Kvadrupol-monopol, mágneses dipól-mágneses dipól kölcsönhatás és gravitációs sugárzási visszahatás kompakt kettős rendszerekben

Keresztes Zoltán

2002

1 BEVEZETÉS

A Neutron csillagok és fekete lyukak alkotta kompakt kettős rendszerek gravitációs sugárzása a Föld-bázisú interferometrikus hullám-detektorok LIGO [1], VIRGO [2], GEO [3], TAMA [4] és a tervezett, három űrszondából álló LISA detektor [5, 6] frekvencia tartományába (1-1000Hz) esik. A gravitációs sugárzás következtében a rendszer energiája és pálya impulzusmomentuma csökken, ami (a Hulse-Taylor pulzár esetében ˜10^8 év elteltével) a kettős kompakt rendszer tagjainak egymásba olvadásához vezet. Összeolvadásig a mozgás poszt-newtoni közelítésben tárgyalható. A detektorok az összeolvadás előtti ˜15 perces fejlődési szakaszba érkezett kettős kompakt rendszerek gravitációs sugárzásának kimutatására képesek, így a számolások is ezt a mintegy 16000 keringési ciklusnyi időt célozzák meg, azaz magas PN rendű pontosság szükséges.

Mivel a második poszt-newtoni (PN) rendig a rendszer energiája és teljes impulzusmomentuma állandó, és a gravitációs sugárzás 2.5 PN rend vezető hozzájárulása gyorsabban csökkenti a pályák excentricitását, mint a sugarát [7], szokás szerint a gravitációs "jelformákat" és a sugárzási visszahatást kör alakú pályákra számoljuk. Azonban a galaxisok középpontjában előforduló bizonyos kettős rendszerek pályájának excentricitása jelentős lehet [8] és [9]. A hibát, amit az okoz, hogy a ténylegesen excentrikus pályán lévő rendszer által keltett hullámot úgy vizsgáljuk, mintha körpályán lévő rendszerből származna, [10] -ben jelentősnek becsülték. Ennek következtében kívánatos egy excentrikus pályákra is kiterjedő általános tárgyalásmód. Egy ilyen a 2PN rendig érvényes tárgyalást szolgáltatott Gopakumar és Iyer [11].

De a helyzet még ennél is bonyolultabb, mivel az 1.5 PN rendű mozgásban a kettős kompakt rendszerek asztrofizikai tulajdonságai is megjelennek. Ezek spin-pálya típusú járulékok, amik tovább növelik a paraméterek számát. A második PN rendben a spin-spin, kvadrupol-monopol, illetve dipól-dipól effektusok egyaránt fellépnek. A forgó kettős kompakt rendszerek sugárzó dinamikájának szakirodalmából hiányzik az utóbbi két kölcsönhatás vizsgálata excentrikus pályákra. A dolgozat a második PN rendben jelentkező korábban nem tárgyalt kétféle kölcsönhatással foglalkozik. A gravitációs sugárzás kvadrupol-monopol járuléka a kettős kompakt rendszer monopolként tekintett egyik komponensének a másik komponens kvadrupólus-terében végzett mozgásának származéka. A mágneses dipól - mágneses dipól járulék pedig szintén második PN rendű a 10^{16} G mágneses térerősségű neutron csillagokból álló kettős kompakt rendszerek esetén, az elektromágneses sugárzásuknál is jelentősebb. (Jelenleg 10^{15} G mágneses térerősségel rendelkező neutron csillagok ismertek (magnetárok, SGR, AXP).) A perturbált Kepler-mozgásban az azonos rendű kölcsönhatások járulékai nem keverednek, hanem lineárisan adódnak össze. Ezért külön-külön vizsgálhatjuk az egyes kölcsönhatások által perturbált Kepler mozgást.

