

SZEGEDI TUDOMÁNYEGYETEM TTIK
FIZIKAI INTÉZET

DIPLOMAMUNKA

Tranzitos exobolygók fizikai paramétereinek vizsgálata fénygörbe analízis segítségével

Készítette: **Kálmán Szilárd**
csillagász MSc szakos hallgató

Témavezető: **Dr. Szabó M. Gyula**
kutatóprofesszor, Eötvös Loránd Tudományegyetem
Gothard Asztrofizikai Obszervatórium és Multidiszciplináris Kutatóközpont

Belső konzulens: **Dr. Szatmáry Károly**
egyetemi tanár, SZTE TTIK Kísérleti Fizikai Tanszék

Szeged, 2021

Tartalomjegyzék

Bevezetés	2
1. Tranzitos exobolygók fénygörbéje	3
1.1. Szélsőtédés	3
1.2. Tranzitok szélsőtédett esetben	5
1.3. Mérhető mennyiségek a fénygörbe alapján	5
1.4. Gömb alakú bolygók	6
1.4.1. Szimulációk	7
1.4.2. Elemzések	7
2. Egzotikus exobolygók fénygörbéi	9
2.1. Lapult bolygók	9
2.1.1. Az Ariel misszió	9
2.1.2. Lapult bolygók fénygörbéi az Ariel-űrteleszkóp szemével	10
2.2. Gyűrűs bolygók	12
3. Paraméterek elemzése zaj jelenlétében	18
3.1. Az ARIMA folyamat	18
3.1.1. Stacionaritás	18
3.1.2. Autokorreláció és részleges autokorreláció	18
3.2. A paraméterek eloszlásának vizsgálata	22
3.2.1. A felhasznált zajmodellek	22
3.2.2. A paraméterek meghatározása	22
3.2.2.1. Abszolút hibák	24
3.2.2.2. Relatív hibák	24
3.3. Kitekintés	25
4. Összefoglalás	28
Köszönetnyilvánítás	29
Hivatkozások	30

Bevezetés

A más naprendszerekhez tartozó-, avagy extraszoláris bolygók (röviden exobolygók) vizsgálata az első fősorozati csillag körül keringő exobolygó 2019-es fizikai Nobel-díjjal elismert detektálása (Mayor és Queloz, 1995) után a csillagászat egyik húzóágazatává vált. Ezt a tényt az is kiválóan igazolja, hogy már több űrteleszkóp is célzottan ezen tudományterület előrébb juttatására került fellövésre (ezek között vannak már a küldetésüket befejezett eszközök is, mint a CoRoT¹ és a Kepler, de jelenleg is üzemelők, mint a TESS², vagy a CHEOPS³), és a közeljövőben újabb űreszközök beiktatása várható (mint a PLATO⁴ és az Ariel⁵). Ezen űrtávcsövek közös tulajdonsága, hogy az exobolygórendszereket fotometriai úton vizsgálják, vagyis a csillag előtt elhaladó bolygó miatti apró fényességcsökkenéseket detektálják⁶. Ezt a folyamatot egy nagy-sikerű modell írja le, amelyet Mandel és Agol (2002) állított fel. Az ezzel végzett fénygörbe analízist a dolgozat 1. fejezetében mutatom be.

A modell sikerességének legfőbb bizonyítéka, hogy ezt felhasználva elemezték a jelenleg ismert több, mint 4700 exobolygó jelentős többségét. Az egyszerűsége abban áll, hogy egy gömb alakú csillag előtt elhaladó, gömb alakú bolygót feltételez, ez tette lehetővé a széleskörű használatot. Amint azonban a feltevések közül akár csak az egyiket elengedjük (névlegesen: nem gömb alakú bolygóról beszélünk), a modell korlátai azonnal egyértelművé válnak.

Munkám során alkalmam adódott a még tervezési fázisban lévő Ariel-űrteleszkóp lehetőségeinek vizsgálatára, amelytől (egyebek mellett) nagy pontosságú fotometriát várunk – az űrtávcső tervezett programját 2020. október 19-én az Európai Űrkutatási Ügynökség elfogadta, és a projekt a gyakorlati megvalósításba lépett. A 2. fejezetben az a kérdés kerül tárgyalásra, hogy hogyan láthatnánk az Ariel-űrtávcsővel egy lapult-, vagy egy gyűrűvel rendelkező (így tehát a korábban ismerttől jelentősen eltérő, egzotikus) bolygót, illetve, hogy meg tudnánk-e különböztetni a gyűrűk miatt fellépő effektusokat a lapultság miatt fellépőktől.

A modell kapcsán egy további kérdés, hogy az mennyire érzékeny a mérések zajára. Ennek vizsgálatára egy ARIMA folyamattal klónozott zajmodellt használtam; a 3. fejezetben először a klónozás folyamatát mutatom be, majd a fénygörbéket torzító két különböző zajmodell (fehér és korrelált zaj) hatását az exobolygót jellemző paraméterekre is bemutatom.

¹Convection, Rotation and planetary Transits

²Transiting Exoplanet Survey Satellite

³CHaracterising ExOPlanets Satellite

⁴PLAnetary Transits and Oscillations of stars

⁵Atmospheric Remote-sensing Infrared Exoplanet Large-survey

⁶Az Ariel-űrteleszkóp emellett kis felbontású infravörös spektrumok elkészítésére is alkalmas lesz.

1. Tranzitos exobolygók fénygörbéje

Az exobolygóvadászat jelenleg legsikeresebb módja a csillagok fényességének vizsgálatán alapul, amennyiben ugyanis egy exobolygó keringési síkja megfelelő irányban áll, azaz a pályainklinációja $\sim 90^\circ$, a megfigyelőtől nézve periodikusan fényességcsökkenéseket (ún. „tranzitokat”) okoz a csillaga fényében – ekkor beszélünk *tranzitos exobolygóról*. Az ilyen fénygörbék analitikus modellezéséhez tekintsük először a legegyszerűbb esetet: egy egyenletesen kivilágított, gömb alakú csillag előtt áthaladó, teljesen átlátszatlan gömb alakú bolygót – ezzel tulajdonképpen két körlap metszetét vizsgáljuk.

Jelölje d a csillag középpontjától a bolygó középpontjáig mért távolságot, R_S és R_p a csillag- és a bolygó sugarát, $p = \frac{R_p}{R_S}$ a sugarak arányát, $z = \frac{d}{R_S}$ a középpontok szeparációjának normáltját, F pedig a mért fluxust a nem eltakart csillag fluxusához viszonyítva. Ekkor a fénygörbét az $F^e(p, z) = 1 - \lambda(p, z)$ egyenlet írja le (Mandel és Agol, 2002), ahol

$$\lambda(p, z) = \begin{cases} 0, & \text{ha } 1 + p < z \\ \frac{1}{\pi} \left(p^2 \kappa_0 + \kappa_1 - \sqrt{\frac{4z^2 - (1 + z^2 + p^2)^2}{4}} \right), & \text{ha } |1 - p| < z \leq 1 + p \\ p^2, & \text{ha } z \leq 1 - p \\ 1, & \text{ha } z \leq p - 1, \end{cases} \quad (1)$$

ahol $\kappa_0 = \arccos \frac{p^2 + z^2 - 1}{2pz}$ és $\kappa_1 = \arccos \frac{1 - p^2 + z^2}{2z}$. Ennél bonyolultabb (és ezáltal pontosabb) modelleknek azonban figyelembe kell venniük, hogy a csillagokat sohasem egyenletesen kivilágított körlapoknak látjuk, fellép ugyanis a szélsötétedés jelensége.

1.1. Szélsötétedés

A Nap korongját (a látható tartományban) ábrázoló felvételeken egyértelműen látszik, hogy az a közepén a legfényesebb, a peremén pedig a leghalványabb – ezt a jelenséget nevezzük szélsötétedésnek, vagy peremsötétedésnek. Szélsötétedést ugyan közvetlenül csak a Nap esetében tudunk megfigyelni, elméleti úton azonban más csillagok esetére is meghatározható.

A jelenség értelmezéséhez vezessük be egy sugárzó közegre a τ_λ optikai mélységet:

$$\tau_\lambda = \int_0^s \kappa_\lambda \rho ds', \quad (2)$$

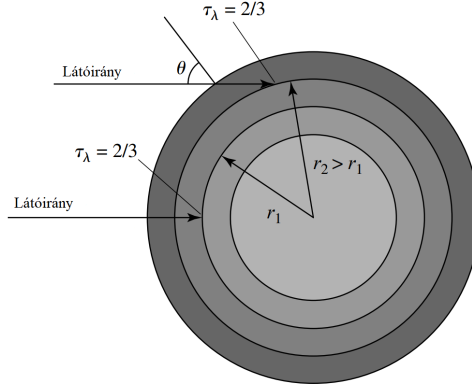
ahol κ_λ az opacitás, ρ a vizsgált közeg sűrűsége, s pedig a sugárzás mentén mért távolság. Az optikai mélységre fennáll, hogy λ hullámhosszúságú fotonok $\tau_\lambda = \frac{2}{3}$ -os értékig tudnak távozni egy csillagból, vagyis eddig „látunk bele” egy csillagba (Carrol és Ostlie, 2014). A csillagok légkörében azonban a mélyebben fekvő rétegek forróbbak, vagyis a korong közepét világosabbnak látjuk (1. ábra).

A szélsötétedés matematikai leírásához tekintsük a radiatív transzfer egyenletét (Carrol és Ostlie, 2014):

$$\frac{dI_\lambda}{d\tau} = I_\lambda - S_\lambda, \quad (3)$$

ahol I_λ a fényintenzitás λ hullámhosszon, $S_\lambda = \frac{j_\lambda}{\kappa_\lambda}$ az ún. forrásfüggvény, j_λ pedig az emissziós koefficiens (feketetest-sugárzásra ez természetesen a Planck-görbével egyezik meg). A csillag atmoszféráját plánparalell közelítésben tekintve a differenciálegyenlet megoldása (Sánchez-Bajo és mtsai., 2001):

$$I_\lambda(\Theta) = \int_0^\infty \frac{S_\lambda}{\cos \Theta} e^{-\frac{\tau_{\lambda,v}}{\cos \Theta}} \tau_{\lambda,v}, \quad (4)$$



1. ábra. A szélsötétedés szemléltetése. A csillag korongjának közepét megfigyelve a látóirány és a sugárzás iránya egybeesik, míg a perem felé közeledve a kettő által bezárt Θ szög egyre nő, ez pedig azt eredményezi, hogy a centrumtól távolabb látjuk (r_1 és r_2 a csillag középpontjától mért távolságokat jelöli) a $\tau_\lambda = \frac{2}{3}$ -os optikai mélységet, a csillagok légkörében fellépő hőmérsékletgradiens miatt pedig a korong középpontja fényesebbnek látszik. [Carrol és Ostlie (2014) 12. ábra alapján]

ahol $\tau_{\lambda,v}$ a látóirányban mérhető optikai mélység, Θ pedig a látóiránnyal bezárt szög. Természetesen módon a (4) egyenlet különböző forrásfüggvényekre különböző szélsötétedés-modelleket ad, így lehet például lineáris (Milne, 1921):

$$\frac{I(\mu)}{I(1)} = 1 - u_0(1 - \mu), \quad (5)$$

vagy másodfokú (Wade és Ruciński, 1985):

$$\frac{I(\mu)}{I(1)} = 1 - u_1(1 - \mu) - u_2(1 - \mu)^2, \quad (6)$$

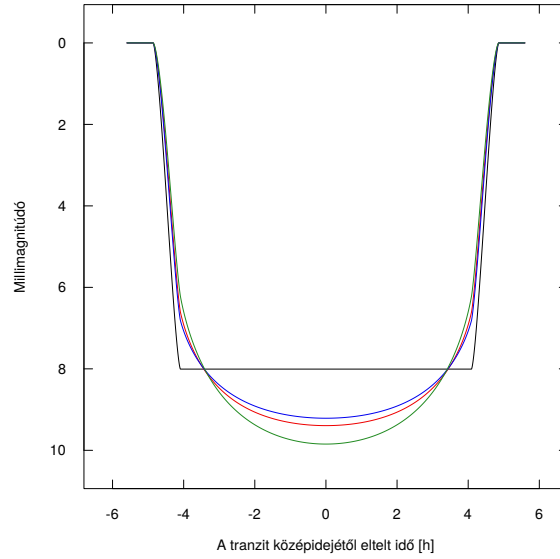
ahol $\mu = \cos \Theta$, u_0 , u_1 és u_2 pedig kiszámítható együtthatók. Emellett, Maxted (2018) megmutatta, hogy egy két paraméteres hatványfüggvény alakú peremsötétedési törvény is megfelelő pontosságot eredményezhet, amely jó kompromisszum lehet a szélsötétedés pontosságának és összetettségének kezelése között, ennek alakja (Hestroffer, 1997):

$$\frac{I(\mu)}{I(1)} = 1 - c(1 - \mu^\alpha). \quad (7)$$

A dolgozat további részében én a (6) egyenlettel fogok számolni, ám megjegyzendő, hogy a fentiek közül egyik modell sem veszi figyelembe a csillaglégkörök mágneses terének (azaz a foltoknak) hatását, sőt, a (7) egyenlet esetén jelentős eltérések tapasztalhatóak az elméleti és megfigyelt szélsötétedések között (Maxted, 2018). Természetesen a szélsötétedés olyan több paraméteres leírása, amelyet az alábbi egyenlet is bemutat (Claret, 2000)

$$\frac{I(\mu)}{I(1)} = 1 - \sum_{i=1}^4 u_k \left(1 - \mu^{\frac{k}{2}}\right), \quad (8)$$

még pontosabb eredményekhez vezethet.



