU_i\right) + \rho U^iU_i\right] \ , \\ \mathcal{H}^f_i &= -\mu\Pi U_i \, . \end{aligned}$$

A megfelelő tökéletes folyadék Hamilton funkcionál

$$H^f := \int d^3x \left(N\mathcal{H}^f + N^i\mathcal{H}^f_i\right) \, .$$

A tökéletes folyadék kanonikus mozgásegyenletei:

$$
\begin{aligned}
\dot{\varphi} &= -\frac{\delta H^f}{\delta \Pi} = N\left(f - U^i \varphi_{,i}\right)\left(1 + U^j U_j\right)^{-1/2} + N^i \varphi_{,i} \ , \\
\dot{\theta} &= -\frac{\delta H^f}{\delta\left(\Pi s\right)} = N\left(T - U^i \theta_{,i}\right)\left(1 + U^j U_j\right)^{-1/2} + N^i \theta_{,i} \ , \\
\dot{Z}^A &= -\frac{\delta H^f}{\delta\left(\Pi W_A\right)} = N\left(-U^i Z^A_{,i}\right)\left(1 + U^j U_j\right)^{-1/2} + N^i Z^A_{,i} \ , \\
\dot{\Pi} &= -\frac{\delta H^f}{\delta \varphi} = -\left(N\sqrt{h} n U^i\right)_{,i} + \left(N^i \Pi\right)_{,i} \ , \\
\left(\Pi s\right)^{\bullet} &= -\frac{\delta H^f}{\delta \theta} = -\left(N\sqrt{h} n s U^i\right)_{,i} + \left(N^i \Pi s\right)_{,i} \ , \\
\left(\Pi \beta_A\right)^{\bullet} &= -\frac{\delta H^f}{\delta Z^A} = -\left(N\sqrt{h} n W_A U^i\right)_{,i} + \left(N^i \Pi W_A\right)_{,i} \ .
\end{aligned}
$$

Ezek az egyenletek a tökéletes folyadék Euler-Lagrange egyenleteivel ekvivalensek, bár fizikai értelmezésük kevésbé természetes, mint a variációs elvből kapott egyenletek. Ugyanakkor éppen ezek szükségesek a folyadék időfejlődésének vizsgálatakor.

9. A Schwarzschild-téridő ADM formalizmusa

A Schwarzschild téridő ADM formalizmusa Kuchařtól származik [2]. Az eddigiektől eltérően, ez tisztán vákuumgravitációs elmélet, azaz a dinamikai változók az indukált metrika és a külső görbület. Kuchař a forrásmentes téridő Arnowitt, Deser és Misner által kidolgozott elméletének [1] gömbszimmetriára való alkalmazásával képes volt a Schwarzschild téridő egyetlen független paraméterét, az M Schwarzschild-tömeget rekonstruálni a geometriai adatokból. A kövekezőkben az ehhez vezető utat mutatjuk be.

9.1. A fekete lyukak geometrodinamikája

A Schwarzschild ívelem a (T, R) görbületi koordinátákban

$$ds^2 = -F\left(R\right) dT^2 + F^{-1}\left(R\right) dR^2 + R^2 d\Omega^2 \ . \tag{153}$$

$d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2$ az ívelem az egységgömbön. Az $F\left(R\right)$ együttható

$$F\left(R\right) = 1 - 2M/R \tag{154}$$

alakú, ahol M egy állandó. Az R görbületi koordinátát invariánsan definiálja az a követelmény, hogy a $T =$ áll. , $R =$ áll. kétdimenziós gömbfelületek felszíne $4\pi R^2$. A $\partial/\partial T$ vektormező a (153) metrika egy Killing vektormezője. T -t Killing időnek nevezzük. $M = 0$ esetén a téridő sík. Az $M > 0$ megoldások fekete lyukakat írnak le, az $M < 0$ megoldások csupasz szingularitásoknak felelnek meg. Az $R = 2M$ helyen a (153) megoldásnak koordináta szingularitása van. A teljes M téridőt Kruskal diagrammal szemléltetjük ([24]). A görbületi koordináta négy periódusa fedi le, amelyek az $F(R) = 0$ horizontban találkoznak. Két tartományban $R > 2M$ és bennük a $\partial/\partial T$ Killing mező időszerű. Jobb és bal oldali sztatikus tartományoknak nevezzük ezeket, jelük I. és III. . Két másik tartományban $R < 2M$ és bennük a $\partial/\partial T$ Killing mező térszerű. Múltbeli és jövőbeli dinamikai tartományoknak nevezzük ezeket, jelük IV. és II. . Az $R = 0$ helyen egy valódi görbületi szingularitás van. A teljes Schwarzschild téridő lefedhető az U és V Kruskal koordináták egyetlen tartományával. Az $U =$ áll. vonalak radiálisan jobbra tartó null geodetikusok, a $V =$ áll. vonalak radiálisan balra tartó null geodetikusok. A horizont az $U = 0$ és $V = 0$ vonalra van transzformálva. A görbületi koordináták által lefedett tartományok a következők

I. $R > 2M$ $U < 0$ $V > 0$,

III. $R > 2M$ $U > 0$ $V < 0$,

II $R < 2M$ $U > 0$ $V > 0$,

IV. $R < 2M$ $U < 0$ $V < 0$.

Legyen (Σ, g) háromdimenziós gömbszimmetrikus Riemann-tér és ennek $x \in \Sigma$ pontjai x^a koordinátáit adaptáljuk a szimmetriához: $x^a = (r, \theta, \varphi)$ .A $d\sigma$ ívelemet Σ -n a radiális r koordináta $\Lambda(r)$ és $R(r)$ függvénye teljesen jellemzi:

$$d\sigma^2 = \Lambda^2(r)\, dr^2 + R^2(r)\, d\Omega^2 \,. \tag{155}$$

Az alapvető fekete lyukak topológiája $\Sigma = \Re \times S^2$, és így $r \in \Re$ $-\infty$ -től ∞ -ig fut. A $\Lambda(r)$ és $R(r)$ együtthatók nem tűnhetnek el, mert az ívelemnek regulárisnak kell lennie. Válasszuk mindkettőt pozitívnak, $\Lambda(r) > 0$ és $R(r) > 0$. A skaláris kanonikus változókat latin betűkkel, a skalársűrűségeket görög betűkkel fogjuk jelölni. A (155) ívelem az

$$\mathbf{R}[g] = -4\Lambda^{-2}R^{-1}R'' + 4\Lambda^{-3}R^{-1}\Lambda' R' - 2\Lambda^{-2}R^{-2}R'^2 + 2R^{-2}$$

görbületi skalárra vezet. Fóliázzunk egy gömbszimmetrikus M téridőt gömbszimmetrikus