A III. fejezetben a pályának két paraméterezését származtatjuk. Kiterjesztése ez a Kepler féle valódi anoália paraméterezéseknek. Ezen paraméterezések rendelkeznek azzal az előnyös tulajdonsággal, hogy a szükséges integrálok könnyen számolhatók a reziduum tétel segítségével, azonkívül az esetek többségében az egyetlen pólus az origóban van [23]. Tárgyalásunk közelről követi és épít a [19] és [20] eredményeire. Itt egy különös tulajdonsággal kerültünk szembe a spin-spin járulék vizsgálatával kapcsolatban, nevezetesen a pálya impulzusmomentum nagysága nem állandó mennyiség. Ezért bevezettünk egy átlagos $\bar{L}$ -t, és a perturbált pályát E -vel, illetve $\bar{L}$ -el jellemeztük. Ugyanúgy lehetséges a mozgás leírása E -vel és az időátlag $\langle L\rangle$ -el, azonban így bonyolultabb kifejezések adódnak. A teljesség kedvéért kiszámoljuk $\bar{L}$ és $\langle L\rangle$ közti összefüggést. A III. fejezet végén ugyanazt a kifejezést kaptuk a radiális mozgás periódusára, mint a nem perturbált esetben, de az energia a perturbált mozgást jellemzi.

Ezek után meghatározzuk a második poszt-newtoni rendű kvadrupol-monopol és dipól-dipól járulékokat a gravitációs sugárzási visszahatásokban. Kiszámoltuk az energia és a pálya impulzusmomentum nagyságának veszteségeit, valamint az összeolvadó kettős kompakt rendszer impulzusmomentumának irányát jellemző szögeknek a sugárzási visszahatás okozta megváltozását.

A szakirodalomban korábban ismert, kör alakú pályákra érvényes kvadrupol-monopol és dipól-dipól kölcsönhatásoknak tulajdonítható energiaveszteségek az excentrikus pályákra érvényes eredményeink körpálya határesetével egyezést mutatnak. A kvadrupol-monopol kölcsönhatás vizsgálatával kapcsolatos eredményeinket a Phys. Rev. D publikálta (L. Á. Gergely and Z. Keresztes, Phys. Rev. D**67**, 024020 (2003): Gravitational radiation reaction in compact binary systems: Contribution of the quadrupole-monopole interaction). A mágneses dipól - mágneses dipól kölcsönhatásával kapcsolatos eredményeinket szintén a Phys. Rev. D -nek küldtük be. A cikk még nem jelent meg, de publikálásra el van fogadva. A címe:Gravitational radiation reaction in compact binary systems: Contribution of the magnetic dipole-magnetic dipole interaction. A szerzők: Mátyás Vasúth, Zoltán Keresztes, András Mihály és László Á. Gergely.

A fénysebességet c és a gravitációs állandót G jelöli.

2 A RADIÁLIS MOZGÁS

A két test közötti kvadrupol-monopol és dipól-dipól kölcsönhatás a Kepler mozgást pertulbálja. A rendszerhez tartozó Lagrange függvény [21], [24], [22]:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_N + \mathcal{L}_{QM} + \mathcal{L}_{DD} \ , \tag{1}$$

$$\mathcal{L}_N = \frac{\mu \mathbf{v}^2}{2} + \frac{Gm\mu}{r} \ , \tag{2}$$

$$\mathcal{L}_{QM} = \frac{G\mu m^3}{2r^5} \sum_{i=1}^{2} p_i \left[3\left(\hat{\mathbf{S}}_{\mathbf{i}} \cdot \mathbf{r}\right)^2 - r^2 \right] \ , \tag{3}$$

$$\mathcal{L}_{DD} = \frac{1}{r^3} \left[3(\mathbf{n}\cdot\mathbf{d_1})(\mathbf{n}\cdot\mathbf{d_2}) - \mathbf{d_1}\cdot\mathbf{d_2} \right] \ , \tag{4}$$

ahol $\mathcal{L}_N$ a Lagrange függvény Newton-i része (m a két test együttes tömege és μ a redukált tömeg). A két test kvadrupol-monopol kölcsönhatását $\mathcal{L}_{QM}$ írja le, melyben $\mathbf{\hat{S}_i}$ az i-edik test spinjének az iránya, p_i definíciója pedig:

$$p_i = \frac{Q_i}{m_i m^2} \ . \tag{5}$$

(az i , vagy j index mindenhol az i-edik, vagy a j-edik testre utal). Itt Q_i a kettős kompakt rendszer i-edik tengelyszimmetrikus komponensének kvadrupol-momentum skalárja [21], az i-edik test szimmetria tengelyét $\mathbf{\hat{S}_i}$ jelöli ki. Newtoni határesetre mindkét tengelyszimmetrikus testre rövid számolással

$$Q_i = \Theta_i' - \Theta_i = -\frac{S_i}{\Omega_i}\left(\frac{\Theta_i}{\Theta_i'} - 1\right) \tag{6}$$

összefüggés adódik, ahol$(\Theta_i,\ \Theta_i,\ \Theta_i')$ a fő tehetetlenségi nyomatékok, S_i a spinek nagyságai és $\Omega_i = S_i/\Theta_i'$ a szögsebességek. A dipól-dipól kölcsönhatást $\mathcal{L}_{DD}$ írja le, melyben $\mathbf{n}$ a redukált tömegű testnek az össztömegű testtől számított helyvektorának iránya, $\mathbf{d_i}$ pedig az i-edik test mágneses dipolmomentum vektora.

Más járulékok, mint PN, 2PN [11], spin-pálya (SO) [18] és spin-spin (SS) [19], [20] 3/2. és 2. poszt-newtoni rendnél jelennek meg, ezek azonban nem interferálnak a kvadrupol-monopol, illetve a dipól-dipól kölcsönhatási tagokkal. A 2. poszt-newtoni tagokban könnyű megtalálni a dipól-dipól, illetve a kvadrupol-monopol kölcsönhatásból származó járulékokat. A dipól-dipól kölcsönhatási tagok felismerhetők azáltal, hogy mágneses dipolmomentum nagysádban másodfokúak, a kvadrupol-monopol tagokat pedig egy p_i megkülönböztető paraméter jelöli. Ezért a 2. poszt-newtoni tagok mindegyik járuléka függettlenül számolható. Tulajdonképpen először interferenciából származó tag 5/2. rendben jelenik meg a SO-tagok első PN korrekciójaként [25].

A gyorsulás könnyen számolható (1)-ből

$$\begin{aligned}
\mathbf{a} &= \mathbf{a}_N + \mathbf{a}_{QM} \ , &(7)\\
\mathbf{a}_N &= -\frac{Gm\mathbf{r}}{r^3} \ , &(8)\\
\mathbf{a}_{QM} &= -\frac{3Gm^3}{2r^7}\sum_{i=1}^{2} p_i \left[5\left(\mathbf{\hat{S}_i}\cdot\mathbf{r}\right)^2 - r^2\right]\mathbf{r} \\
&\quad + \frac{3Gm^3}{r^5}\sum_{i=1}^{2} p_i \left(\mathbf{\hat{S}_i}\cdot\mathbf{r}\right)\mathbf{\hat{S}_i} \ , &(9)\\
\mathbf{a}_{DD} &= \frac{3}{\mu r^4}\left\{\left[\mathbf{d_1}\cdot\mathbf{d_2} - 5(\mathbf{n}\cdot\mathbf{d_1})(\mathbf{n}\cdot\mathbf{d_2})\right]\mathbf{n} + \sum_{i\neq j}(\mathbf{n}\cdot\mathbf{d_i})\mathbf{d_j}\right\} \ . &(10)
\end{aligned}$$

Az $\mathbf{a}_{QM}$ gyorsulás a gyorsulás megegyezik [13] (55)-(56) egyenleteivel , az $\mathbf{a}_{DD}$ pedig a [22] (5) egyenletével, végrehajtva a jelölésben a megfelelő cseréket.