2. ábra. Egy tranzitos exobolygó szimulált fénygörbéje különböző szélsötétedések esetén (piros, kék és zöld, azaz $u_{1p} = 0,2986$, $u_{2p} = 0,2884$, $u_{1k} = 0,2798$, $u_{2k} = 0,2256$, $u_{1z} = 0,4201$ és $u_{2z} = 0,2807$), valamint egyenletesen kivilágított csillagnál (fekete, azaz $u_{1f} = u_{2f} = 0$).

1.2. Tranzitok szélsötédedett esetben

Figyelembe véve a szélsötédedést is, egy tranzitos exobolygó fénygörbéjét az

$$F(p, z) = \frac{\int_0^1 dr I(r) \frac{dF^e(\frac{p}{r}, \frac{z}{r}) r^2}{dr}}{\int_0^1 dr 2r I(r)} \quad (9)$$

egyenlet adja (Mandel és Agol, 2002), ahol r a normált radiális koordináta a csillag korongján és $\cos \Theta = \sqrt{1 - r^2}$, $F^e(p, z)$ pedig az egyenletes megvilágítású eset fénygörbéje. Bevezetve az $\Omega = \frac{6-2u_1-u_2}{24}$ jelölést, valamint feltéve, hogy a bolygó sugara kicsi ($p \leq 0,1$) – vagyis a csillagkorong fényessége jó közelítéssel állandó a bolygó korongja alatt (Perryman, 2018):

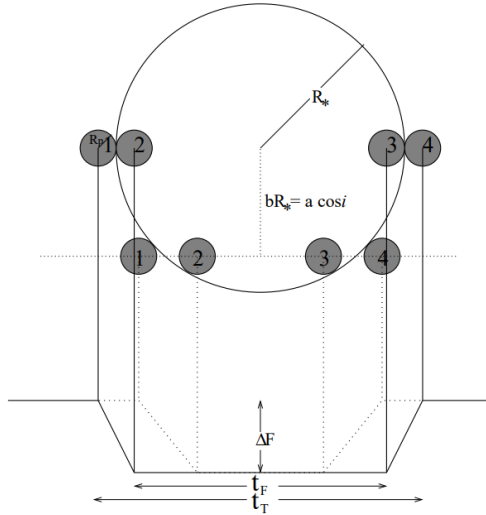
$$F(p, z) = 1 - \frac{1}{4\Omega(1-a)} \int_{z-p}^1 I(r) 2r dr \left(p^2 \arccos \frac{z-1}{p} - (z-1) \sqrt{p^2 - (z-1)^2} \right), \quad (10)$$

ahol a a bolygó pályájának félnagy tengelye. Amint azt a 2. ábra kiválóan szemlélteti, a szélsötédedés figyelembe vétele kifejezetten fontos.

1.3. Mérhető mennyiségek a fénygörbe alapján

A tranzitos exobolygók fénygörbéjéből meghatározható mennyiségek értelmezéséhez definiáljuk először az alábbiakat (3. ábra):

1. kontaktus: a bolygó korongja kezd belépni a csillagkorong elé;
2. kontaktus: a bolygó korongja teljesen belépett a csillagkorong elé;
3. kontaktus: a bolygó korongja kezd kilépni a csillagkorong elől;
4. kontaktus: a bolygó korongja teljesen kilépett a csillagkorong elől.



3. ábra. Exobolygók tranzitját szemléltető sematikus ábra. [Seager és Mallén-Ornelas (2003), 1. ábra]

Egy tranzitos exobolygó fénygörbéje alapján 4 alapvető mennyiséget lehet meghatározni (Seager és Mallén-Ornelas, 2002): a bolygó P keringési periódusát, a ΔF tranzitmélységet, a tranzit teljes hosszát (t_T , 1. és 4. kontaktus között eltelt idő), valamint a tranzit lapos részének hosszát (t_F , 2. és 3. kontaktus között eltelt idő), utóbbi három látható a 3. ábrán.

Geometriai megfontolások alapján az alábbi egyenletrendszer állítható fel (Seager és Mallén-Ornelas, 2003):

$$\Delta F \approx \left(\frac{R_p}{R_s} \right)^2 = p^2, \quad (11)$$

$$\sin \frac{t_T \pi}{P} = \frac{R_s}{a} \sqrt{\frac{(1+p)^2 - \left(\frac{a}{R_s} \cos i \right)^2}{1 - \cos^2 i}}, \quad (12)$$

$$\frac{\sin \frac{t_F \pi}{P}}{\sin \frac{t_T \pi}{P}} = \sqrt{\frac{(1-p)^2 - \left(\frac{a}{R_s} \cos i \right)^2}{(1+p)^2 - \left(\frac{a}{R_s} \cos i \right)^2}}, \quad (13)$$

ahol i a pálya hajlásszöge. Szokás a $b = \frac{a}{R_s} \cos i$ jelölést használni, b -t ekkor ütközési paraméternek nevezzük, fizikai tartalma, hogy a bolygó korongjának középpontja mennyire közelíti meg a csillag korongjának középpontját (3. ábra). Látható tehát, hogy a négy alapvető mennyiség kimérésével a bolygót jellemző fizikai paraméterek is meghatározhatóak (a csillag sugarának függvényében).

1.4. Gömb alakú bolygók

A későbbiekben tanulmányozásra kerülő érdekesebbnél érdekesebb fénygörbék vizsgálata előtt szeretném bemutatni a szimulációk és elemzések gyakorlati megvalósítását ezen a fent vázolt eseten keresztül, névlegesen: egy gömb alakú csillag előtt (amely feltevés egyébként minden egyes szimulációnál fennáll) elhaladó gömb alakú bolygó esetét.

1.4.1. Szimulációk

A különböző fénygörbék elkészítéséhez egy *R*-ben (R Core Team, 2018) írt kódot használtam, ennek segítségével visszavezetve a problémákat képfeldolgozásra. A kódnak három elkülöníthető része van: először megrajzolja a (szélsötétedett) csillag korongját, majd egy teljesen átlátszatlan bolygókorongot⁷ (ez jelen esetben csak egy körlap), végül kiszámolja a tranzitban tapasztalható fényességsökkenést. Az utóbbi lépésnél azzal a közelítéssel élünk, hogy a tényleges tranzit időtartama sokkal rövidebb a teljes periódusnál, vagyis a bolygó pályájának releváns szakasza közelíthető egy egyenessel, ez pedig azt eredményezi, hogy a fénygörbe egyszerűen a csillag és a bolygó képének konvolúciója.

Az eljárás hátránya, hogy a pixelenkénti számolás következtében az eredmény nem lesz tökéletesen folytonos – ezt korrigálni (az általam alkalmazott eljárásban) csak a két kép méretének növelésével lehet, a futásidő rovására. Optimálisnak végül egy $R_S = 4000$ px sugarú csillag előtt elhaladó, Szaturnusz méretű ($p = 0,0857$) óriásbolygót választottam, az ütközési paramétert ebben az esetben 0-nak rögzítve.

Végül, hogy az eredményeket elemezhetővé tegyem, a (12) egyenleten keresztül a Merkúr pályájának ($a \approx 52 \cdot 10^6$ km, $P \approx 87$ nap) megfelelő idő-adatokat rendeltem a számolt fényességekhez, amelyeket egyébként a csillag rendszerében mért magnitúdóban adok meg.

Vizsgált paraméter	Bemenő érték	Illesztett érték
t_C [nap]	0	$2 \cdot 10^{-5}$
p	0,0857	0,0857
b	0,0	0,0
ω [nap ⁻¹]	5,365	5,363

1. táblázat. A 4. ábrán látható szimulált fénygörbe bemenő paramétereit és a rájuk illesztett görbéből meghatározható értékeit, $\chi^2 = 0,00064$.

1.4.2. Elemzések

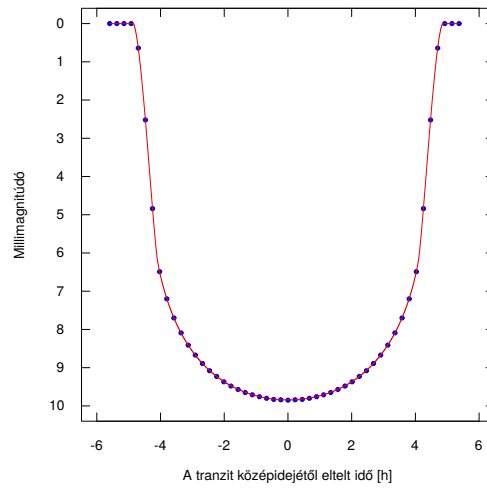
A szimulációk során kapott fénygörbét a parancssorból futtatható FITSH/*lfit* kód (Pál, 2012) segítségével elemeztem. Ez a szoftver 1000 iterációjú Markov-lánc Monte Carlo illesztést végez négy fő paraméterre, ezek pedig: a tranzit t_C középideje, a sugarak p aránya, az ütközési paraméter négyzete (b^2), valamint az $\omega = \frac{a}{R_S} \frac{2\pi}{P} \frac{1}{\sqrt{1-b^2}}$ (Pál, 2009). A program minden lépésben kiszámítja a χ^2 értékét, ennek minimalizálásával lehet a legjobban illeszkedő modellt meghatározni.

A szimulációhoz használt és az illesztett paramétereket az 1. táblázat tartalmazza, míg a két görbe a 4. ábrán látható. A bemenő és illesztett paraméterek közötti elhanyagolható eltérés bizonyítja azt a tényt, hogy a fentebb vázolt szimuláció és modellezés kompatibilisek egymással, vagyis ezt az eljárást gond nélkül lehet szélesebb körben is alkalmazni. A későbbiekben egyértelművé váló okok miatt fontos kiemelni, hogy a szélsötétedési együtthatók mindkét lépésben $u_1 = 0,4201$ és $u_2 = 0,2807$ voltak, amely értékek az Ariel-úrteleszkóp *VisPhot* szűrőjében egy Naphoz hasonló csillagnak felelnek meg.

A fénygörbék modellezésénél nagyobb pontosságú eredményeket kaphatunk, ha a perem-sötétedési együtthatókat szabad paraméterként kezeljük (Csizmadia és mtsai., 2013), azonban,

⁷Ezt úgy lehet figyelembe venni, hogy míg a csillag korongját ábrázolva az egyes pixelek intenzitása a (6) egyenlettől függően ≤ 1 , addig a bolygó képén minden pixel értéke pontosan 1.

mivel a dolgozatban szimulált esetek kerülnek elemzésre, ahol a pontos együtthatók ismertek, ettől eltekinthetünk.



4. ábra. Az exobolygók fénygörbéinek vizsgálatára szolgáló módszer alapjának szemléltetésére szolgáló ábra. Kékkel a „mért” pontok-, pirossal a rájuk illesztett görbe látható (részleteket lásd a szövegben).

2. Egzotikus exobolygók fénygörbéi

A 1. fejezetben tárgyalt leírás a gömb alakú bolygókra vonatkozik, azonban például a gyors forgás következtében kialakulhatnak forgási ellipszoid alakú planéták is. Erre a saját naprendszerünkben is láthatunk példákat, ugyanis ilyen a Jupiter és a Szaturnusz is, sőt, utóbbi kiterjedt gyűrűrendszerrel is rendelkezik. Jogos tehát a feltevés, hogy más csillagok körül is létezhetnek ilyen „egzotikus” exobolygók. Az ilyen objektumok által mutatott fénygörbék szimulációja és elemzése megegyezik azzal, amit a körlap alakú bolygókorongok esetében bemutattam.

2.1. Lapult bolygók

A gyors forgás következtében ellipszoid alakot felvevő bolygók fénygörbéinek vizsgálata nem újkeletű probléma, számos kutatás foglalkozott már ezzel a témakörrel (pl. Carter és Winn, 2010; Akinsanmi és mtsai., 2020). A bolygókorongot ebben az esetben az ún. lapultsági paraméter jellemzi:

$$f = \frac{R_{Eq} - R_{Pol}}{R_{Eq}} \approx \frac{1}{2} \frac{\omega^2}{\omega_{max}^2}, \quad (14)$$

ahol R_{Eq} az egyenlítői-, R_{Pol} a poláris sugár, ω a bolygó forgásának szögsebessége és $\omega_{max} = \frac{GM}{R_E^2}$ a forgási szétesés határán mérhető maximális szögsebesség (Murray és Dermott, 1999; Carter és Winn, 2010). Az ilyen irányba történt korábbi vizsgálatok mind arra a konklúzióra jutottak, hogy egy lapult bolygó fénygörbéje a gömb alakúétól főként a csillagkorong elé történő belépéskor-, valamint az onnan való kilépéskor tér el.

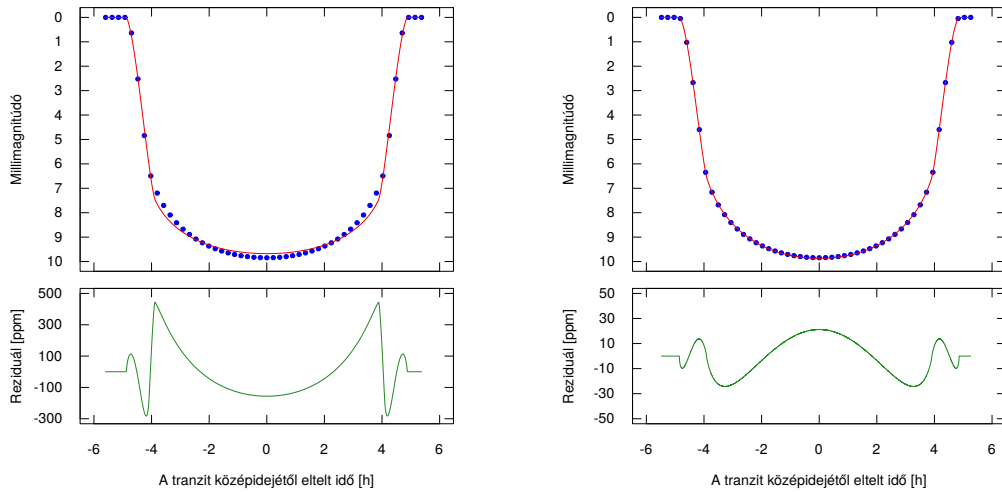
Az itt tárgyalt exobolygók korongjait egy egyszerű ellipszis írja le a gyors forgás ugyanis így torzíthatja a szférikus alakot. A csillagukhoz nagyon közel keringő bolygók esetén azonban az árapályerők hatására ennél sokkal bonyolultabb objektumok is előállhatnak, ezek jellemzésére az ún. Love-számokat szokás használni. Hellard és mtsai. (2019, 2020) megmutatták, hogy egy tranzitos exobolygó esetén, megfelelően kicsi zajszintnél ez a torzulás is kimutatható lenne, azonban én ilyen szimulációkat nem végeztem.