Σ fóliákkal és címkézzük a fóliákat egy $t \in \Re$ időparaméterrel. A gömbszimmetria miatt a shift vektornak csak az N^r radiális komponense marad meg. A fóliák K_{ab} külső görbületét a metrika t idő szerinti megváltozásának $\dot{g}_{ab}$ üteme adja meg:

$$K_{ab} = \frac{1}{2N}\left(-\dot{g}_{ab} + N_{(a|b)}\right) \ .$$

A (155) gömbszimmetrikus ívelem esetében K_{ab} diagonális

$$\begin{aligned} K_{rr} &= -N^{-1}\Lambda\left(\dot{\Lambda} - (\Lambda N^r)'\right) \ , && (156) \\ K_{\theta\theta} &= -N^{-1}\dot{R}\left(\dot{R} - R'N^r\right) \quad , \quad K_{\Phi\Phi} = \sin^2\theta K_{\theta\theta} \ . && (157) \end{aligned}$$

A metrika mező vákuum dinamikája az ADM hatásból következik.

$$S_\Sigma\left[g, N, N^a\right] = \int dt \int d^3x L_\Sigma \ ,$$

aminek L_Σ Lagrange sűrűsége

$$L_\Sigma = N\left|g\right|^{1/2}\left(K^{ab}K_{ab} - K^2 + R\left[g\right]\right) \ .$$

A (155), (156), (157) gömbszimmetrikus téridőben

$$\begin{aligned} & N\left|g\right|^{1/2}\left(K^{ab}K_{ab} - K^2\right) \\ = \ & -2N^{-1}\sin\theta\left(2\left(-R + (\Lambda N^r)'\right)\left(-\dot{R} + R'N^r\right) + \frac{1}{2}\Lambda\left(-\dot{R} + R'N^r\right)^2\Lambda\right) \ . \end{aligned}$$

A θ és Φ szerinti integrálás megadja egy Schwarzschild fekete lyuk ADM hatását:

$$\begin{aligned} & S_\Sigma\left[R, \Lambda; N, N^r\right] && (158) \\ = & \int dt \int_{-\infty}^{\infty} dr[-N^{-1}((R - \dot{\Lambda} + (\Lambda N^r)')(-\dot{R} + R'N^r) \\ & + \frac{1}{2}\Lambda(-\dot{R} + R'N^r)^2) + N(-\Lambda^{-1}RR'' + \Lambda^{-2}RR'\Lambda' - \frac{1}{2}\Lambda^{-1}R'^2 + \frac{1}{2}\Lambda)] \ . \end{aligned}$$

Az ADM hatást az $\dot{\Lambda}$ és $\dot{R}$ sebességek szerint differenciálva, meghatározzuk az impulzusokat

$$
\begin{aligned}
P_\Lambda &= -N^{-1}R\left(\dot{R}-R'N^r\right) \ , && (159)\\
P_R &= -N^{-1}\left(\Lambda\left(\dot{R}-R'N^r\right)+R\left(\dot{\Lambda}-\left(\Lambda N^r\right)'\right)\right) \ . && (160)
\end{aligned}
$$

A konjugált impulzusok ellentétes súlyt hordoznak. Emiatt az R skalárhoz konjugált P_R impulzus egy sűrűség, míg a Λ sűrűséghez konjugált impulzus egy skalár. A (159), (160) egyenletek invertálhatók a sebességekre:

$$
\begin{aligned}
\dot{\Lambda} &= -NR^{-2}\left(RP_R-\Lambda P_\Lambda\right)+\left(\Lambda N^r\right)' \ ,\\
\dot{R} &= -NR^{-1}P_\Lambda+R'N^r \ .
\end{aligned}
$$

Ezek lehetővé teszik, hogy a külső görbületet a kanonikus impulzusok függvényében írjuk fel:

$$
K_{rr}=\Lambda R^{-2}\left(RP_R-\Lambda P_\Lambda\right) \qquad , \qquad K_{\theta\theta}=P_\Lambda \ .
$$

A szimmetria miatt, Σ egy normális metszetének görbülete eléri K_1, K_2, K_3 szélsőértékét az $r=$ állandó kétdimenziós gömbökre érintőleges vagy merőleges metszetek esetében. Az utólsó egyenlet megengedi, hogy kifejezzük ezeket a $K_1=K_{\|}$ és $K_2=K_3=K_\perp$ főgörbületeket az impulzusokkal:

$$
\begin{aligned}
K_{\|} &= K^r_r=\Lambda^{-1}R^{-2}\left(RP_R-\Lambda P_\Lambda\right)\\
K_\perp &= K^\theta_\theta=K^\Phi_\Phi=R^{-2}P_\Lambda
\end{aligned}
$$

Invertálva

$$
P_\Lambda=R^2K_\perp \qquad , \qquad P_R=R\Lambda\left(K_{\|}+K_\perp\right) \ .
$$

Ez a kanonikus impulzusokat egy invariáns geometriai jelentéssel ruházza fel. Látható, hogy P_Λ arányos $K_\perp$ -val, P_R arányos $K_{\|}$ és $K_\perp$ összegével. A (158) hatást kanonikus alakra lehet hozni Legendre-transzformációval.

$$
\begin{aligned}
S_\Sigma\left[\Lambda, R, P_\Lambda, P_R; N, N^r\right] &= \int dt \int_{-\infty}^{\infty} dr \left(P_\Lambda \dot{\Lambda} + P_R \dot{R} - NH - N^r H_r\right) \ , \\
H \quad &: = -R^{-1} P_R P_\Lambda + \frac{1}{2} R^{-2} \Lambda P_\Lambda^2 + \Lambda^{-1} R R'' \\
&\quad - \Lambda^{-2} R R' \Lambda' + \frac{1}{2} \Lambda^{-1} R'^2 - \frac{1}{2} \Lambda \ , \\
H_r \quad &: = P_R R' - \Lambda P_\Lambda' \ .
\end{aligned}
$$

Arnowitt, Deser és Misner az S_Σ hiperfelületi hatást kiegészítette egy végtelenbeli $S_{\partial\Sigma}$ határ hatással [1], [16]. Egy alapvető fekete lyuknak két végtelenje van, és így két határtag van.

$$
S_{\partial\Sigma} = -\int dt \left(N_+ (t) E_+ (t) + N_- (t) E_- (t)\right)
$$

Mindkettő a lapse függvény és az ADM energia szorzata. $E_\pm = M_\pm$, egy fekete lyuk ADM energiája a Schwarzschild tömege. Egy alapvető fekete lyuk teljes hatása az alábbi alakot veszi fel:

$$
\begin{aligned}
& S\left[\Lambda, P_\Lambda, R, P_R; N, N^r\right] & (161) \\
= & \int dt \int_{-\infty}^{\infty} dr \left(P_\Lambda \dot{\Lambda} + P_R \dot{R} - NH - N^r H_r\right) - \int dt \left(N_+ M_+ + N_- M_-\right) & (162)
\end{aligned}
$$

Az ADM határhatás egy kellemetlen, óvatosságra intő tényre vezet. Enélkül a lapse és a shift függvényeket az S_Σ hiperfelületi hatásban szabadon lehetne variálni. Amikor a határtag benne van, a teljes $S = S_\Sigma + S_{\partial\Sigma}$ hatás variációja az alábbit adja:

$$
\delta_N S = -\int dt \left(M_+ (t) \delta N_+ (t) + M_- (t) \delta N_-\right) \ .
$$