Mivel a kvadrupol-monopol és dipól-dipól kölcsönhatásokat leíró Lagrange függvény nem explicit idő függő a rendszer teljes energiája E megmaradó mennyiség. További megjegyzés, hogy $\mathcal{L}_{QM}$ és $\mathcal{L}_{DD}$ akárcsak a spin-spin kölcsönhatás Lagrange függvénye nem függ a sebességtől. Ezért $\mathbf{p} = \mu\dot{\mathbf{r}}$ és két következtetés vonható le:

(a.) az energia kifejezése

$$E = E_N - \mathcal{L}_{QM} - \mathcal{L}_{DD} \ , \tag{11}$$

(b.) a pálya impulzusmomentumban nincs kvadrupol-monopol, vagy dipól-dipól kölcsönhatás típusú járulék

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = \mathbf{L}_N \ . \tag{12}$$

A newtoni energia E_N és a newtoni pálya impulzusmomentum nagysága L_N megmaradó mennyiségek. Gömbi polár koordinátában:

$$\begin{aligned} E_N &= \frac{\mu v^2}{2} - \frac{Gm\mu}{r} && (13)\\ &= \frac{\mu}{2}[\dot{r}^2 + r^2(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\ \dot{\varphi}^2)] - \frac{Gm\mu}{r} \ , \\ L_N^2 &= \mu^2 r^4(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\ \dot{\varphi}^2) \ . && (14) \end{aligned}$$

Az első kifejezésből megkapjuk a sebességet, a két egyenletet egymással kombinálva pedig a radiális mozgás egyenletet (utóbbi a radiális egyenlet):

$$\begin{aligned} v^2 &= \frac{2E_N}{\mu} + \frac{2Gm}{r} \ , && (15)\\ \dot{r}^2 &= \frac{2E_N}{\mu} + \frac{2Gm}{r} - \frac{L_N^2}{\mu^2 r^2} \ . && (16) \end{aligned}$$

Ezen kifejezések azonosságok,azonban ha a Kepler mozgás perturbált E_N és L_N -re nem lesznek mozgásállandók. A (9) és (10) egyenletek mindkét oldalát $\mu\mathbf{r}$ -el keresztszorozva adódik a pálya impulzusmomentum időfejlődése:

$$\dot{\mathbf{L}} = \frac{3G\mu m^3}{r^5}\sum_{i=1}^{2} p_i\left(\hat{\mathbf{S}}_\mathbf{i}\cdot\mathbf{r}\right)\left(\mathbf{r}\times\hat{\mathbf{S}}_\mathbf{i}\right) + \frac{3}{r^3}\sum_{i\neq j}(\mathbf{n}\cdot\mathbf{d}_\mathbf{i})(\mathbf{n}\times\mathbf{d}_\mathbf{j}) \ . \tag{17}$$

A kvadrupol-monopol kölcsönhatásnak köszönhetően a spinek precessziós mozgást végeznek, ezt korábban Barker és O'Connell kiszámolta ([13] -ben lásd a (39) és (43)-as egyenleteket). A spinprecessziós egyenletet a függelékben vezetjük le:

$$\dot{\mathbf{S}}_\mathbf{i} = -\frac{3G\mu m^3}{r^5}p_i\left(\hat{\mathbf{S}}_\mathbf{i}\cdot\mathbf{r}\right)\left(\mathbf{r}\times\hat{\mathbf{S}}_\mathbf{i}\right) \ . \tag{18}$$

A spin vektorok időfejlődése a dipól-dipól kölcsönhatás miatt (lásd [22] -ban a (8) egyenletet):

$$\dot{\mathbf{S}}_{\mathbf{i}} = \mathbf{d_i} \times \mathbf{H_j} = \frac{1}{r^3}\left[3(\mathbf{n}\cdot\mathbf{d_j})(\mathbf{d_i}\times\mathbf{n}) - \mathbf{d_j}\times\mathbf{d_i}\right] \ . \tag{19}$$