Visszatérve most az alapeset bemutatásához használt paraméterekhez (egy Naphoz hasonló csillag, ami körül egy $p = 0,0857$ sugárányú bolygó kering $b = 0$ -val és $P = 87$ napos periódussal), azt láthatjuk az 5. ábra bal paneljein, hogy ha nem a jó szélsőtétedési együtthatókkal végezzük el az illesztést (jelen esetben $u_1 = 0,2798$ és $u_2 = 0,2256$), akkor a reziduálok alakja hasonló lesz ahhoz, amit egy elliptikus bolygónál (ebben az esetben $f \sim 0,38$) tapasztalnánk (5. ábra jobb paneljei).

A küldetésüket már befejezett, vagy jelenleg is üzemben lévő űrteleszkópok közös tulajdonsága, hogy nem képesek többszín-fotometriára, azaz csak egyetlen, széles fotometriai sávban végeznek méréseket, ez pedig esetlegesen feloldatlanul hagyhatja a szélsőtétedés–lapult bolygó kettőség problémáját (amint az az 5. ábrán, illetve annak leírásában is látható). Feltehetőleg ennek a következménye, hogy ugyan az 5. ábra bal alsó panelje kvalitatíve jó összhangot mutat Barnes és Fortney (2003), Carter és Winn (2010) és Akinsanmi és mtsai. (2020) eredményeivel, ennek a dualitásnak a korábbi tanulmányok nem szenteltek különösebb hangsúlyt. A jövő azonban ebben az irányban is tartogat előrelépést, elsőként az Ariel-űrteleszkópnak köszönhetően.

2.1.1. Az Ariel misszió

Az ESA Ariel-űrteleszkópja (6. ábra) várhatóan az évtized végén kerül majd fellövésre, küldetése során pedig kb. 1000, előre kiválasztott exobolygórendszert vizsgál majd meg (ellentétben például a Kepler-űrtávcsővel, amely exobolygók felfedezésére volt hivatott). Az $1,1 \text{ m} \times 0,7$



5. ábra. Egy kör alakú bolygókorong tranzitja a nem megfelelő u_1 , u_2 értékkel megillesztve (bal felső panel), az illesztés reziduáljai (bal alsó panel, $\chi^2 = 489,73$), és egy ellipszis alakú bolygókorong a megfelelő u_1 , u_2 értékekkel megillesztve (jobb felső panel), valamint az illesztés reziduáljai (jobb alsó panel, $\chi^2 = 3,73$). Érdemes megfigyelni az alsó paneleken látható görbék között felfedezhető hasonlóságokat, főként, hogy a legkomolyabb eltérést az illesztett görbétől a belépésnél, kilépésnél és a csillagkorong közepénél is fel lehet fedezni, továbbá azt is, hogy a szélsőtétedés megfelelő kezelése mennyit képes javítani az illesztésen.

m-es elliptikus főtükrével gyűjtött fényt spektroszkópiai és fotometriai műszerekkel történő egyidejű vizsgálata is lehetséges lesz, valamint az 1, 24 – 1, 92 μm -es hullámhosszban meghatározható alacsony felbontású spektrumokat lehet majd fotometriai célokra is felhasználni (Szabó és mtsai., 2021).

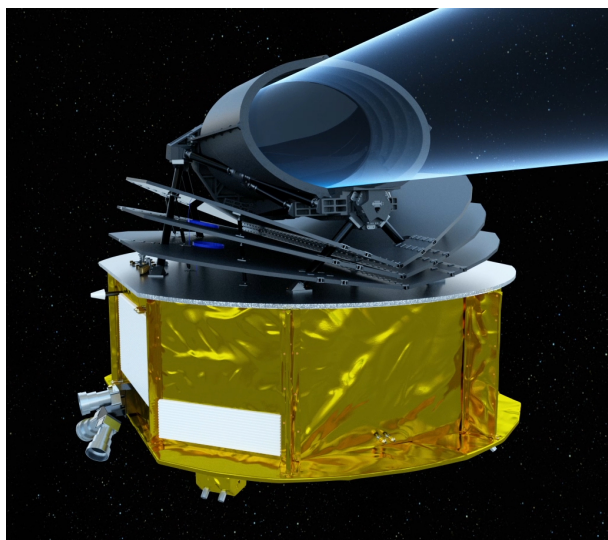
Az Ariel-űrtávcső lesz az első olyan exobolygók tanulmányozására dedikált űreszköz, amely rövid mintavételezési idővel tud háromszín-fotometriát végezni a *VisPhot*, az *FGS1* és az *FGS2* szűrőkön át (2. táblázat), emellett a spektroszkópiai műszerekből is lesz lehetőség szintetikus szűrők előállítására.

Szűrő neve	Centrális hullámhossz [μm]	Sáv szélesség [μm]
VisPhot	0,55	0,1
FGS1	0,70	0,2
FGS2	0,95	0,3

2. táblázat. Az Ariel-űrtávcső fotometriai sávjai. [Szabó és mtsai. (2021) alapján]

2.1.2. Lapult bolygók fénygörbéi az Ariel-űrtávcső szemével

Az exobolygók lapultsága kapcsán a szimulációkhoz eddig használt fő paramétereken (p és b) kívül két újabb tényező jelenik meg a bolygókorong ellipticitása miatt: az ellipszis f lapultsága, valamint a bolygó forgástengelye és a keringési pálya által bezárt ϑ szög. A háromszín-fotometria által ezen a területen nyújtott lehetőségek megvizsgálása céljából összesen kétszer három esetet szimuláltam, először az ütközési paramétert változtatva, majd – ehhez képest –



6. ábra. Az Ariel-űrteleszkóp fantáziarajza. [<https://arielmission.space/press-releases/>]

a ϑ szöveget variálva (mindeközben a már bemutatott $p = 0,0857$ -es sugáránynt és a Merkúr pályáját alapul véve):

A : $f \sim 0,38$ -as lapultságú, $b = 0$ -s ütközési paraméterű és $\vartheta = 0^\circ$;

B : $f \sim 0,38$ -ös lapultságú, $b = 0,25$ -ös ütközési paraméterű, $\vartheta = 30^\circ$;

C : $f \sim 0,1$ -es lapultságú (Szaturnuszhoz hasonló), $b = 0,25$ -ös ütközési paraméterű, és $\vartheta = 30^\circ$,

valamint

A₁ : $f \sim 0,38$ -as lapultságú, $b = 0$ -s ütközési paraméterű és $\vartheta = 30^\circ$;

B₁ : $f \sim 0,38$ -ös lapultságú, $b = 0,25$ -ös ütközési paraméterű, $\vartheta = 60^\circ$;

C₁ : $f \sim 0,1$ -es lapultságú (Szaturnuszhoz hasonló), $b = 0,25$ -ös ütközési paraméterű, és $\vartheta = 60^\circ$.

A konfigurációk sematikusan a 7. és 8. ábrák bal felső paneljein találhatóak, az egyes esetekben mérhető fénygörbék az A, B, C és A₁, B₁, C₁ paneleken pontokkal ábrázolva láthatóak. A kapott fénygörbékre ismét a FITSH/*lfit*-be belefoglalt Mandel és Agol (2002) modellt illesztettem (a *VisPhot*, *FGS1* és *FGS2* szűrőknek megfelelő szélsőtétedési együtthatókkal), ezeket a releváns paneleken a pontoknak megfelelő színű görbék jelképezik.

A háromszín-fotometria egyik nagy előnye a reziduálok elkészítésénél mutatkozik meg. Mivel az *lfit* kör alakú bolygókorongok illesztését végzi, így az ettől való eltérést a t_C , p , b és ω paraméterek módosításával tudja kompenzálni, minden szűrőben kicsit másképp. Fizikailag azonban azt várjuk, hogy egy bolygó mérete és pályájának beállítása ne függjön a megfigyelés hullámhosszától. Ennek megvalósítására a *VisPhot*, *FGS1* és *FGS2* szűrőkben meghatározott p és b értékeket⁸ a szintén meghatározott bizonytalanságukkal súlyozva használtam egy olyan fénygörbe elkészítésére, amely már szín-független. Ebből levonva az egyes szűrőkben szimulált értékeket megkaphatóak az A, B, C, A₁, B₁ és C₁ panelek alsó részein látható reziduálok.

⁸A t_C és ω változóiban a három szín közötti különbség elhanyagolható volt.

Az A eset szimmetrikussága miatt a reziduáloktól is szimmetriát várunk, ez teljesül is, azonban ehhez hasonló reziduálokat korábbi publikációkban nem lehet találni. Érdemes kiemelni, hogy a három reziduál ugyan követi egymást, azonban jelentős különbségeket lehet felfedezni közöttük – ugyanez igaz a B és C esetekre is. Utóbbiaknál a konfigurációból származó aszimmetria is fellép, ezekben a kapott eredmények jó összhangban vannak pl. Akinsanmi és mtsai. (2020) által kapott eredményekkel.

Amint az várható, az A_1 konfiguráció szimmetrikussága a fénygörbén is látható, míg a másik két eset asszimmetriához vezet. A B_1 és C_1 esetek asszimmetriája is kiválóan látható a reziduálokból és ezek is ismertek a szakirodalomból. Mindhárom eset ismertnek tekinthető a szakirodalomból (pl. Barnes és mtsai., 2013), ám a többszín-fotometria lehetőségei is (szó szerint) kirajzolódnak.

Egy újabb fontos pont a lapult bolygók Ariel-úrteleszkóppal történő detektálása mellett, hogy fotometriai műszereivel a pontosságot várhatóan 20 ppm-ig lehet majd levinni, ez pedig azt jelenti, hogy a 7. és 8. ábrákon látható összes esetet (a maguk ≈ 50 , ≈ 70 , ≈ 300 , ≈ 500 , ≈ 400 és ≈ 200 ppm-es amplitúdóival) látni lehetne, sőt, B, B_1 , C és C_1 esetekben a különböző szűrőkben látható reziduálok között is ennél nagyobb a különbség, azaz szerencsés esetben például egy Szaturnuszhoz hasonló lapultságú és méretű exobolygót is láthatnánk egy Naphoz hasonló csillag körül (a gyűrűrendszere nélkül is) – és természetesen elmondhatnánk róla, hogy az nem egyszerűen gömb alakú.

A 3. táblázatban a bolygó- és csillagsugarak p arányának és a b ütközési paraméter elfogadott értékei láthatóak az első három vizsgált esetre. Összevetve a vázolt esetekkel kitűnik, hogy míg a Szaturnusz-szerű bolygó esetén az illesztő algoritmus hibahatáron belül *a priori* információ nélkül meghatározza a szimulált bolygó releváns értékeit, addig a nagyobb lapultságú bolygó esetén ez egyáltalán nincs így. Amennyiben a keringési sík és a bolygó forgástengelye nagyobb szöget zárnak be egymással, úgy az illesztések (és így a meghatározott paraméterek is, ld. 4. táblázat) sokat romlanak, ebből azonban szintén elmondható, hogy torzult a bolygó.

Vizsgált paraméter	A eset	B eset	C eset
p	$0,0878 \pm 1,7 \cdot 10^{-4}$	$0,0867 \pm 1,5 \cdot 10^{-4}$	$0,0859 \pm 0,2 \cdot 10^{-4}$
b	$0,432 \pm 0,011$	$0,416 \pm 0,06$	$0,285 \pm 0,028$