Ha megengednénk $N(t, r)$ variációját a végtelenben, egy nem kívánt természetes határfeltételt kapnánk: $M_+ = 0 = M_-$. Ez kizárná a fekete lyuk megoldásokat és csak egy sík téridőt hagyna meg. Emiatt a (161) variációs elvben meg kell követelnünk, hogy a lapse függvény $N_\pm (t)$ értékei a végtelenben a t valamilyen előírt függvényei legyenek, amelyeket nem variálunk. A lapse függvény végtelenben való rögzítésének szükségessége megszüntethető paraméterezéssel. A lapse függvény a τ sajátidő megváltozásának üteme a t címke idő szerint a fóliázásra merőleges irányban. Mivel $N_\pm^r (t) = 0$, azt írhatjuk, hogy

$$N_{\pm}(t) = \pm\dot{\tau}_{\pm}(t) \ ,$$

ahol $\tau_{\pm}(t)$ az $r =$ állandó világvonalak mentén mozgó sztenderd órákon mért sajátidő a végtelenekben. Most kicseréljük a lapse függvényt az ADM határhatásban $\tau_{\pm}$ deriváltjaival és $\tau_{\pm}(t)$ -t további változókként kezeljük:

$$\begin{aligned} & S\left[\Lambda, P_{\Lambda}, R, P_R; N, N^r; \tau_{+,}\tau_{-}\right] & (163) \\ = & \int dt \int_{-\infty}^{\infty} dr \left(P_{\Lambda}\dot{\Lambda} + P_R\dot{R} - NH - N^r H_r\right) - \int dt \left(M_{+}\dot{\tau}_{+} - M_{-}\dot{\tau}_{-}\right) \ . & (164) \end{aligned}$$

A (163) hatásban a $\tau_{\pm}(t)$ változók szabadon variálhatók.Variációjuk eredménye egy érvényes egyenlet, nevezetesen a tömegmegmaradás.

$$\dot{M}_{+}(t) = 0 = \dot{M}_{-}(t)$$

Induljunk ki abból az ismeretből, hogy a hiperfelületnek be kell ágyazódnia egy (153) vonalelemmel felruházott téridőbe. Legyen a hiperfelület a fóliázás egy fóliája:

$$T = T(t, r) \quad , \quad R = R(t, r) \ . \tag{165}$$

A (153) ívelem egy belső metrikát és egy külső görbületet indukál a hiperfelületen. Összehasonlítva ezeket a mennyiségeket a kanonikus adatokkal, összekapcsoljuk a téridő formalizmust a kanonikus formalizmussal. Ez a kapcsolódás lehetővé teszi a Schwarzschild tömeg azonosítását. Programunk megvalósításához a (165) fóliázást behelyettesítjük a (153) Schwarzschild ívelembe.

$$\begin{aligned} ds^2 &= -\left(FT^{\cdot 2} - F^{-1}R^{\cdot 2}\right)dt^2 + 2\left(-FT'T^{\cdot} + F^{-1}R'R^{\cdot}\right)dtdr \\ &\quad + \left(-FT'^2 + F^{-1}R'^2\right)dr^2 + R^2 d\Omega^2 \end{aligned}$$

Összehasonlítva ezt az eredményt az ívelem ADM alakjával

$$ds^2 = -\left(N^2 - \Lambda^2\left(N^r\right)^2\right)dt^2 + 2\Lambda^2 N^r dtdr + \Lambda^2 dr^2 + R^2 d\Omega^2 \ ,$$

három egyenletből álló rendszert kapunk:

$$
\begin{aligned}
\Lambda^2 &= -FT'^2 + F^{-1}R'^2 \,, & (166)\\
\Lambda^2 N^r &= -FT'\dot{T} + F^{-1}R'\dot{R} \,, & \\
N^2 - \Lambda\,(N^r)^2 &= F\dot{T}^2 - F^{-1}\dot{T}R^2 \,. & (167)
\end{aligned}
$$

Az első két egyenlet megoldható N^r -re:

$$
N^r = \frac{-FT'\dot{T} + F^{-1}R'\dot{R}}{-FT'^2 + F^{-1}R'^2} \,. \tag{168}
$$

Ez az N^r megoldás a (166) által adott Λ -val behelyettesíthető a maradék (167) egyenletbe, ami ezután megoldható a lapse-re:

$$
N = \frac{R'\dot{T} - T'\dot{R}}{\sqrt{-FT'^2 + F^{-1}R'^2}} \,. \tag{169}
$$

Most behelyettesítjük N^r és N (168) és (169) kifejezését (159) -be és kiszámoljuk P_Λ -t. Az alábbi relációt kapjuk:

$$
T' = -R^{-1}F^{-1}\Lambda P_\Lambda \,. \tag{170}
$$

Visszahelyettesítve ezt a T' -t (166) -ba, ki tudjuk számolni F -et, mint a kanonikus adatok függvényét:

$$
F = \left(\frac{R'}{\Lambda}\right)^2 - \left(\frac{P_\Lambda}{R}\right)^2 \,.
$$

Mivel ismerjük F -et M -mel és R -rel kifejezve, meg tudjuk határozni a Schwarzschild tömeget:

$$
M = -R^{-1}P_\Lambda^2 - \frac{1}{2}\Lambda^{-2}RR'^2 + \frac{1}{2}R \,. \tag{171}
$$

A (171) összefüggés miatt M nem szükségképpen állandó, hanem t -től és r -től függhet. T' és M kanonikusan konjugált változópárt alkotnak. Jelöljük a T' dinamikai változót P_M -mel. (171) konstrukciója miatt

$$
P_M = R^{-1}F^{-1}\Lambda P_\Lambda \tag{172}
$$

skalársűrűség. Mivel M és P_M kifejezései nem tartalmazzák P_R -t, a Poisson zárójeleik R -rel eltűnnek. Azonban P_R -rel nem tűnnek el. Így az M , P_M változókat nem tudjuk kiegészíteni az R , P_R kanonikus párral és emiatt egy új kanonikus koordinátarendszert kapunk a fázistéren. R továbbra is kanonikus változó marad, de ezután $\mathcal{R}$ -rel fogjuk jelölni:

$$\mathcal{R} = R\,. \tag{173}$$

Az $\mathcal{R}$ -hez konjugált impulzus definíciója

$$P_{\mathcal{R}} = P_R - \frac{1}{2}R^{-1}\Lambda P_\Lambda - \frac{1}{2}R^{-1}F^{-1}\Lambda P_\Lambda - R^{-1}\Lambda^{-2}F^{-1}\left((\Lambda P_\Lambda)'(RR') - (\Lambda P_\Lambda)(RR')'\right)\,.$$