Innen egyenesen következik, hogy a teljes impulzusmomentum megmaradó mennyiség

$$\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S_1} + \mathbf{S_2} \ . \tag{20}$$

Megszorozva a (17) egyenletet a pálya impulzusmomentum irányával $\hat{\mathbf{L}}$ kapjuk a pálya impulzusmomentum nagyságának időfejlődését:

$$\dot{L} = \frac{3G\mu m^3}{r^5}\sum_{i=1}^{2} p_i\left(\hat{\mathbf{S}}_{\mathbf{i}}\cdot\mathbf{r}\right)\hat{\mathbf{L}}\cdot\left(\mathbf{r}\times\hat{\mathbf{S}}_{\mathbf{i}}\right) + \frac{3\mu}{Lr^2}\sum_{i\neq j}(\mathbf{n}\cdot\mathbf{d_i})(\mathbf{v}-\dot{r}\mathbf{n})\cdot\mathbf{d_j} \ . \tag{21}$$

Tekintsük a dolgozat végén található 1. és 2. ábrát. Három koordináta rendszert vettünk fel, melyeket $\mathcal{K}$ és $\mathcal{K}^i$ -vel jelöltünk, bázisvektoraik $(\hat{\mathbf{c}}, \hat{\mathbf{L}}\times\hat{\mathbf{c}}, \hat{\mathbf{L}})$ és $(\hat{\mathbf{b}}_{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{S}}_{\mathbf{i}}\times\hat{\mathbf{b}}_{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{S}}_{\mathbf{i}})$. A mágneses dipolmomentum vektorok komponensei a $\mathcal{K}^i$ koordináta rendszerben: $d_i(\sin\alpha_i\cos\beta_i, \sin\alpha_i\sin\beta_i, \cos\alpha_i)$. A spinvektorok komponensei a $\mathcal{K}$ koordináta rendszerben: $\mathbf{S_i} = S_i(\sin\kappa_i\cos\psi_i, \sin\kappa_i\sin\psi_i, \cos\kappa_i)$. Ahhoz, hogy koordinátás alakban megadjuk a pálya impulzusmomentum nagyságának időfejlődését $\dot{L}$ -ot, szükséges, hogy mind a mágneses dipólmomentum vektorok, mind a spinvektorok ugyanazon rendszerben legyenek felírva. Végrehajtjuk a $\mathcal{K}^i \to \mathcal{K}$ transzformációt a $\hat{\mathbf{b}}_{\mathbf{i}}$, illetve $\hat{\mathbf{L}}$ vektorok által kijelölt tengely körüli $-\kappa_i$, illetve $-\tau_i$ szögű forgatások szorzataként, ahol $\tau_i = \cos^{-1}(\hat{\mathbf{c}}\cdot\hat{\mathbf{b}}_{\mathbf{i}})$. A 2. ábráról látható, hogy fennáll a következő reláció: $\tau_i + \psi_i = \pi/2$. A $\mathcal{K}$ rendszerben vezető rendben érvényesek a következő kifejezések (felhasználva $\dot{\psi} = L/\mu r^2$ kifejezést):

$$\begin{aligned}
\mathbf{n} = \begin{pmatrix}\cos\psi\\ \sin\psi\\ 0\end{pmatrix} \quad &, \quad \mathbf{r}\cdot\hat{\mathbf{S}}_{\mathbf{i}} = r\sin\kappa_i\cos(\psi-\psi_i) \ , \\
\hat{\mathbf{L}}\cdot(\mathbf{r}\times\hat{\mathbf{S}}_{\mathbf{i}}) &= -r\sin\kappa_i\sin(\psi-\psi_i) \ , \\
\mathbf{v} &= \dot{r}\mathbf{n} + \frac{L}{\mu r}\begin{pmatrix}-\sin\psi\\ \cos\psi\\ 0\end{pmatrix} \ , \\
\mathbf{v}\cdot\hat{\mathbf{S}}_{\mathbf{i}} &= \dot{r}\sin\kappa_i\cos(\psi-\psi_i) - \frac{L}{\mu r}\sin\kappa_i\sin(\psi-\psi_i) \ , \\
\mathbf{d_i} &= d_i\begin{pmatrix}\rho_i\sin\psi_i + \sigma_i\cos\psi_i\\ \sigma_i\sin\psi_i - \rho_i\cos\psi_i\\ \cos\alpha_i\cos\kappa_i - \sin\alpha_i\sin\beta_i\sin\kappa_i\end{pmatrix} \ ,
\end{aligned} \tag{22}$$