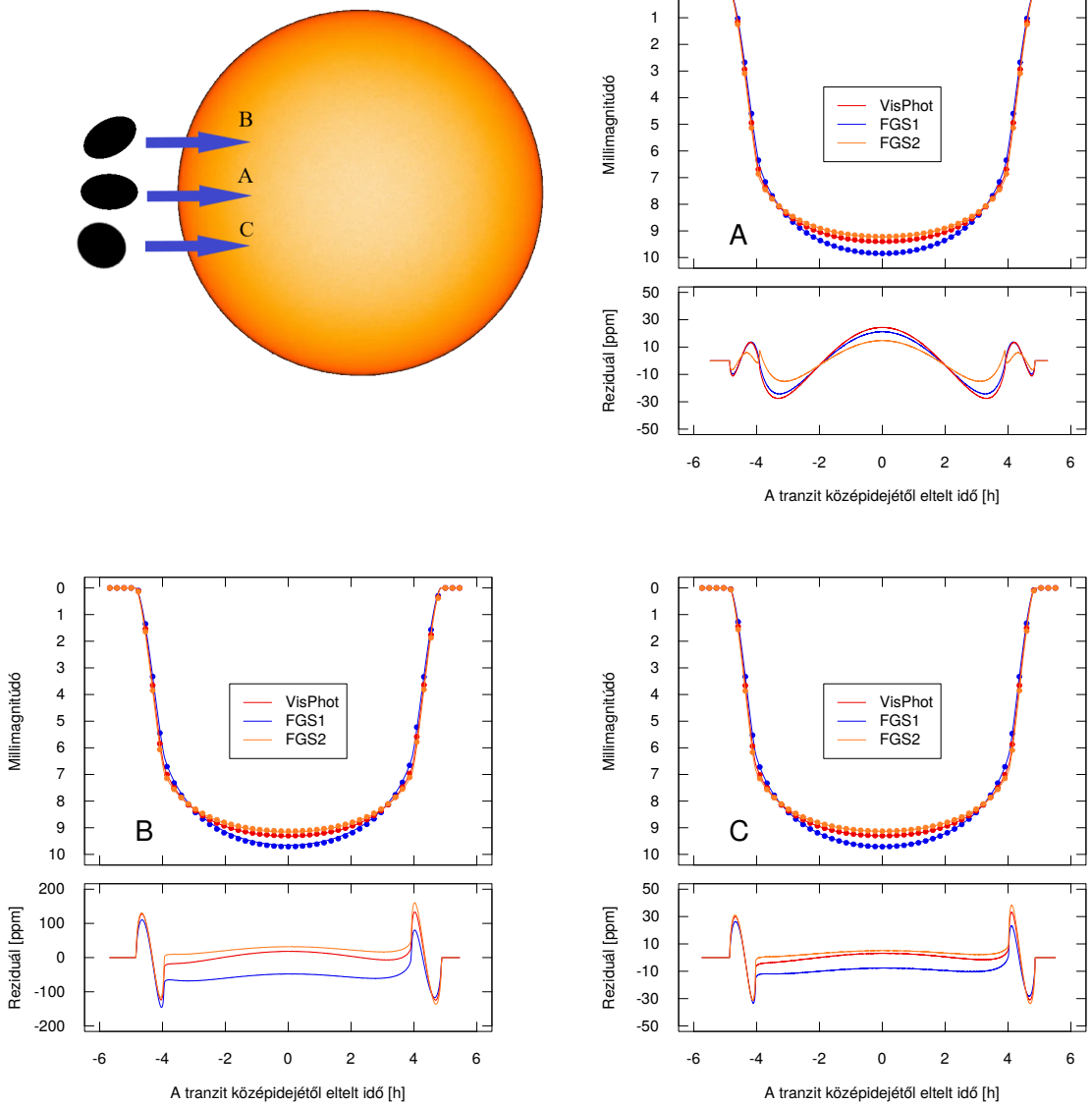
3. táblázat. A p és b paraméterek súlyozott átlaga és súlyozott bizonytalanságai az első három vizsgált szimuláció során.

Vizsgált paraméter	A_1 eset	B_1 eset	C_1 eset
p	$0,0867 \pm 1,9 \cdot 10^{-4}$	$0,0853 \pm 0,7 \cdot 10^{-4}$	$0,0856 \pm 0,2 \cdot 10^{-4}$
b	$0,201^{+0,388}_{-0,201}$	$0,051^{+0,111}_{-0,051}$	$0,127^{+0,223}_{-0,127}$

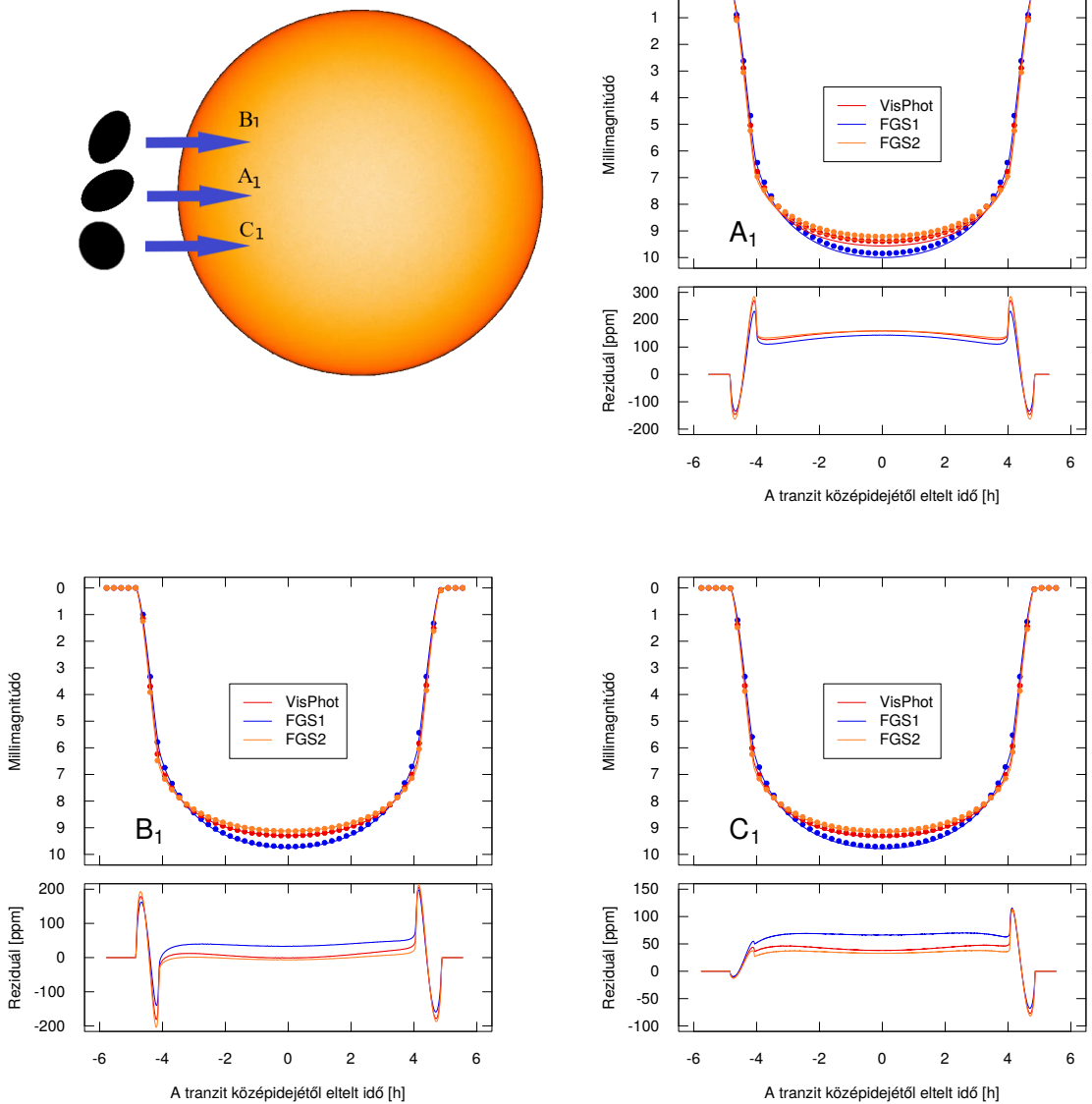
4. táblázat. A p és b paraméterek súlyozott átlaga és súlyozott bizonytalanságai a második három vizsgált szimuláció során. A hibahatárokból is látszik, hogy az illesztések problémásak voltak.

2.2. Gyűrűs bolygók

A fentebb látható ellipszis alakú bolygók fénygörbéinek kiszámítása csak akkor egzakt, ha feltezzük, hogy a bolygó teljesen átlátszatlan testként viselkedik a releváns hullámhossztarto-



7. ábra. Az exobolygók lapultságának fénygörbéjükre gyakorolt hatását bemutató ábra. A bal felső panelen az első 3 szimulált konfiguráció látható, míg az A, B és C panelek az egyes esetekben kapott fénygörbéket, a rájuk illesztett modelleket és a kettő különbségét mutatják.



8. ábra. Az exobolygók lapultságának fénygörbéjükre gyakorolt hatását bemutató ábra. A bal felső panelen a második 3 szimulált konfiguráció látható, míg az A_1 , B_1 és C_1 panelek az egyes esetekben kapott fénygörbéket, a rájuk illesztett modelleket és a kettő különbségét mutatják.

mányban, és nem végez precessziót. Előbbi a Naprendszerből ismertek alapján egyáltalán nem elvárhatóan egy exobolygótól sem, viszont a precesszió jelensége sok helyen megjelenik. Ez a szimulációk szempontjából két dolgot jelentene:

- az ellipszoid csillagfényt takaró vetülete, azaz a látszó bolygókorong mérete változhat;
- a ϑ szög is változhat.

Ha azonban élünk azzal a feltevessel, hogy egyetlen tranzit időtartama alatt ez a jelenség elhanyagolható (kiindulva például a Föld forgástengelyének 26000 éves „billengéséből”, ami a tranzit néhány órájához képest teljesen elhanyagolható), akkor az egyes tranzitokra máris egzakt szimulációkat kapunk.

A 7. ábra alsó paneljeihez hasonló fénygörbét eredményezne azonban az is, ha nem pusztán egy ellaposodott bolygóról lenne szó, hanem pl. egy tényleges Szaturnuszról, azaz egy kiterjedt, sűrű gyűrűvel rendelkező exobolygóról. Ez a helyzet azonban jóval összetettebb és számos új változót hoz be a képbe: a gyűrű külső és belső sugarait, a benne lévő anyag mennyiségét és milyenségét az opacitásán keresztül, valamint a gyűrű normálisának a keringési iránnyal bezárt szögét. Továbbá, várható, hogy a gyűrűben lévő por miatt fellépő szórás fénytöbbletbe vezet (Sucerquia és mtsai., 2020).

A gyűrűs exobolygók tanulmányozása szintén nem újkeletű dolog: Barnes és Fortney (2004) alaposan körbejárták az imént említett konfigurációkat és problémákat, míg Heising és mtsai. (2015) a Kepler-adatbázisban meglévő 21 potenciálisan gyűrűvel rendelkező bolygó vizsgálatát végezték el. Korábbi tanulmányok azonban (tudomásom szerint) nem foglalkoztak „tényleges” Szaturnuszokkal, azaz egy lapult bolygó körül megjelenő gyűrű esetével.

A gyűrűs esetben a szimuláció azért is problémásabb a tisztán lapult esetnél, mert nem tudjuk, hogy különböző színekben (és főként különböző Ariel-színekben) mennyi fényt takarhat el maga a gyűrű. Ennek következtében, hogy a kapott eredmény önkonzisztens– és a 7. ábrán láthatókkal összevethető legyen, csak egyetlen szűrőben – a *VisPhot*-ban – vizsgáltam gyűrűs bolygók fénygörbéjét.

A szimulációkhoz használt modellekben a gyűrű sűrűségét és opacitását egyszerre jellemző értéket 0, 1-re állítottam be (emlékeztetőül: a teljesen átlátszatlan bolygókorong hasonló értéke 1), a gyűrű külső sugara $2R_p$, belső sugara pedig $1,5R_p$, míg a bolygó sugarát a már jól ismert $p = 0,0857$ értékkel lehet leírni. A gyűrűvel rendelkező bolygók fénygörbéjének érdemi tanulmányozásához szükség van azonban még egy további paraméter figyelembe vételére, ez pedig a gyűrű normálisa és a bolygó pályája által bezárt φ szög. Ehhez hasonló tényezővel azért nem kellett foglalkozni a lapult bolygók esetén, mert, mint fentebb olvasható is, a bolygó látóirányba eső vetülete mindenképpen ellipszis alakú, függetlenül a precessziótól. Ezzel az egyszerűsítéssel nem lehet élni még akkor sem, ha – mint jelen esetben – feltesszük, hogy a bolygó forgástengelyének és a gyűrű normálisának iránya megegyezik.

Újabb három eset szimulációjára került sor (a gyűrűt két dimenziósra feltételezve) – ezek a 9. ábra bal felső paneljén láthatóak:

D : Gömb alakú bolygó ($f = 0$) $b = 0$ -s ütközési paraméterrel, $\vartheta = 0^\circ$, $\varphi = 60^\circ$;

E : $f \sim 0,38$ -as lapultságú bolygó, $b = 0,25$ -ös ütközési paraméterrel, $\vartheta = 30^\circ$ és $\varphi = 60^\circ$;

F : Gömb alakú bolygó bolygó, $b = 0,25$ -ös ütközési paraméterű, $\vartheta = 30^\circ$, $\varphi = 60^\circ$.

A három esetben kapott fénygörbék a 9. ábrán láthatóak.

Amint az várható is, a D esetben kapott reziduálok jó egyezést mutatnak a Barnes és Fortney (2004) által kapott eredményekkel. Az E és F esetekben látható reziduálok azonban a korábbi

eredményektől érdemi eltérést mutatnak, ami szintén nem meglepő, ahogy az sem, hogy mindkét konfiguráció aszimmetrikus fénygörbékhez vezet. Emellett, főként az E esetben látható eredmények mutatnak jelentős hasonlóságot a 7. ábra alsó paneljeivel és a 8. ábra B1 paneljével – ez viszont nincs teljes összhangban Heising és mtsai. (2015) azon megállapításával, miszerint a két típusú jel hasonlóságához arra van szükség, hogy a gyűrű normálisa kb. a látóirányba mutasson⁹. Az E, valamint a B, B₁ és C esetek közötti apró (kvalitatív) különbségeket természetesen a gyűrű és a bolygó között látszó „rés” okozza – ezek viszont még az Ariel 20 ppm-es zajszintjével sem lesznek detektálhatóak, ugyanez igaz az F esetre is.