A kényszerek alakjainak vizsgálatából látszik, hogy $P_{\mathcal{R}}$ kifejezhető a lineáris kombinációjukként:

$$P_{\mathcal{R}} = F^{-1}\left(R^{-1}P_\Lambda H + R'\Lambda^{-2}H_r\right)\,. \tag{174}$$

Kuchař megmutatta [2] ,hogy a

$$\Lambda, P_\Lambda; R, P_R \longmapsto M, P_M; \mathcal{R}, P_{\mathcal{R}} \tag{175}$$

áttérés egy kanonikus transzformáció. Az (175) kanonikus transzformáció invertálható a horizonton kívül.

$$\begin{aligned}
\Lambda &= \left(F^{-1}\mathcal{R}'^2 - FP_M^2\right)^{1/2}\,, && (176)\\
P_\Lambda &= \mathcal{R}FP_M\left(F^{-1}\mathcal{R}'^2 - FP_M^2\right)^{-1/2}\,, && (177)\\
R &= \mathcal{R}\,,\\
P_R &= P_{\mathcal{R}} + \frac{1}{2}P_M + \mathcal{R}^{-1}F^{-1}\left(F^{-1}\mathcal{R}'^2 - FP_M^2\right)^{-1}\left((\mathcal{R}FP_M)'(\mathcal{R}\mathcal{R}') - (\mathcal{R}FP_M)(\mathcal{R}\mathcal{R}')'\right)\\
&\quad + \frac{1}{2}FP_M\,. && (178)
\end{aligned}$$

Differenciáljuk a (171) definíciót r szerint.

$$M' = -\Lambda^{-1}\left(R'H + R^{-1}P_\Lambda H_r\right) \tag{179}$$

Az (174) és (179)egyenletekből

$$H_r = P_{\mathcal{R}}\mathcal{R}' + P_M M'\,. \tag{180}$$

(176), (177), (179) felhasználásával

$$H = -\frac{F^{-1}M'\mathcal{R}' + FP_M P_{\mathcal{R}}}{\left(F^{-1}R'^2 - FP_M^2\right)^{1/2}} \; . \tag{181}$$

Az (180), (181) egyenletekből levonhatjuk, hogy a hamiltoni és impulzus kényszerek

$$H = 0 \;\; , \quad H_r = 0 \; ,$$

teljesen ekvivalensek az új kényszerekkel

$$M' = 0 \quad , \quad P_{\mathcal{R}} = 0 \; ,$$

a horizonton kívül. Ezzel bebizonyítottuk, hogy a Schwarzschild tömeg a radiális koordinátától sem függ, azaz mozgásállandó.

9.2. Kruskal koordináták, mint a fekete lyukak kanonikus változói

A Schwarzschild téridő Kuchařtól származó tárgyalásában számos változó szingulárisan viselkedik a horizonton. Varadarajan újabb eredményei [15] szerint megadható egy nemszinguláris és invertálható kanonikus transzformáció a geometriai és a Kruskal-típusú koordináták között. Ebben a fejezetben felvázoljuk Varadarajan konstrukciójának lényeges lépéseit. Az első lépésben skálázzuk át a változóinkat.

$$\begin{aligned}
T(r) &= \tau_+ + \int_\infty^r T'(r)\, dr \; , \\
P_T(r) &= -M'(r) = \Lambda^{-1}\left(R'H + R^{-1}P_\Lambda H_r\right) \; , && (182) \\
\Pi_R &= P_R - \frac{1}{2}R^{-1}\Lambda P_\Lambda - \frac{1}{2}R^{-1}F^{-1}\Lambda P_\Lambda && (183) \\
&\quad -R^{-1}\Lambda^{-2}F^{-1}\left((\Lambda P_\Lambda)'(RR') - \Lambda P_\Lambda (RR')'\right) \\
&= F^{-1}\left(R^{-1}P_\Lambda H + R'\Lambda^{-2}H_r\right) \; , \\
p &= T(-\infty) - \tau_- \; , \\
m &= M_- \; . && (184)
\end{aligned}$$

A (163) hatást felváltja az

$$
\begin{aligned}
& S\left(T, P_T, R, \Pi_R, N, N^r, m, p\right) \\
= & \int dt \left(p\dot{m} + \int_{-\infty}^{\infty} dr \left(P_T \dot{T} + \Pi_R \dot{R} \right) \right) - \int dt \int_{-\infty}^{\infty} dr \left(NH - N^r H_r \right) .
\end{aligned}
$$

hatás.A kényszerek az alábbi alakot öltik

$$
\begin{aligned}
H_r &= \Pi_R R' + P_T T' , \\
\Lambda H &= F^{-1} P_T R' + F T' \Pi_R .
\end{aligned} \tag{185}
$$

Továbbá

$$
\Lambda = \left(F^{-1} R'^2 - F T'^2 \right)^{1/2} . \tag{186}
$$

Ezután legyenek új kanonikus változóink

$$
\begin{aligned}
\overline{p} &= p + m \int_{-\infty}^{\infty} dr \left(\frac{P_T T + \Pi_R R}{M^2} \right) , \\
\overline{R} &= \frac{R}{2M} , \qquad (187) \\
\Pi_{\overline{R}} &= 2M \Pi_R , \\
\overline{T} &= \frac{T}{2M} - \int_{\infty}^{r} dr \left(\frac{P_T T + \Pi_R R}{2M^2} \right) , \qquad (188) \\
P_{\overline{T}} &= 2M P_T . \qquad (189)
\end{aligned}
$$

Mivel az új impulzushoz, $\overline{p}$ -hez, kanonikusan konjugált változó továbbra is a tömeg, azt ezután is m -mel jelöljük. A Kruskal változókat a következő ponttranszformációval definiáljuk:

$$
\left(\overline{R} - 1 \right) e^{\overline{R}} = -UV , \tag{190}
$$

$$
\overline{T} = \ln \left| \frac{V}{U} \right| . \tag{191}
$$

Ebből következik, hogy

$$
P_{\overline{T}} = \frac{V P_V - U P_U}{2} , \tag{192}
$$

$$
P_{\overline{R}} = \frac{V P_V + U P_U}{2F} . \tag{193}
$$

ahol F az UV függvénye a (154) és a (190) egyenleteken keresztül. Kruskal koordinátákban a diffeomorfizmus kényszer

$$H_r = P_U U' + P_V V' \; .$$

Használjuk fel a (182), (183) és a (187), (191) egyenleteket a 185 egyenletben. Az eredmény

$$\Lambda H = P_V V' - P_U U' - \frac{\overline{R}^2}{2M^2} e^{\overline{R}} P_U P_V \; .$$

A (186) egyenletből indulunk ki és felhasználjuk a (182) és (187), (191) egyenleteket.

$$\Lambda^2 = \frac{16M^2}{\overline{R} e^{R}} \left(U' + \frac{P_V \overline{R}^2 e^{\overline{R}}}{4M^2} \right) \left(-V' + \frac{P_U \overline{R}^2 e^{\overline{R}}}{4M^2} \right) \tag{194}$$