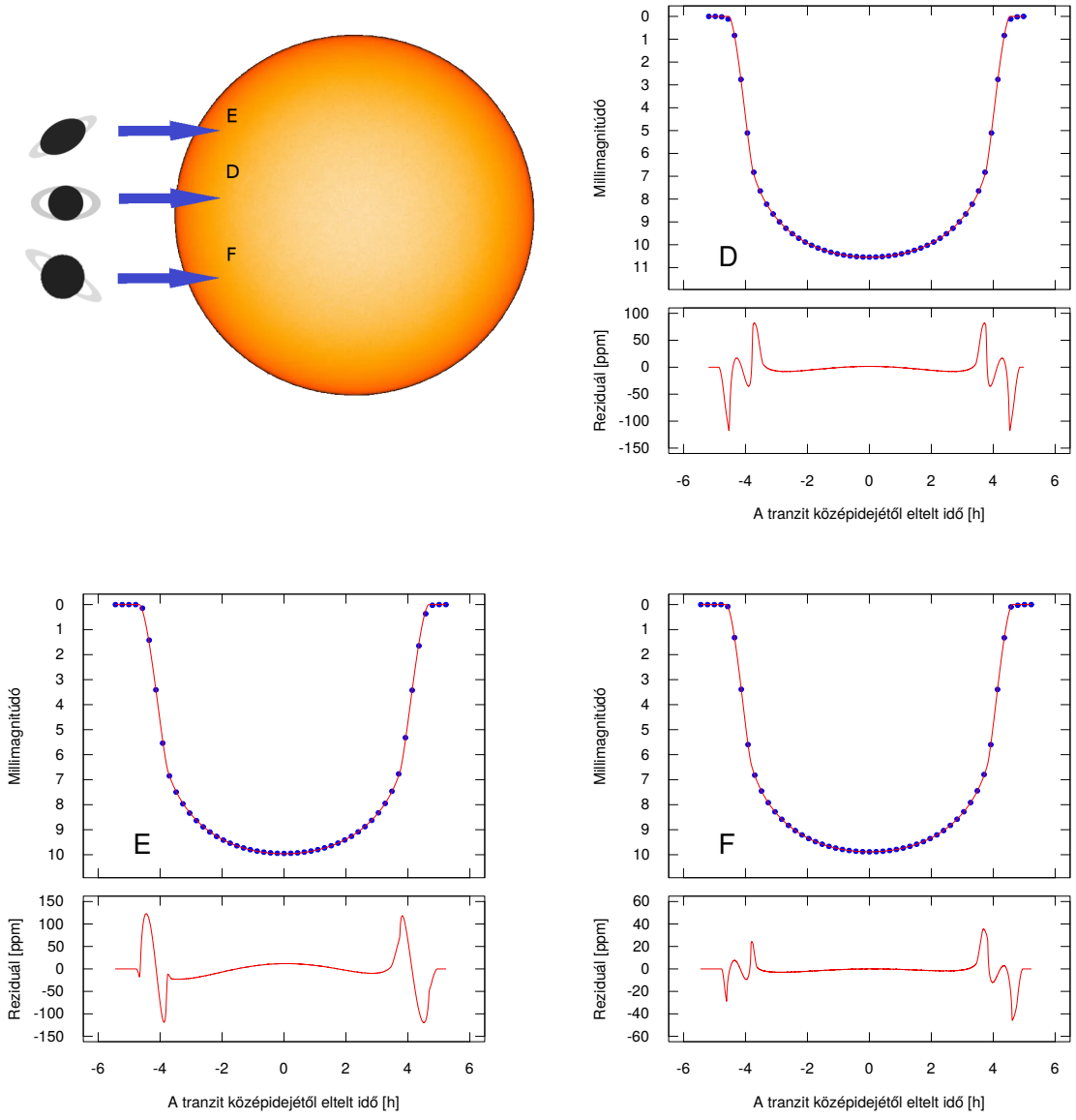
Mivel az *lfit* kód csupán egy kör alakú bolygókorong illesztésére szolgál, ahhoz, hogy a gyűrűk hatásait kikompenzálja, megváltoztatja a közönséges fénygörbét leíró paramétereit, ezek közül a két főbb változó került feltüntetésre a 5. táblázatban. Amint az várható is, ezt a kompenzációt egyfelől a bolygó méretének megnövelésével éri el, másfelől azonban az ütközési paraméterek sem egyeznek meg hibahatáron belül a szimulációnál beállított értékkel (az F esetet leszámítva). Érdekesség, hogy a D és F panelek alsó fénygörbéit összevetve feltűnik, hogy a nemnulla ütközési paraméter és elforgatott gyűrű azt eredményezi, hogy a gömb alakú bolygóval illesztve kisebb rezidálokot kapunk.

Vizsgált paraméter	D eset	E eset	F eset
p	$0,0892 \pm 1,7 \cdot 10^{-4}$	$0,0882 \pm 1,7 \cdot 10^{-4}$	$0,0867 \pm 1,8 \cdot 10^{-4}$
b	$0,229 \pm 0,121$	$0,430 \pm 0,111$	$0,278 \pm 0,121$

5. táblázat. A 9. ábrán látható esetekre legjobban illeszkedő görbéket leíró sugár-arány és ütközési paraméter.

Arra a konklúzióra lehet tehát jutni, hogy pusztán az itt vázolt elemzést elvégezve egyértelműen nem lehet eldönteni, hogy egy lapult– vagy egy gyűrűs bolygóról van szó (főleg akkor nem, ha ezen esetek keverékéről beszélünk), de azt igen, hogy nem egy „közönséges” gömb alakú objektumot látunk.

⁹Ez az összevetés azonban csak részben korrekt, Heising és mtsai. (2015) egy gömb alakú bolygó körül lévő gyűrűt tárgyaltak.



9. ábra. A három vizsgált eset személtetése (bal felső panel), az ezek által eredményezett fénygörbék és az lfit segítségével rájuk illesztett modellek, valamint a szimuláció és a modell különbsége ppm-ben, a D, E és F panelek alsó részein.

3. Paraméterek elemzése zaj jelenlétében

Az előző fejezetekben tárgyalt esetek mind olyan elméleti szimulációkat mutattak, ahol nem lépett fel semmilyen zaj, ez azonban a valóságban természetesen soha nem valósul meg – minden mérés zajjal terhelt. Ebben a fejezetben két különböző zajmodell (fehér zaj és korrelált zaj) tranzitos exobolygók fénygörbéire gyakorolt hatását fogom bemutatni. Ezzel a problémakörrel szintén az Ariel-űrteleszkóp kapcsán foglalkoztam, az egyes mérések során várható zajok figyelembe vételével ugyanis nagyobb pontosságot lehet elérni.

Természetesen konkrét zajmodell az Ariel-űrtávcső műszereihez még nem létezik, így azt, hogy technikailag azzal mit kellene csinálni, a témavezetőm által egy korábbi, Teachey és Kipping (2018) által végzett méréshez elkészített zajklónon mutatom be.

3.1. Az ARIMA folyamat

Az idősorok elemzésénél nem mindig célszerű a frekvenciatérben gondolkodni (ahogy az pl. a Fourier-transzformáció esetén természetes), az alábbiakban bemutatott eljáráshoz éppen az időtartományban működő ARIMA¹⁰ folyamat használata szükséges. Az elképzelés mindössze annyi, hogy a múltbeli pontok (és azok sajátosságai) meghatározzák tetszőleges jövőbeli pontok helyzetét. Az alábbiakban egy meglévő zajfajl ARIMA folyamaton keresztüli „klónozását” fogom bemutatni úgy, hogy a zajra illesztett ARIMA modellel generálok egy annál több nagyságrenddel hosszabb, kiterjesztett idősort, mindezt *R*-ben végrehajtva.

3.1.1. Stacionaritás

A folyamat első feltétele, hogy az adatsor stacionárius legyen, azaz a jellemzői (átlag, variancia, stb.) ne legyenek időfüggőek. Ezt pl. egy lineáris trend esetén könnyű eldönteni (és kezelni), de általános esetben a stacionaritás vizsgálatára az egységgyök-teszt elvégzése szolgál. Azt mondjuk, hogy egy (lineáris) sztochasztikus folyamatnak egységgyöke van, ha a karakterisztikus egyenletének¹¹ gyökei között szerepel az 1. Ha ez fennáll, az idősor nem stacionárius (en.wikipedia.org).

R-ben számos ilyen beépített teszt létezik, én ezek közül a kiegészített Dickey–Fuller-tesztet használtam, amely a *tseries* csomaghoz¹² tartozik. Az adatsorra az *adf.test()* függvényt lefuttatva a program kiszámítja a *p*-értéket, amely ha kicsi, akkor elvethető az a nullhipotézis, miszerint van egységgyök, tehát feltehető, hogy az idősor stacionárius. Ez volt a helyzet a 10. ábra esetén is, a 0,01-nél kisebb *p* értékkel. Ebben az esetben itt szemmel is jól látható, hogy nincs időfüggés az adatok jellemzőiben.

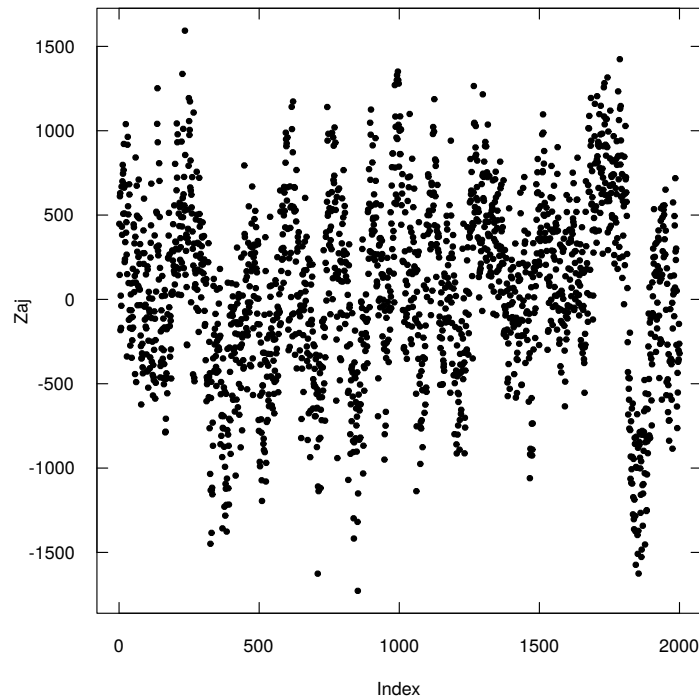
3.1.2. Autokorreláció és részleges autokorreláció

Ahhoz, hogy eldöntsük, hogy az ARIMA folyamat illesztésénél hány autoregresszív– és hány mozgóátlag tagot kell figyelembe venni szükség van információra arról, hogy az adatsorban az egyes elemek között mekkora korreláció lép fel. Tegyük fel, hogy az idősor y_t -edik és y_{t-1} -edik eleme között korreláció van, és ez a korreláció ugyanakkora, mint az y_{t-1} -edik és az y_{t-2} -ik elemek között – ez legyen az eggyel elcsúsztatott, vagy *lag* – 1 korreláció értéke. Ekkor természetesen y_t és y_{t-2} között is korreláció van, ez a kettővel elcsúsztatott, vagy *lag* – 2 korreláció,

¹⁰Autoregressive Integrated Moving Average – autoregresszív integrált mozgóátlag

¹¹Olyan *n*-ed rendű algebrai egyenlet, amelytől egy *n*-ed rendű differenciálegyenlet megoldása függ.

¹²<https://cran.r-project.org/web/packages/tseries/tseries.pdf>



10. ábra. A kiindulási zaj ábrázolva, mértékegységek nélkül, hiszen azoknak egyelőre nincs szerepe – a későbbiekben az index felel majd meg az időnek (a felzajosított fénygörbéből ugyan visszaszámolható lenne az egyes pontokhoz tartozó idő-adat, azonban a módszert ez nem befolyásolja, így én ezt nem tettem meg). Az `adf.test()` alapján a p -érték kisebb mint 0,01. Az itt látható kváziperiodikus viselkedés indokolja az ARIMA folyamat használatát.

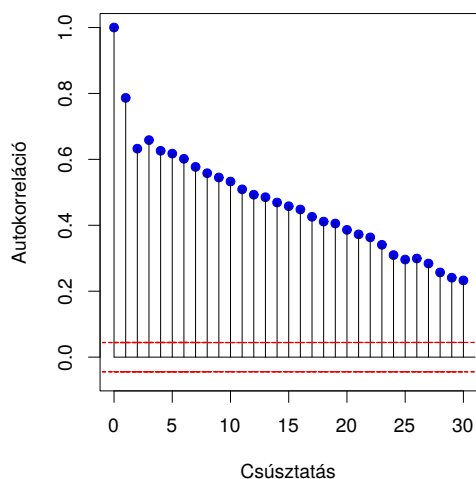
amelynek mértéke a $lag - 1$ korreláció négyzetgyöke, és így tovább. Ennek a szemléltetésére szolgál az autokorrelációs függvény.

Jelölje ρ_k az autokorrelációt az N elemből álló y adatsorban, k csúsztatás esetén. Ekkor (Box és mtsai., 1994):

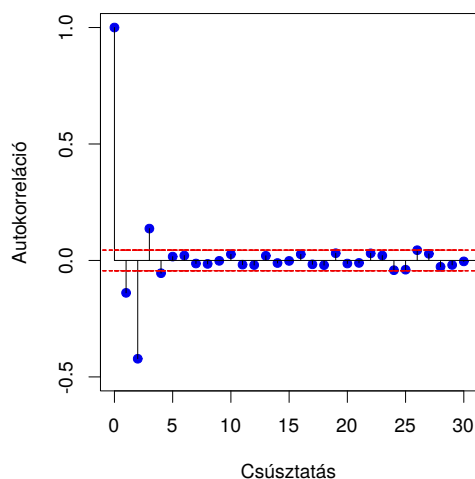
$$\rho_k = \frac{\sum_{t=1}^{N-k} (y_t - \bar{y})(y_{t+k} - \bar{y})}{\sum_{t=1}^N (y_t - \bar{y})^2}. \quad (15)$$

Ezzel a formulával számol R -ben az `acf()` függvény. A kiindulási zajban fellépő autokorreláció a 11.(a) ábrán látható, és amint az jól látszik, az egyes pontok között fellépő korreláció jelentős. A korreláció szignifikáns, ha (Box és mtsai., 1994) $|\rho_k| \geq \frac{1,96}{\sqrt{N-k}}$. Az ARIMA modell illesztéséhez ezt a korrelációt el kell távolítani az adatsorból, ehhez differenciázhoz¹³ lehet folyamodni. Az idősor egyszeri- és kétszeri differenciázásával készült el az autokorrelációt szemléltető 11. ábra (b) és (c) panelje. A cél itt az, hogy a ρ_k néhány tag után lecsengjen, vagyis arra a következtetésre lehet jutni, hogy már egyszeri differenciázás is elég, hiszen nem tapasztalható javulás a 11.(c) ábrán. A differenciázással azt kell elérnünk, hogy a reziduálok szórása csökkenjen, vagyis akkor differenciáztunk elégszer, amikor ez minimális, és amint azt a 11.(d) ábra is alátámasztja, a 10. ábrán látható zajon $d = 1$ -szer kell differenciázást végrehajtani (ezt R -ben a `diff()` függvénnyel a legegyszerűbb elvégezni). Ezt követően tehát az $y'_t = y_t - y_{t+1}$ adatsorral dolgozunk tovább, ez az idősor a 12. ábrán látható.

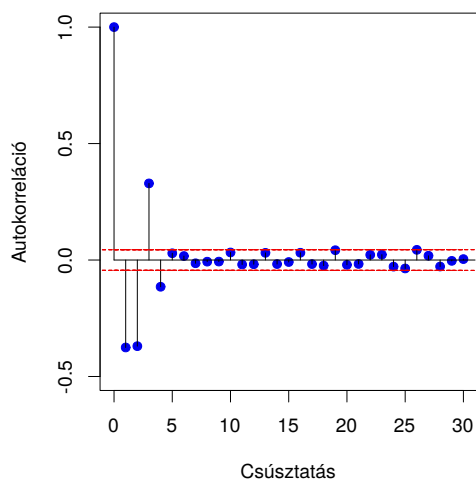
¹³A jelfeldolgozásban a diszkrét idősor elemenkénti különbségképzését differenciázásnak nevezzük – ez diszkrét differenciálásnak felel meg.



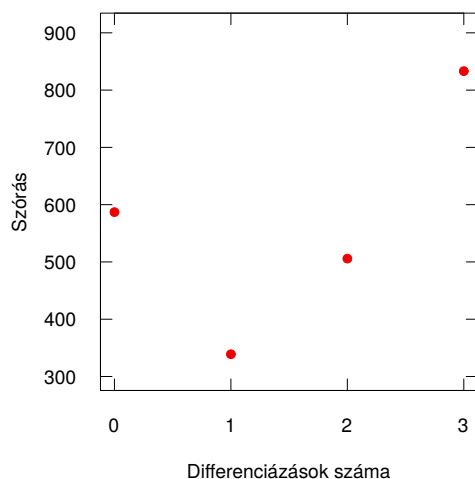
(a) Differenciálás nélkül.



(b) Egyszer differenciázva.



(c) Kétszer differenciázva.

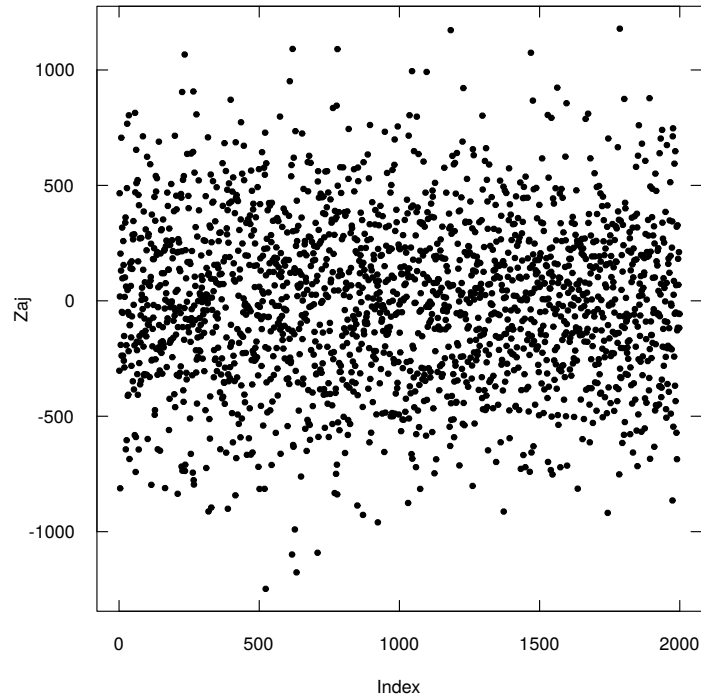


(d) Reziduál szórása.

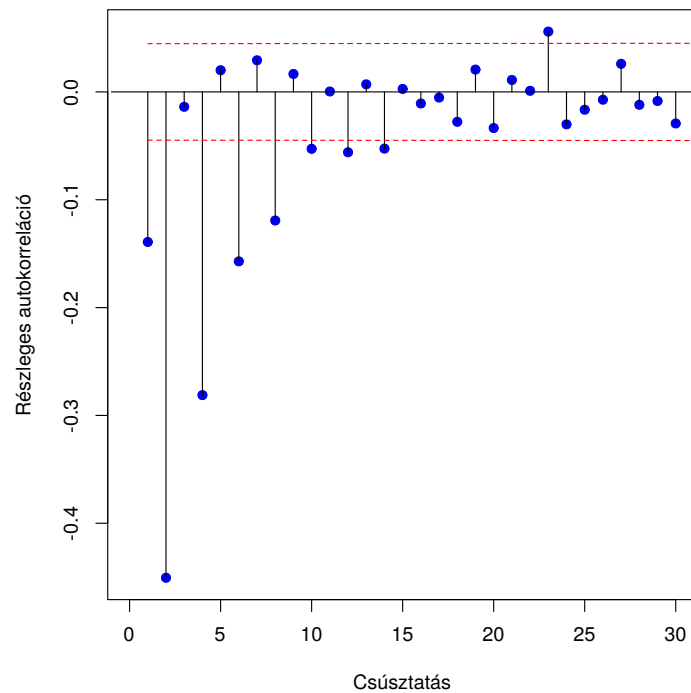
11. ábra. A 10. ábrán látható zajban fellépő autokorreláció, $k \leq 30$ esetén, $d = 0$; 1 és 2-re ((a), (b) és (c) panelek), valamint a differenciázott adatsorok szórása d függvényében ((d) panel). A szignifikanciához tartozó értéket a vörös szaggatott vonal jelzi. A $\rho_0 = 1$ érték nem meglepő, az eltolás nélküli esetben a (15) egyenlet számlálójában látható kovariancia pont a varianciát adja, ami pedig a nevezőben szerepel.

Az autokorrelációs profilok mellett a részleges autokorrelációs függvényre is szükség van annak eldöntéséhez, hogy milyen tényezőkből álló modellt célszerű illeszteni az adott idősorra. Ez kvantitatíve azt adja meg, hogy két különböző csúsztatásnál meglévő autokorrelációból mennyit lehet megmagyarázni a többi pont korrelációjával. A k csúsztatáshoz tartozó részleges autokorreláció kiszámításához $k - 1$ darab ($k \geq 2$) csúsztatott idősort kell lineárisan illeszteni az eredeti idősorra, ekkor a $\hat{\rho}$ részleges autokorreláció a legutolsó adatsorhoz tartozó „meredekség” lesz. A lineáris illesztéshez az R -be beépített $lm()$ függvényt használtam. Az első 30 csúsztatáshoz tartozó korrelációk a 13. ábrán láthatóak.

Mindezek alapján azt a következtetést lehet leszűrni, hogy a zaj $ARIMA(p, d, q)$ folyamat



12. ábra. A differenciázott zaj. Jól látható, hogy a 10. ábrához viszonyítva megszűntek a „hullámzások”, a pontok eloszlása közelebb van a fehér zajhoz.



13. ábra. A részleges autokorrelációs profil. A $\frac{1,96}{\sqrt{N-k}}$ szignifikanciaszinthez tartozó értékek piros szaggatott vonallal vannak feltüntetve.

általános

$$\left(1 - \sum_{i=1}^p \varphi_i L^i\right) (1 - L)^d y_t = \left(1 + \sum_{i=1}^q \theta_i L^i\right) \epsilon_t \quad (16)$$

alakján keresztüli illesztéséhez egy ARIMA(2,1,2) modell szükséges, ahol $p = 2$ a figyelembe vett autoregresszív tagok száma, $q = 2$ a mozgóátlag-tagok száma és $d = 1$ a differenciázások száma. A (16) egyenletben L^i a késleltető operátor, amely egy idősorban az egyik elemből előállítja az azt megelőzőt, φ_i az autoregresszív együtthatókat-, ϑ_i a mozgóátlag-együtthatókat jelöli, míg ϵ_t a hibatagokat írja le. Ezt az illesztést R-ben az `arima()` függvénnyel lehet elvégezni, majd a tetszőleges hosszúságú klónozást az `arima.sim()` parancs megfelelő beparaméterezésével lehet elérni. Utolsó lépésként d darab (diszkrét) integrálást kell elvégezni, ezt R-ben a `diffinv()` függvénnyel lehet megtenni.

3.2. A paraméterek eloszlásának vizsgálata

Egy tranzitos exobolygó szimulált fénygörbéjére (az adatokat az 6. táblázat tartalmazza) adott zaj esetén várható, hogy a fénygörbét leíró paramétereket különböző méretű hiba terheli majd. A vizsgálataim során az ARIMA folyamat segítségével előállított korrelált zajmodellt és egy fehér zajt tartalmazó modellt használtam, először ezeknek néhány realizációját mutatom be röviden.

p	b	ω [nap ⁻¹]
0,1416	0,678	19,328

6. táblázat. A zaj hatásának vizsgálatához felhasznált kiindulási fénygörbét jellemző adatok.

3.2.1. A felhasznált zajmodellek

A korrelált zaj modelljének három, véletlenszerűen kiválasztott realizációja és ezek spektruma látható a 14. ábrán. A spektrumokat az R-be beépített `fft()` függvénnyel állítottam elő, amely egy N hosszúságú (komplex) z vektorból előállít egy szintén N hosszúságú y vektort az

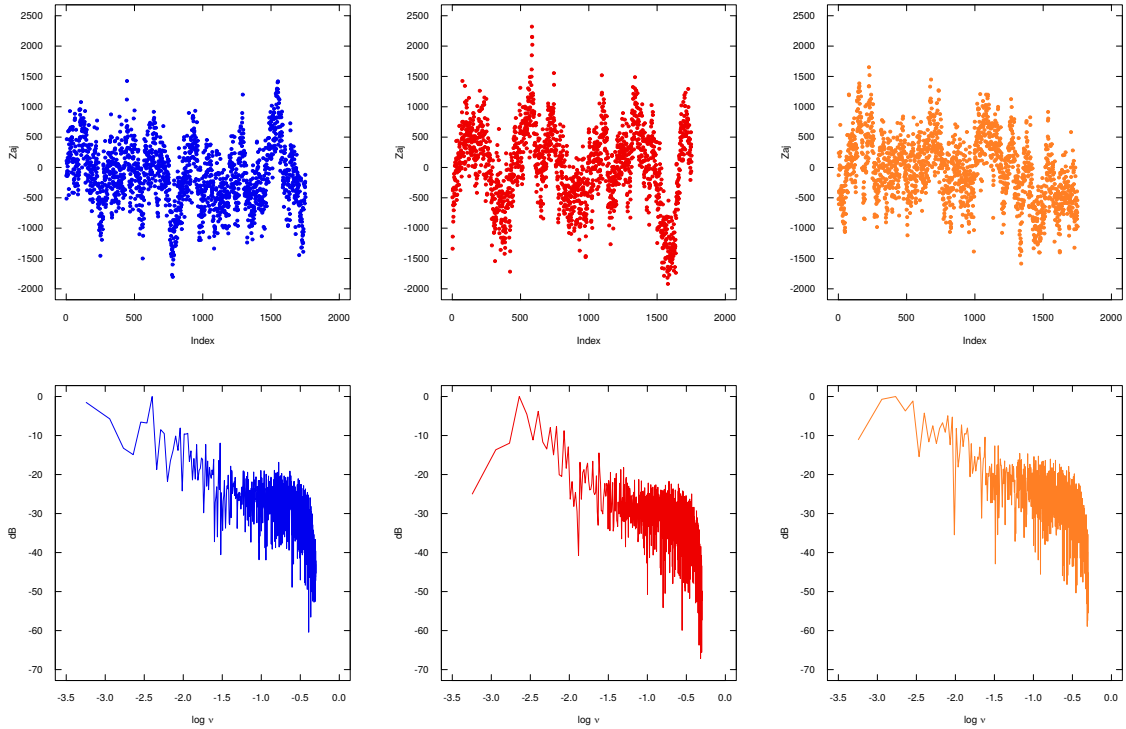
$$y_h = \sum_{k=1}^N z_k e^{-\frac{2\pi i(k-1)(h-1)}{N}} \quad (17)$$

összefüggés segítségével (Becker és mtsai., 2018), ebből megkapható a spektrum amplitúdó-komponense, a megfelelő frekvenciák függvényeként ábrázolva pedig megkapható a tényleges spektrum.