Ahhoz, hogy kifejezzük M -et Kruskal változókkal. a (182), (189), (192), (184) egyenleteket használjuk.

$$M^2 = m^2 + \int_{-\infty}^{r} dr \frac{UP_U - VP_V}{2}$$

ΛP_Λ felírásához alkalmazzuk a (182), (187), (188), (190), (191), (193) egyenleteket.

$$\Lambda P_\Lambda = -4M^2 e^{-R} \left(V \left(U' + \frac{P_V \overline{R}^2 e^{\overline{R}}}{4M^2} \right) + U \left(-V' + \frac{P_U \overline{R}^2 e^{R}}{4M^2} \right) \right) \tag{195}$$

R kifejezhető, mint

$$R = 2M\overline{R} \; .$$

P_R -t a(183) egyenleten keresztül fejezzük ki. Először a $\left[(\Lambda P_\Lambda)' \left(RR' \right) - \Lambda P_\Lambda \left(RR' \right)' \right]$ tagot számoljuk ki. Ehhez hasznos az alábbi definíció:

$$\begin{aligned} g_1 &= U \left(-V' + \frac{P_U \overline{R}^2 e^{\overline{R}}}{4M^2} \right) \; , \\ g_2 &= V \left(U' + \frac{P_V \overline{R}^2 e^{\overline{R}}}{4M^2} \right) \; . \end{aligned}$$

Ezután a (182), (189), (187), (195) egyenletekből következik, hogy

$$
\begin{aligned}
& (\Lambda P_\Lambda)' (RR') - \Lambda P (RR')' && (196)\\
= \;& 4M^2 \left(\frac{R'}{2M}\right) \left(-\Lambda P_\Lambda \overline{R}' \left(\overline{R}+1\right) - 4M^2 e^{-\overline{R}} (g_1' + g_2')\right) && (197)\\
& -4M^2 \overline{R} \left(\frac{R'}{2M}\right)' \Lambda P_\Lambda \, . && (198)
\end{aligned}
$$

A (187), (189), (190), (192) egyenletek miatt

$$
\frac{R'}{2M} = \overline{R}^{-1} e^{-\overline{R}} (g_1 - g_2) \; .
$$

Felhasználva (195) -et, az alábbit nyerjük:

$$
(\Lambda P_\Lambda)' (RR') - \Lambda P_\Lambda (RR')' = 32 M^4 e^{-2\overline{R}} (g_2 g_1' - g_2' g_1) \; .
$$

Ezt a kifejezést visszahelyettesítjük (183)-be és figyelembe vesszük (193) -et és (195) -et.. Az eredmény

$$
P_R = -\overline{R} \left(\frac{V P_V + U P_U}{4M}\right) - M e^{-\overline{R}} (UV' - VU') + \frac{\Lambda P_\Lambda}{4M\overline{R}} - 16 \frac{M^3 e^{-\overline{R}}}{\Lambda^2} \mathcal{H} \, , \qquad (199)
$$

ahol

$$
\mathcal{H} = \left(U' + \frac{P_V \overline{R}^2 e^R}{4M^2}\right) \left(-V' + \frac{P_V \overline{R}^2 e^R}{4M^2}\right)' - \left(U' + \frac{P_V \overline{R} e^{\overline{R}}}{4M^2}\right)' \left(-V' + \frac{P_U \overline{R}^2 e^{\overline{R}}}{4M^2}\right) . \qquad (200)
$$

A $(\Lambda, P_\Lambda, R, P_R,) \longmapsto (U, P_U, V, P_V)$ kanonikus transzformáció invertáható. Definiáljuk a Λ_1 és Λ_2 mennyiségeket.

$$
\begin{aligned}
\Lambda_1 &= -V' + \frac{\overline{R}^2}{4M^2} e^{\overline{R}} P_U \, , && (201)\\
\Lambda_2 &= U' + \frac{\overline{R}^2}{4M^2} e^{\overline{R}} P_V \, . && (202)
\end{aligned}
$$

Az (201), (202) egyenleteket behelyettesítjük a (194) és (195) egyenletekbe.

$$
\begin{aligned}
\Lambda^2 &= \frac{16M^2}{\overline{R} e^{\overline{R}}} \Lambda_1 \Lambda_2 \\
\Lambda P_\Lambda &= -4M^2 e^{-\overline{R}} (U\Lambda_1 + V\Lambda_2) && (203)
\end{aligned}
$$

(199) -t fel tudjuk írni ADM változókban:

$$\mathcal{H}\left(r\right)=-\frac{\Lambda^{2}e^{\overline{R}}}{16M^{3}}\left(P_{R}+\frac{F\Pi_{R}\overline{R}\left(\overline{R}+1\right)}{2M}+\frac{\Lambda P_{\Lambda}F}{4M}\right)\ .$$

(200), (201), (202) figyelembevételével

$$\Lambda_{1}\Lambda_{2}^{\prime}-\Lambda_{1}^{\prime}\Lambda_{2}=\mathcal{H}\ \ . \tag{204}$$

A

$$\mathcal{G}\left(r\right):=\frac{\Lambda^{2}\overline{R}e^{\overline{R}}}{16M^{2}} \tag{205}$$

jelölés mellett

$$\Lambda_{1}\Lambda_{2}=\mathcal{G}\ \ . \tag{206}$$

Az (204), (205) egyenletekből egy elsőrendű közönséges differenciálegyenletet kapunk Λ_1/Λ_2 -re. A differenciálegyenlet megoldása és (206) megadja Λ_1 -t és Λ_2 -t.

$$\Lambda_{1} = -\sqrt{\mathcal{G}}e^{\tau^{+}/4M_{+}}e^{\int_{\infty}^{r}d\overline{r}(\mathcal{H}/\mathcal{G})}\ , \tag{207}$$

$$\Lambda_{2} = -\sqrt{\mathcal{G}}e^{-\tau^{+}/4M_{+}}e^{-\int_{\infty}^{r}d\overline{r}(\mathcal{H}/\mathcal{G})}\ . \tag{208}$$

Az (207), (208) egyenletek kifejezik Λ_1 -t és Λ_2 -t ADM változókban. Megmutatható, hogy

$$UP_{U} = -2M\Lambda^{-2}\left(\Lambda H-H_{r}\right)\left(R^{\prime}-\frac{\Lambda P_{\Lambda}}{R}\right)\ , \tag{209}$$

$$VP_{V} = 2M\Lambda^{-2}\left(\Lambda H+H_{r}\right)\left(R^{\prime}+\frac{\Lambda P_{\Lambda}}{R}\right)\ . \tag{210}$$

$R'\pm\Lambda P_\Lambda/R$ kiszámolásában (203) segít.

$$R^{\prime}+\frac{\Lambda P_{\Lambda}}{R} = -\frac{4M}{\overline{R}e^{R}}V\Lambda_{2}\ , \tag{211}$$

$$R^{\prime}-\frac{\Lambda P_{\Lambda}}{R} = \frac{4M}{\overline{R}e^{R}}U\Lambda_{1}\ . \tag{212}$$