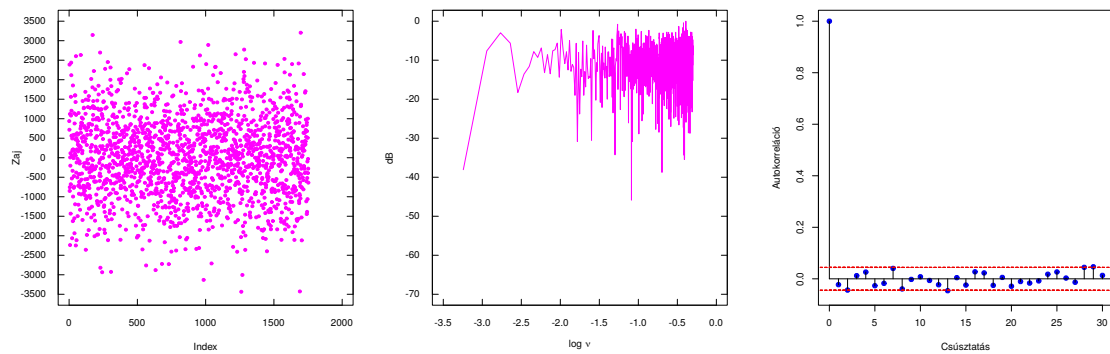
A fehér zaj előállítása ezzel szemben sokkal egyszerűbb; az `rnorm()` parancs tetszőleges középértékű és szórású Gauss-eloszlású számokat generál, ennek egy realizációja látható a 15. ábra bal paneljén. Azt a tényt, hogy a kapott adatsor valóban fehér zaj, nem csak a spektrumában (15. ábra középső panelje) lévő karakterisztikák hiánya igazolja, de a 15. ábra jobb paneljén látható autokorrelációs függvény is. Az utóbbi segítségével elmondható, hogy egyetlen adatpont sem hat ki semelyik másikra, ami természetesen szöges ellentétben áll a 11. ábra esetén látottakkal. Azt is érdemes megjegyezni, hogy míg a korrelált zaj spektrumában (14. ábra alsó sora) felfedezhető az amplitúdók frekvenciával arányos csökkenése, addig ez a fehér zaj spektrumában (15. ábra középső panelje) nincs jelen – jó közelítéssel minden frekvencián azonos jelszint látható.

3.2.2. A paraméterek meghatározása

A kutatásom ezen része során a fénygörbét leíró, már korábban említett négy paraméter eloszlását vizsgáltam, ezek a tranzit t_C középideje, a sugarak p aránya, az ütközési paraméter



14. ábra. A korrelált zaj modelljének három, a szimulált bemeneti fénygörbének megfelelő hosszúságú realizációja (felső sor) és azok spektruma (alsó sor).



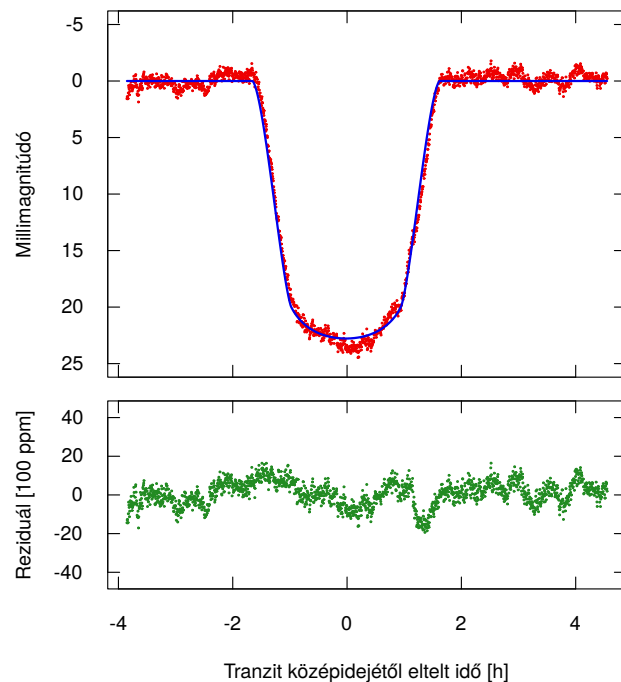
15. ábra. A fehér zaj modelljének egy realizációja, annak spektruma, valamint az autokorrelációs függvény az első 30 csúsztatásra.

négyzete (b^2) és az $\omega = \frac{2\pi R_S}{P} \frac{1}{a \sqrt{1-b^2}}$. Ennek elvégzésére a szimulált fénygörbéhez adtam hozzá a zajmodellek egy-egy véletlenszerűen kiválasztott, megfelelő hosszúságú szegmensét (mindkét esetben azonos mértékben skálázva), majd a kapott, immár felzajosított fénygörbére a már korábban alaposan ismert FITSH/fit kód segítségével illesztettem a jól ismert Mandel és Agol (2002) által felállított modellt (16. ábra), mindezt zajtípusonként tízezerszer.

A t_C , p , b^2 és ω paraméterek abszolút- és relatív hibáit egy-egy hisztogramon tüntettem fel, ezek a 17. és 18. ábrákon láthatóak. A kvantitatív elemzés érdekében az ábrákra feltüntettem az eloszlások mediánját, valamint a 2., 3. és 4. (statisztikai) momentumát (azaz varianciáját, ferdeségét¹⁴ és kurtózsát¹⁵). A következtetések levonásához a két zajmodell esetén kapott értékek

¹⁴Azt adja meg, hogy mennyire dőlt az eloszlás.

¹⁵Az eloszlás szögletességét adja meg, pontosabban az azonos szóródású normális eloszlás alakjától való eltérést



16. ábra. Egy tipikus, korrelált zajjal felzajosított fénygörbe (piros), az arra illesztett modell (kék), valamint a kettő különbsége (zöld, alsó panel). Szembetűnő, hogy az illesztett görbe a leszálló és a felszálló ágon is a mérési pontok bal oldalán halad, ez tehát nagyon szemléletesen mutatja, hogy a korrelált zaj miként okozhat hamis változásokat a tranzit középidéjében.

összevetése a célszerű.

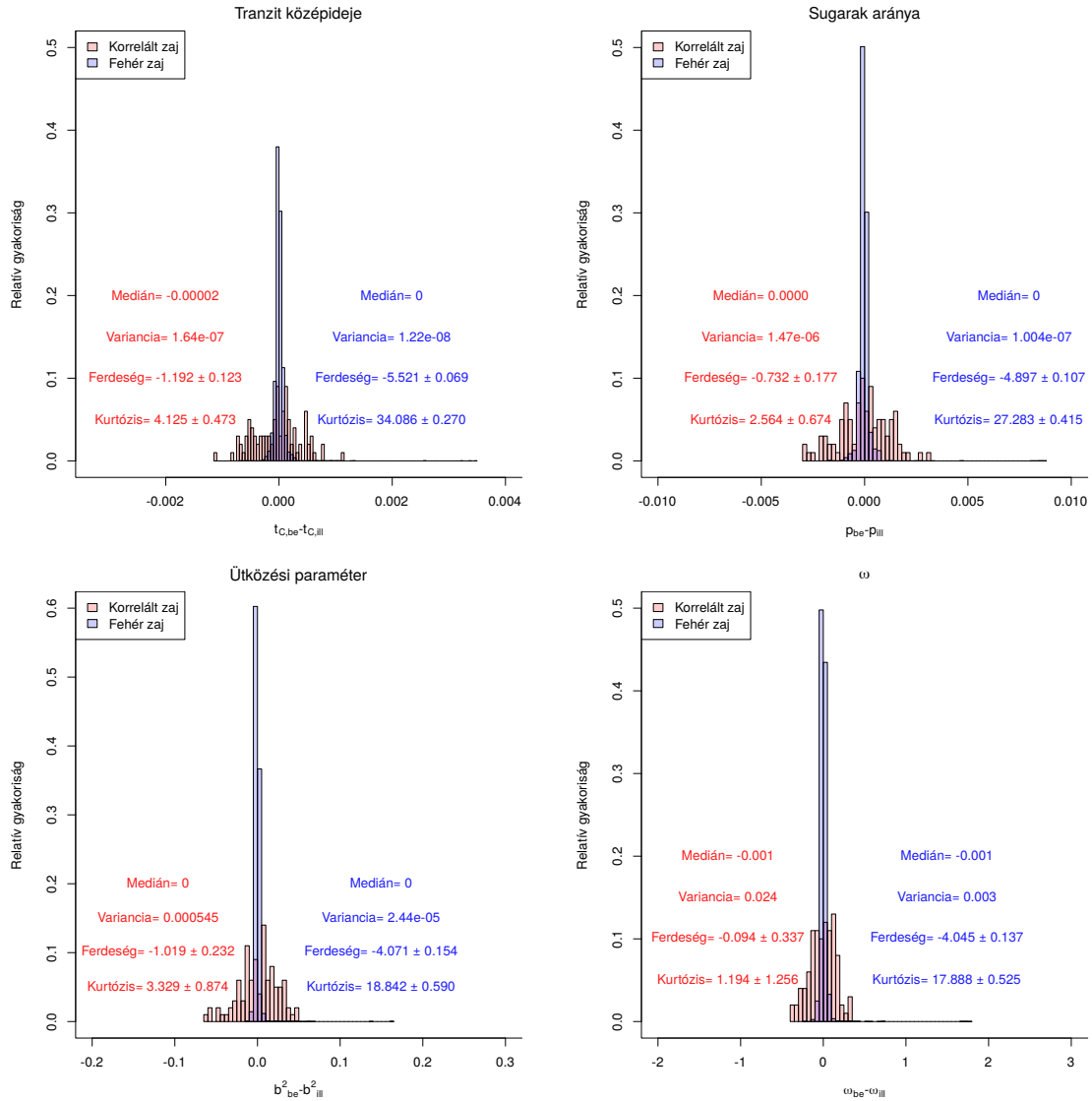
3.2.2.1 Abszolút hibák

Mind a négy paraméter abszolút hibájának (bemenő és illesztett érték különbsége) eloszlására elmondható, hogy korrelált zaj jelenlétében sokkal szélesebb eloszlást mutatnak, mint tisztán fehér zaj esetén – ez a varianciában megjelenő, kb. egy nagyságrendnyi különbségnek felel meg (17. ábra). Az is fennáll, hogy az eloszlások mediánja jó közelítéssel megegyezik és nulla köré centráltak. A hisztogramok jobb oldalán megjelenő elnyúlt rész azt jelenti, hogy az illesztés sokszor jelentősen felülbecsüli az összes paramétert (a korrelált zajos esetben), ez megjelenik a ferdeség (a fehér zajnál) kisebb, de szintén negatív értékében is, ami azt jelenti, hogy a látszat ellenére többször vannak a paraméterek alulbecsülve, ráadásul ez mindkét típusú zajra igaz.

3.2.2.2 Relatív hibák

Amint az korábban is említésre került, az *lfít* kód az illesztett paraméterek bizonytalanságára is ad becslést, ezt felhasználva lehet a relatív hibák eloszlását is vizsgálni. Ebben az esetben is elmondható, hogy a variancia a korrelált esetben egy nagyságrenddel nagyobb, mint a fehér zajos esetben, valamint arra is lehet következtetni, hogy a paraméterek bizonytalansága komolyan alul van becslve. A sugarak arányára továbbra is érvényes, hogy az eloszlásuk mediánja mindkét zajmodell esetén 0, azonban a b^2 és az ω esetén ez a negatív irányokba tolódik, míg a

jellemzi, kiemelve az eloszlás módusz körüli kicsúcsosodást vagy ellaposodást, valamint a „szárnyak” vastagságát és hosszát.



17. ábra. A vizsgált paraméterek abszolút hibái a két zajmodell esetében.

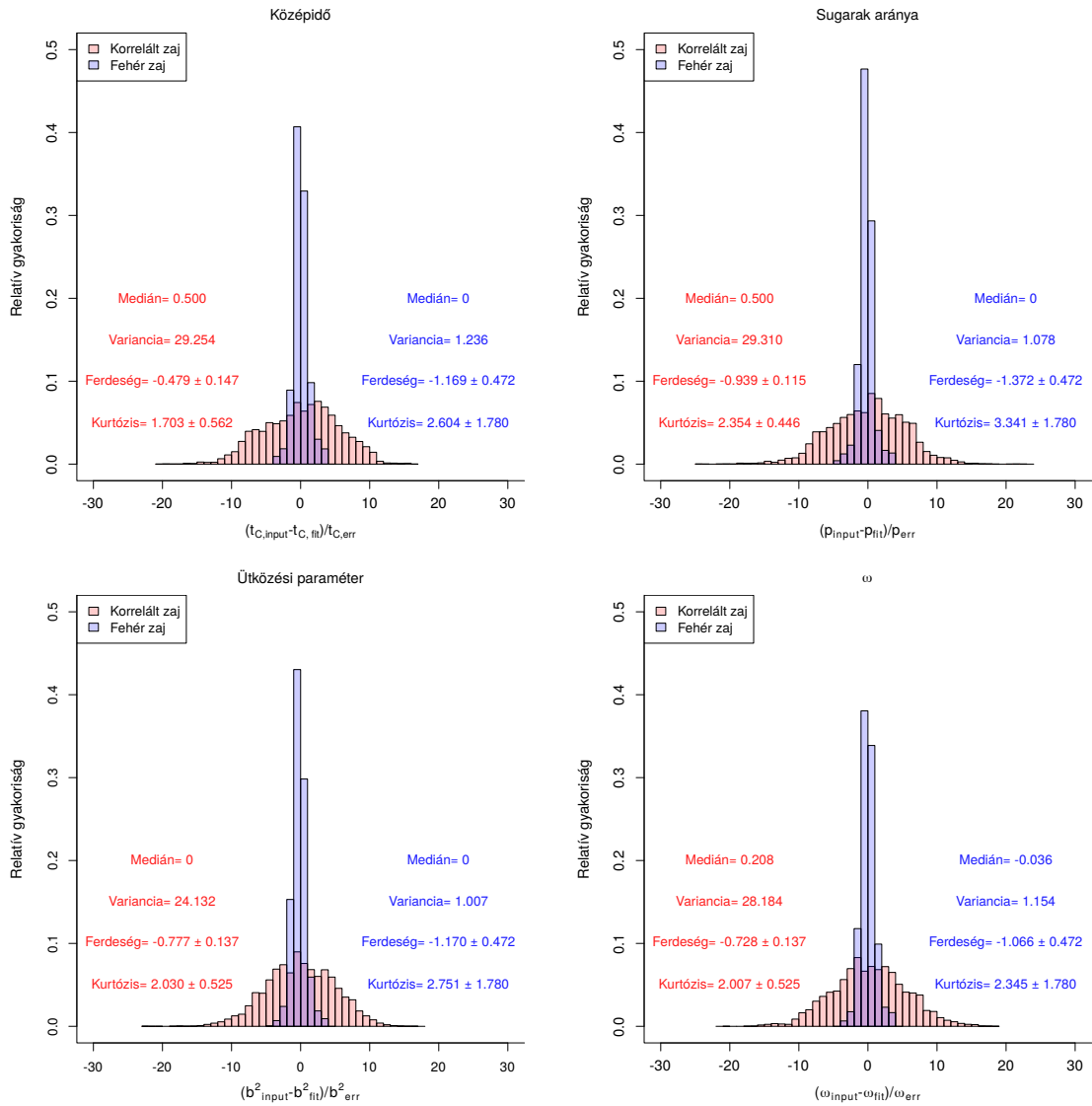
t_C mediánja pozitív értékű lesz. A ferdeségből pedig az látszik, hogy minden esetben többször van alulbecsülve az egyes paraméterek relatív értéke.