Helyettesítsük be (211)-ot és (212)-et (209)-ba és -(210)-be.

$$
\begin{aligned}
P_U &= -\frac{\Lambda H - H_r}{2\Lambda_2}\,, \\
P_V &= -\frac{\Lambda H + H_r}{2\Lambda_1}\,.
\end{aligned}
$$

Ezek az egyenletek P_U -t és P_V -t fejezik ki ADM változókban. (211) és (212) felhasználásával U és V is felírható ADM változókban:

$$
\begin{aligned}
V &= -\left(R' + \frac{\Lambda P_\Lambda}{R}\right)\frac{\overline{R}e^{\overline{R}}}{4M\Lambda_2}\,, \\
U &= \left(R' + \frac{\Lambda P_\Lambda}{R}\right)\frac{\overline{R}e^{\overline{R}}}{4M\Lambda 1}\,.
\end{aligned}
$$

Ezzel sikerült megadni egy invertálható és nemszinguláris leképezést az ADM -változók és a Kruskal koordináták között.

10. Két komponensű null por keveréket tartalmazó gömbszimmetrikus téridő ADM formalizmusa

10.1. Az anyag és a gravitáció csatolása

Az "anyagi" és "vákuum" elméletek egyik érintkezési pontja Bičák és Hájíček formalizmusa [8] , amelyben gömbszimmetrikus téridőben, a szimmetriacentrumból kifelé, ill. abba befelé áramló null por sugárzásokat jellemző hatáselveket vizsgálnak.. Ebben a fejezetben ezt az elméletet fogjuk kifejteni. A geometrodinamikában egy gömbszimmetrikus téridő egy gömbszimmetrikus háromdimenziós Riemann-tér időfejlődése során képződik, amelynek vonalelemét az r radiális változó két függvénye, $\Lambda(r)$ és $R(r)$ írja le.

$$
d\sigma^2 = \Lambda^2(r)\,dr^2 + R^2(r)\,d\Omega^2
$$

Itt $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2$, $R(r)$ az $r =$ állandó kétdimenziós gömbfelület görbületi sugara; r transzformációi során $R(r)$ skalárként, $\Lambda(r)$ skalársűrűségként viselkedik. Ha egy gömbszimmetrikus téridőt egy $t \in \Re$ időparaméterrel címkézett gömszimmetrikus Σ fóliákkal fóliázunk, akkor a Λ és R metrikus függvények t -től is függenek. A fóliák az $N(r,t)$ lapse függvény és a shift vektor egyetlen nemeltűnő $N^r(r,t)$ komponense szerint kapcsolódnak egymáshoz. Határtagoktól eltekintve, a gömbszimmetrikus gravitációs mező vákuum dinamikája a θ és φ szerint kiintegrált ADM hatás kanonikus alakjából következik.

$$S^G = \int dt \int dr \left(P_\Lambda \dot{\Lambda} + P_R \dot{R} - N H^G - N^r H_r^G \right) ,$$

ahol a gravitációs szuper hamiltoni kényszer

$$H^G = R^{-1} P_R P_\Lambda + \frac{1}{2} R^{-2} \Lambda P_\Lambda^2 + \Lambda^{-1} R R'' - \Lambda^{-2} R R' \Lambda' - \frac{1}{2} \Lambda^{-1} R'^2 - \frac{1}{2} \Lambda ,$$

és szuper impulzus kényszer

$$H_r^G = P_R R' - \Lambda P_\Lambda' .$$

A pontok és a felülvonások a t és r változók szerinti deriváltakat jelölik. A P_R és P_Λ impulzusok az ADM téridő hatás $\dot{\Lambda}$és $\dot{R}$ sebességek szerinti differenciálásával adódnak.

$$\begin{aligned} P_\Lambda &= -N^{-1} R \left(\dot{R} - R' N^r \right) , \\ P_R &= -N^{-1} \left[\Lambda \left(\dot{R} - R' N^r \right) + R \left(\dot{\Lambda} - (\Lambda N^r)' \right) \right] . \end{aligned}$$

Invertálva

$$\dot{\Lambda} = -N R^{-2} \left(R P_R - \Lambda P_\Lambda \right) + \left(\Lambda N^r \right)' ,$$

$$\dot{R} = -N R^{-1} P_\Lambda + R' N^r .$$

Tekintsük a (69), (70) egyenleteket:

$$l^\alpha = \sqrt{W} n^\alpha - g^{ab} \frac{P_k Z^k_{,b}}{\sqrt{|g|\,W}} Y^\alpha_{,a} .$$

A (67) hatás gömbszimmetriával történő egyszerűsítéséhez a koordinátaválasztásunk

$$\left(Z^1, Z^2, Z^3 \right) \equiv (\phi, \theta, \varphi) .$$

ahol ϕ a por együttmozgó gömbfelületeit címkézi, míg θ és φ a por radiális pályáit jelöli meg. A szimmetriából $\dot{\theta} = \dot{\varphi} = \theta' = \varphi' = 0$; feltesszük, hogy a θ és φ téridő koordináták egybeesnek a por koordinátákkal. A konjugált impulzusok

$$(P_1, P_2, P_3) \equiv (\Pi, 0, 0) \ .$$

A metrikára

$$ds^2 = -\left[N^2 - \Lambda^2 (N^r)^2\right] dt^2 + 2\Lambda^2 N^r dtdr + \Lambda^2 dr^2 + R^2 dr^2$$

adódik. Ezek után

$$\begin{aligned} g_{ij} &= diag\left(\Lambda^2 \phi'^{-2}, R^2, R^2 \sin^2 \vartheta\right) \ , \\ W &= \frac{|\Pi\phi'|}{\Lambda\sqrt{|g|}} \ , \\ l^\alpha &= \frac{\sqrt{\Pi\,|\phi'|}}{\Lambda R}\left(n^\alpha - \frac{\varepsilon}{\Lambda} Y^\alpha_{,r}\right) \ . \end{aligned}$$

Itt $\varepsilon = sgn\,(\Pi\phi')$ írja le a radiálisan ki- vagy beáramló por két eshetőségét. Így a szögek szerinti integrálás után kapjuk:

$$S^{ND} = \int dtdr\left(\Pi\left[\dot{\phi} - \left(\frac{\varepsilon N}{\Lambda} + N^r\right)\phi'\right]\right) \ .$$

Az egyről több, egymással közvetlenül nem kölcsönható porkomponensre való általánosítás egyszerű: több, az egykomponensű hatáshoz hasonló tagot össze kell adni a hatásban. Ez, két komponensre, elvezet az alábbi alakú null por hatáshoz:

$$S_2^{ND} = \int dtdr\left[\Pi_+\dot{\phi}_+ + \Pi_-\dot{\phi}_- - \frac{N}{\Lambda}\left(\left|\Pi_+\phi'_+\right| + |\Pi_-\phi'|\right) - N^r\left(\Pi_+\phi'_+ + \Pi_-\phi'_-\right)\right] \ .$$

A teljes hatás

$$S_2 = \int dtdr\left(P_\Lambda\dot{\Lambda} + P_R\dot{R} + \Pi_+\phi_+ + \Pi_-\phi_- - NH - N^r H_r\right) \ , \tag{213}$$

ahol

$$\begin{aligned} H &= \frac{P_R P_\Lambda}{R} + \frac{\Lambda P_R^2}{2R^2} + \frac{RR''}{\Lambda} - \frac{RR'\Lambda'}{\Lambda^2} + \frac{R'^2}{2\Lambda} - \frac{\Lambda}{2} + \frac{\left|\Pi_+\phi'_+\right|}{\Lambda} + \frac{\left|\Pi_-\phi'_-\right|}{\Lambda} \ , & (214) \\ H_r &= P_R R' - \Lambda P'_\Lambda + \Pi_+\phi'_+ + \Pi_-\phi'_- \ . & (215) \end{aligned}$$

A (??), (??), (172), (171) transzformáció a $(\Lambda, P_\Lambda, R, P_R)$ kanonikus változókat felváltja az új $(M, P_M, \mathcal{R}, P_\mathcal{R})$ kanonikus változókkal. A (214), (215) kényszerek most egyszerűbb alakra tesznek szert:

$$\Lambda H = -F^{-1}M'R' - FP_M P_\mathcal{R} + \left|\Pi_+\Phi'_+\right| + \left|\Pi_-\Phi'_-\right| \ , \tag{216}$$

$$H_r = P_\mathcal{R}R' + P_M M' + \Pi_+\Phi'_+ + \Pi_-\Phi'_- \ . \tag{217}$$

Kapcsoljuk össze a (216)és (217) egyenleteket:

$$H_r \pm \Lambda H = \left(\mathcal{R}' \mp FP_M\right)\left(P_\mathcal{R} \mp F^{-1}M'\right) + \{ \begin{array}{c} 2\Pi_-\Phi'_- \\ 2\Pi_+\Phi'_+ \end{array} \ .$$

A teljes (213), (215) hatás most

$$\begin{aligned} S &= \int dtdr \left[P_M\dot{M} + P_\mathcal{R}\dot{\mathcal{R}} + \Pi_+\dot{\Phi}_+ + \Pi_-\dot{\Phi}_- - N_+H_+ - N_-H_- - N(\infty)\,M(\infty)\right] \\ H_+ &= \left(\mathcal{R}' + FP_M\right)\left(P_\mathcal{R} + F^{-1}M'\right) + 2\Pi_+\Phi'_+ \\ H_- &= \left(\mathcal{R}' - FP_M\right)\left(P_\mathcal{R} - F^{-1}M'\right) + 2\Pi_-\Phi'_- \\ N_+ &= \frac{1}{2}\left(N^r - \frac{N}{\Lambda}\right) \\ N_- &= \frac{1}{2}\left(N^r + \frac{N}{\Lambda}\right) \end{aligned} \tag{218}$$

A hatást elláttuk ADM határtaggal. A következő fejezetben ezt az általános hatást speciális esetre fogjuk alkalmazni. Ebben a null pornak csak a bemenő komponense van jelen. Természetesen a másik eset, amikor csak a kimenő null por áramot vesszük figyelembe, teljesen hanlóan tárgyalható.

10.2. A Vaidya-téridő ADM formalizmusa

Amikor a null pornak csak a bemenő komponense van jelen, $\Pi_+ = 0$. [8]. Bičák és Hájíček az általuk levezetett egyenleteket alkalmazták a $\Pi_+ = 0$ feltevés mellett. Ez nem más, mint egy null port tartalmazó Vaidya-téridő. A következőkben az ő levezetésüket követjük végig. A null por gömbszimmetrikus bezuhanását leíró Vaidya metrika [25] legegyszerűbb alakját a befelé mozgó V null koordináta alkalmazásával érjük el.

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M(V)}{R}\right)dV^2 + 2dVdR + R^2d\Omega^2 \tag{219}$$

A kifelé mozgó gömbi null por felhő esetében a legegyszerűbb leírást a kifelé mozgó U null koordináta biztosítja:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M\left(U\right)}{R}\right) dU^2 - 2dUdR + R^2 d\Omega^2 \ . \tag{220}$$

$M =$ áll. esetben a (219) és (220) metrika a Schwarzschild metrikába megy át a bemenő ill. kimenő Eddington-Finkelstein koordinátákban [17]. A metrika egyszerű marad, ha a V és U null koordináták helyett bevezetjük a $T_E^- = V - R$ és $T_E^+ = U + R$ Eddington-féle koordinátákat. Tekintsünk egy $V = 0$ -ba zuhanó null por gömbréteget. A $V < 0$ tartományban a téridő sík. $V \geq 0$ -ra a gravitációs mezőt a (219) Vaidya metrika adja meg. A tömegfüggvény $M\left(V\right) = 0$, ha $V \leq 0$ és $M\left(V\right) > 0$ nem csökkenő függvény, ha $V > 0$. A bezuhanó por kanonikus elmélete a (218) hatással kezdődik, amit a $\Pi_+ = 0$ esetre írunk fel.

$$S = \int dtdr \left[.P_M\dot{M} + P_{\mathcal{R}}\dot{\mathcal{R}} + \Pi\dot{\Phi} - N_+H_+ - N_-H_- - N\left(\infty\right)M\left(\infty\right)\right]$$

A kényszerek

$$\begin{aligned} H_+ &= \left(\mathcal{R}' + FP_M\right)\left(P_{\mathcal{R}} + F^{-1}M'\right) \ , \\ H_- &= \left(\mathcal{R}' - FP_M\right)\left(P_{\mathcal{R}} - F^{-1}M'\right) + 2\Pi\Phi \ . \end{aligned}$$

A $H_+ = 0$ kényszeregyenletből $P_{\mathcal{R}} + F^{-1}M' = 0$ következik; visszahelyettesítve ezt a $H_- = 0$ kényszerbe, az alábbit kapjuk:

$$\left(P_M - \frac{R'}{F}\right)M' + \Pi\Phi' = 0 \ .$$

Így egy ekvivalens hatás

$$\begin{aligned} S &= \int dt \int_0^\infty dr[P_M\dot{M} + P_{\mathcal{R}}\dot{\mathcal{R}} + \Pi\dot{\Phi}_k \\ &\quad -2N_-((P_M - RF^{-1})M' + \Pi\Phi') - N^R(\dot{P}_{\mathcal{R}} + F^{-1}M')] - \int dtM_\infty\dot{T}_\infty \end{aligned} \tag{221}$$

ahol $N^R = N_+\left(\mathcal{R}' + FP_M\right)$. [8] szerint a

$$\begin{aligned} \Pi_M &= P_M - F^{-1}R' \ , \\ \Pi_R &= P_{\mathcal{R}} + F^{-1}M' \ . \end{aligned}$$

transzformáció kanonikus. Ezután a(221) hatás

$$S = \int dt \int_0^\infty dr \left[\Pi_M \dot{M} + \Pi_\mathcal{R} \dot{\mathcal{R}} + \Pi\dot{\Phi} - 2N_- \left(\Pi_M M' + \Pi\Phi' \right) - N^R \Pi_R \right] - \int dt M_\infty \dot{T}_\infty \ .$$