3.3. Kitekintés

A probléma egy lehetséges megoldásaként maga a korrelált zaj is modellezhető, ehhez azonban (sokkal) bonyolultabb szoftvert kell használni. A TLCM¹⁶ (Csizmadia, 2020) egy nagyon sokoldalú és sok effektust elemezni képes program, amely az IDL programnyelvre épül. Az *lf-ti/FITSH*-hoz hasonlóan az exobolygók fénygörbéinek analízisére itt is a Mandel és Agol (2002) által felállított modellt vesszük alapul, ám ez már képes a korrelált zaj kezelésére is. Ennek során a csillagaktivitásból és a műszerekből származó zajt waveletek összegeként kezeli (Carter és Winn, 2009) eljárásai alapján, jelen dolgozatnak azonban nem célja ezt mélyebben bemutatni.

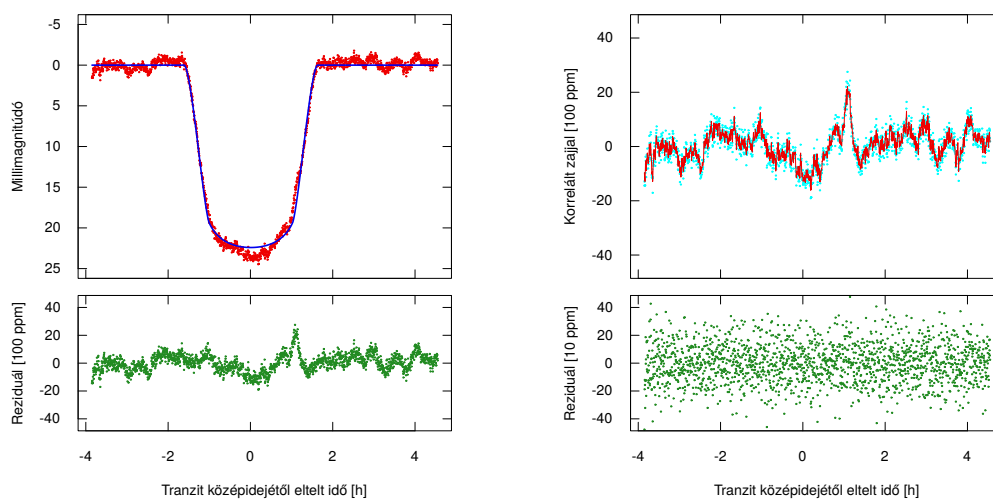
Egy, a 16. ábrán láthatóhoz hasonló fénygörbe megoldásához néhány másodperc helyett 70-80 perc közötti időre van szükség, így a korábban látott nagy elemszámú statisztikák elkészítése

¹⁶Transit and Light Curve Modeller



18. ábra. A vizsgált paraméterek relatív hibái a két zajmodell esetében.

még várat magára. Előzetes eredményként azonban tekintsük a 19. ábrát! A 16. ábrával mutatott hasonlóság természetesen megvan, ugyanakkor például a hamis t_C -ingadozás közel sem annyira szembeötlő már.



19. ábra. A 16. ábrán látható fénygörbe (bal felső panel, piros), az erre illesztett korrelált zajt figyelembe vevő modell (bal felső panel, kék), a kettő különbsége (bal alsó panel – zöld és jobb felső panel– ciánkék), az illesztett korrelált zajmodell (jobb felső panel, piros) és a teljes zajból levont korrelált zaj (azaz fehér zaj, jobb alsó panel). Vegyük észre a nagyságrendnyi különbséget a két alsó panelen látható értékek között.

4. Összefoglalás

A diplomamunkám elkészítése során kettő, az exobolygók fotometriáját érintő témakörrel foglalkoztam; ezek a torzult (lapult és/vagy gyűrűs) bolygók fénygörbéinek alakja és a méréseket terhelő korrelált zaj hatása az exobolygórendszereket leíró paraméterekre. Mindkét kérdéskörrel az évtized végén fellövésre kerülő Ariel-űrteleszkóp fotometriai képességeinek felmérése kapcsán találkoztam.

Az első témakörben a háromszín-fotometria által nyújtott lehetőségeket vizsgáltam. Egy exobolygó f lapultságát, b ütközési paraméterét és a forgástengelyének a keringési síkkal bezárt ϑ szögét változtatva összesen 6 különböző tranzitkonfigurációt szimuláltam, kiindulva egy Naphoz hasonló csillag körül keringő, Szaturnusz méretű objektumból. A szimulációkhoz egy saját készítésű, R -ben írt programot használtam, míg a tranzitok analízisét a FITSH/*fit* nevű célszoftverrel végeztem, amely a Mandel és Agol (2002) által felállított modellt használja. A peremsötétedést a másodrendű törvény segítségével vettem figyelembe, a szimulációk és az illesztések esetén ezen együtthatók megegyeztek.

A kapott eredmények kapcsán elmondható, hogy egyrészt azok az egyes szűrőkben jó egyezést mutatnak a szakirodalomból ismert hasonló fénygörbékkel (pl. Barnes és mtsai., 2013; Akinsanmi és mtsai., 2020) és az 50 és 500 ppm közötti amplitúddal rendelkező reziduálok várhatóan detektálhatóak lennének az Ariel-űrtávcsővel. Másrészt, a különböző színekben kapott reziduálok ugyan követik egymást, de mégsem teljesen együtt mennek, sőt, néhány esetben az Ariel várható zajszintjénél nagyobb lesz a különbség közöttük, megerősítve ezáltal a lapultság észlelhetőségét.

A gömb alaktól való eltérést azonban sűrű gyűrű megléte is okozhatja. Azt várjuk, hogy a gyűrű főként gázból és porból áll, ezen anyagok jellemzője viszont a jelentős fényszórás. A fény előreszórásának – ami felfényesedéshez vezetne a tranzit körül – modellezése azonban jelentősen elbonyolítaná a problémát, ezzel tehát nem is foglalkoztam, a problémát csak monokromatikusan vizsgálva. Így azt találtam, hogy ugyan a gyűrűk jelenléte is detektálható lenne, azonban a lapultság és gyűrűs exobolygó kérdésének eldöntése nem egyértelmű.

A második vizsgált témakör a modell zaj jelenlétében mutatott stabilitására terjedt ki. A tényleges méréseket jellemzően korrelált zaj terheli, ennek megjelenése pedig jelentősen torzíthatja az exobolygókat jellemző paramétereket. Ennek elemzéséhez egy ARIMA folyamattal klónozott zajmodell segítségével zajosítottam fel szimulált fénygörbéket, majd a FITSH/*fit* felhasználásával elemeztem azokat. Tisztán fehér zajt tartalmazó modellel összevetve azt találtam 10000 ilyen módon analizált fénygörbe alapján, hogy a korrelált eset nagyjából ötször rosszabb eredményeket ad. Amennyiben azonban a korrelált zajt valamilyen módon kezeljük, várható, hogy ennél sokkal jobb eredményeket kapunk.

Köszönetnyilvánítás

Köszönettel tartozom témavezetőmnek, **dr. Szabó M. Gyulának**, akinek közbenjárása nélkül a dolgozat egyetlen része sem valósulhatott volna meg. Köszönet illeti a Gothard Asztrofizikai Obszervatórium és Multidiszciplináris Kutatóközpont minden munkatársát, akik lehetővé tették a számos ott-tartózkodásomat és a kutatómunkához megfelelő környezetet biztosítottak. Köszönöm továbbá konzulensemnek, **dr. Szatmáry Károlynak**, aki a dolgozat elkészülte közben számos jó tanáccsal látott el. Köszönet illeti emellett **dr. Csizmadia Szilárdot** is, aki lehetővé tette számomra a TLCM nevű célszoftver használatát. Köszönöm **Hegedűs Violának** is, akihez a kevésbé vidám pillanatokban is bizalommal fordulhattam és köszönöm családomnak is az egyetemi évek alatt nyújtott folyamatos támogatást.

Külön köszönöm **dr. Szalai Tamás** minden téren nyújtott segítségét; hozzá utóbbi években bármikor, bármilyen kérdéssel fordulhattam és az ő hozzáállása nélkül jó eséllyel az alapképésben folytatott tanulmányaimat sem fejeztem volna be.

Hivatkozások

- [1] Akinsanmi, B. *et al.*: Constraining the oblateness of transiting planets with photometry and spectroscopy, *MNRAS*, **497**, 3484 (2020)
- [2] Barnes, J. W. és Fortney, J. J.: Measuring the Oblateness and Rotation of Transiting Extra-solar Giant Planets, *ApJ*, **588**, 545 (2003)
- [3] Becker, R. A. *et al.*: The New S language, 455-456, CRC Press (2018)
- [4] Box, G. E. P. *et al.*: Time Series Analysis, 21-29, 64-66, WILEY SERIES IN PROBABILITY AND STATISTICS (1994)
- [5] Carrol, B. W. és Ostlie, D. A.: An Introduction to Modern Astrophysics, 287-293, *Pearson*, 2014
- [6] Carter, J. A. és Winn, J. N.: Empirical Constraints on the Oblateness of an Exoplanet, *ApJ*, **709**, 1219 (2010)
- [7] Carter, J. A. és Winn, J. N.: Parameter Estimation from Time-series Data with Correlated Errors: A Wavelet-based Method and its Application to Transit Light Curves, *ApJ*, **704**, 51 (2009)
- [8] Claret, A.: A new non-linear limb-darkening law for LTE stellar atmosphere models. Calculations for $-5.0 \leq \log[M/H] \leq +1$, $2000 \text{ K} \leq T_{\text{eff}} \leq 50000 \text{ K}$ at several surface gravities, *A&A*, **363**, 1081
- [9] Csizmadia, Sz.: The Transit Light Curve Modeller, *MNRAS*, **496**, 4442 (2020)
- [10] Csizmadia, Sz. *et al.*: The effect of stellar limb darkening values on the accuracy of the planet radii derived from photometric transit observations, *A&A*, **549**, 9 (2013)
- [11] Heising, M. Z. *et al.*: A Search for Ringed Exoplanets Using Kepler Photometry, *ApJ*, **814**, 81 (2015)
- [12] Hellard, H. *et al.*: Retrieval of the Fluid Love Number k_2 in Exoplanetary Transit Curves, *ApJ*, **878**, 119 (2019)
- [13] Hellard, H. *et al.*: HST/STIS Capability for Love Number Measurement of WASP-121b, *ApJ*, **889**, 66 (2020)
- [14] Mandel, K. és Agol, E.: Analytic Light Curves for Planetary Transit Searches, *ApJ*, **580L**, 171 (2002)
- [15] Maxted, P. F. L.: Comparison of the power-2 limb-darkening law from the STAGGER-grid to Kepler light curves of transiting exoplanets, *A&A*, **616**, 39 (2018)
- [16] Mayor M. és Queloz D., A Jupiter-mass companion to a solar-type star, *Nature*, **378**, 355 (1995)
- [17] Milne, F. A.: Radiative Equilibrium in the Outer Layers of a Star, *MNRAS*, **81**, 361 (1921)
- [18] Murray, C. D. és Dermott, S. F.: Solar System Dynamics, 149-150, Cambridge University Press (1999)

- [19] Pál, A.: FITSH- a software package for image processing, *MNRAS*, **421**, 1825 (2012)
- [20] Pál, A.: Tools for discovering and characterizing extrasolar planets, PhD Thesis (2009)
- [21] Perryman, M.: *The Exoplanet Handbook*, 200-203, Cambridge University Press (2018)
- [22] Sánchez-Bajo, F. *et al.*: Measuring solar limb-darkening with modest equipment, *Eur. J. Phys.*, **23**, 323 (2002)
- [23] Seager, S. és Mallén-Ornelas, G.: A Unique Solution of Planet and Star Parameters from an Extrasolar Planet Transit Light Curve, *ApJ*, **585**, 1038 (2003)
- [24] Sucerquia, M. *et al.*: Scattered light may reveal the existence of ringed exoplanets, *MNRAS*, **496L**, 85 (2020)
- [25] Szabó, Gy. M. *et al.*: High-precision photometry with Ariel, *Exp. Astron*, *bírálat alatt* (2021)
- [26] Teachey, A. és Kipping, D. M.: Evidence for a large exomoon orbiting Kepler-1625b, *Sci. Adv.* **4**, 10 (2018)
- [27] Wade, R. A. és Ruciński, S. M.: Linear and quadratic limb-darkening for a large grid of LTE model atmospheres, *A&AS*, **60**, 471 (1985)
- [28] https://en.wikipedia.org/wiki/Autoregressive_integrated_moving_average

Nyilatkozat

Alulírott Kálmán Szilárd Csillagász MSc szakos hallgató (Neptun kód: I8L88R) a Tranzitos exobolygók fizikai paramétereinek vizsgálata fénygörbe analízis segítségével című diplomamunka szerzője fegyelmi felelősségem tudatában kijelentem, hogy dolgozatom önálló munkám eredménye, saját szellemi termékem, abban a hivatkozások és idézések általános szabályait következetesen alkalmaztam, mások által írt részeket a megfelelő idézés nélkül nem használtam fel.

Szeged, 2021. május 22.

Kálmán Szilárd
Csillagász MSc, II. évfolyam