A

$$\begin{aligned} \Pi_M &= -V' \ , \\ M(r) &= -\int_0^r d\widetilde{r} \widetilde{\Pi}_V (\widetilde{r}) \ . \end{aligned}$$

transzformáció egy kanonikus alakú hatásra vezet:

$$S = \int dt \int_0^\infty dr \left[\widetilde{\Pi}_V \dot{V} + \Pi_\mathcal{R} \dot{\mathcal{R}} + \Pi\dot{\Phi} - N^V \left(\widetilde{\Pi}_V + \Pi\Phi'/V' \right) - N^R \Pi_R \right] \ ,$$

ahol $N^V = 2V'N_-$. Egyelőre megoldatlan probléma, hogy lehet-e más gömbszimmetrikus téridőket, például a [6], [7] -ben szereplő megoldást hasonlóan egyszerű alakú hatással leírni. Emellett a fizikai kép teljessége megkívánja, hogy a Gergely-féle téridő forrásául szolgáló null por keverék kanonikus elméletét - ami lényegében a porkeverékek általános elméletének speciális esete kell, hogy legyen - a metrika geometrodinamikai leírásával párhuzamosan dolgozzuk ki. Jövőbeli munkám során törekedni fogok e cél elérésére.

11. Összefoglalás

A II. fejezetben megismerkedtünk a gravitáció egyik egyszerű forrásával, a null porral. Letelier kimutatta, hogy egy kétkomponensű null por keverék egy folyadékkal ekvivalens [9]. Mivel a folyadék négyessebessége normált, a porhoz hasonlóan kitüntetett sajátidővel rendelkezik. Gergely rámutatott arra [10], hogy emiatt ez egyúttal a porkeverék természetes időparamétere is. Ha sikerülne megalkotni az anizotróp folyadék kanonikus leírását, akkor sajátidőt tudnánk származtatni a kétkomponensű null por keverék számára variációs elvből. A III. fejezetben Gergely gömbszimmetrikus sztatikus téridő megoldását [6], [7] vezettük le. Ebben a téridőben a forrás egy null por keverék. Tettünk egy kitérőt a hengerszimmetrikus téridőkben kialakuló szingularitások felé [11]. Láttuk, hogy összeomló hengerszimmetrikus null por felhőben mindig kialakul egy szingularitás. A IV. fejezetben Arnowitt, Deser és Misner formalizmusát ismertettük [1]. A V. fejezetben rátértünk a null por kanonikus tárgyalására. Brown és Kuchař [5] nyomán megismerkedtünk a por tér fogalmával . A VI. fejezetben a közönséges porról volt szó. Összehasonlítást végeztünk a null por és a közönséges por között.. A VII. fejezetben a porkeverékeket jellemző általános hatást elemeztük. Ezután a tökéletes folyadékkal foglalkoztunk Brown nyomán [4] . A tökéletes folyadék energia-impulzus tenzora kölcsönhatási tagot tartalmaz (a szabad mozgást végző porral ellentétben), ezért a téma tanulmányozása közelebb vezethet az anizotróp folyadék kanonikus leírásához. A IX. fejezet Kuchař eredményeinek [2] összefoglalása. A X. fejezetben Bičák és Hájíček mukáját mutattuk be [8] . Ez az elmélet a null porról és a gömbszimmetrikus téridőről szóló ismeretek metszete. Végül az általuk megadott hatást egy speciális esetre, a gömbszimmetrikusan bezuhanó null por felhő leírására alkalmaztuk.

Köszönetnyilvánítás

Szeretném megköszönni Gergely Árpád Lászlónak, hogy irányította a dolgozat megírását.

Hivatkozások

[1] R. Arnowitt, S. Deser, C. W. Misner, *Gravitation: An Introduction to Current Research* (Wiley, New York, 1962)

[2] K. V. Kuchař, *Phys. Rev. D* **50**, 3961 (1994)

[3] J.D. Brown, K. V. Kuchař, *Phys. Rev. D* **51**, 5600 (1995

[4] J: D. Brown, *Class. Quantum Grav.* **10**, 1579 (1993)

[5] J. Bičák, K.V. Kuchař, *Phys. Rev. D* **56**, 4878 (1997))

[6] L. Á. Gergely, *Phys. Rev. D* **58**, 084030 (1998)

[7] L. Á. Gergely, *Phys. Rev. D* **65**, 127503 (2002)

[8] J. Bičák, P. Hájíček, *gr-qc/0308013* (2003)

[9] P. S. Letelier, *Phys. Rev. D* **22**, 807 (1980)

[10] L. Á. Gergely, szóbeli közlés (2003)

[11] P. S. Letelier, A. Wang, *Phys. Rev. D* **49**, 5105 (1993)

[12] Z. Kovács, *Referenciafolyadékok a gravitáció kanonikus elméletében (*diplomamunka, 2001)

[13] Z. Kovács, *Referenciafolyadékok a gravitáció kanonikus elméletében (*évfolyamdolgozat, 1998)

[14] K. V. Kuchař, *Phys. Rev. D* **4**, 955 (1971)

[15] M. Varadarajan, *Phys. Rev. D **63**, 084007 (2001)*

[16] R. M. Wald, *General Relativity* (University of Chicago Press, Chicago, 1984)

[17] C. W. Misner, K.S. Thorne, J.A. Wheeler, *Gravitation* (Freeman, San Fransisco, 1973)

[18] P. H. Price, *Phys. Rev. D* **5**, 2419 (1972)

[19] E. Poisson, W. Israel, *Phys. Rev. D* **41,** 1796 (1990)

[20] J. L. Synge, *Relativity: The General Theory* (North Holland, Amsterdam, 1971)

[21] G. Date, *Gen. Relativ. Gravit.* **29**, 953 (1997)

[22] D. Kramer, H. Stephani, E. Herlt, M. MacCallum, *Exact Solutions of Einstein's Field Equations* (Cambridge University Press, Cambridge, 1980)

[23] A. H. Taub, *Ach. Ratl. Mech. Anal.* **3**, 312 (1959)

[24] M. D. Kruskal, *Phys. Rev.* **119**, 1743 (1960)

[25] P. C. Vaidya, *Nature* **171**, 260 (1953)

Nyilatkozat

Alulírott .... szakos hallgató, kijelentem, hogy a diplomadolgozatban foglaltak saját munkám eredményei, és csak a hivatkozott forrásokat (szakirodalom, eszközök, stb.) használtam fel. Tudomásul veszem azt, hogy diplomamamunkámat a Szegedi Tudományegyetem könyvtárában, a kölcsönözhető könyvek között helyezik el.

aláírás

dátum