$$\rho_i = \sin\alpha_i\cos\beta_i \ , \qquad \sigma_i = \sin\alpha_i\sin\beta_i\cos\kappa_i + \cos\alpha_i\sin\kappa_i \ . \tag{23}$$

A pálya impulzusmomentum nagyságának időfejlődésére kapjuk

$$\dot{L} = -\frac{3G\mu m^3}{2r^3}\sum_{i=1}^{2} p_i \sin^2\kappa_i \sin 2(\chi+\psi_0-\psi_i) \ + \frac{3d_1d_2}{2r^3}\mathcal{B}_2'(\chi) \ , \qquad (24)$$

ahol

$$\mathcal{B}_k(\chi) = (\sigma_1\sigma_2 - \rho_1\rho_2)\cos(k\chi+\delta) - (\rho_1\sigma_2 + \rho_2\sigma_1)\sin(k\chi+\delta) \ , \qquad (25)$$

és $\mathcal{B}_k'(\chi)$ a $\mathcal{B}_k(\chi)$ -nek a χ szerinti deriváltja. A $\chi = \psi - \psi_0 \epsilon [0, 2\pi]$ az általánosított valódi anomália paraméter, amely newtoni határesete egybeesik a Kepler-i valódi anomáliával. A $\delta = \delta_1 + \delta_2$, ahol $\delta_i = (\psi_0 - \psi_i)$. A pálya impulzusmomentum nagysága nem konstans, mint ahogyan a PN, 2PN, SO effektusoknál tapasztalható. Ez a probléma azonban áthidalható egy megfelelően definiált átlaggal $\bar{L}$ -el. A radiális egyenlet megoldásához szükség van a pálya impulzusmomentum nagyságára $L(\chi)$, amely a következőképpen írható:

$$L(\chi) = L_0 + \int_0^{\chi} \dot{L}\frac{dt}{d\chi'}d\chi' \ , \qquad (26)$$

ahol $L_0 = L(0)$ és a χ -re vezető rendben érvényes:

$$\frac{dt}{d\chi} = \frac{\mu r^2}{\bar{L}} \ , \qquad (27)$$

ahol $\bar{L}$ a pálya impulzusmomentum nagyságának szögátlagát jelöli és az integrálást elvégezve adódik:

$$\begin{aligned} L(\chi) &= L_0 + \frac{G\mu^3 m^3}{4\bar{L}^3}\sum_{i=1}^{2} p_i \sin^2\kappa_i H \\ &\quad -\frac{\mu^2 d_1 d_2}{2\bar{L}^3}\big\{(3Gm\mu + 4\bar{A})\mathcal{B}_0 \\ &\quad -(3Gm\mu + 4\bar{A}\cos\chi)\mathcal{B}_2(\chi) + \bar{A}\sin\chi\mathcal{B}_2'(\chi)\big\} \ , \qquad (28) \\ H &= 3Gm\mu\left[\cos 2(\chi+\psi_0-\psi_i) - \cos 2(\psi_0-\psi_i)\right] \\ &\quad +4\bar{A}\left[\cos\chi\cos 2(\chi+\psi_0-\psi_i) - \cos 2(\psi_0-\psi_i)\right] \\ &\quad +2\bar{A}\sin\chi\sin 2(\chi+\psi_0-\psi_i) \ , \qquad (29) \end{aligned}$$

ahol $\bar{A}$ az E és $\bar{L}$ által jellemzett Kepler mozgáshoz tartozó Laplace-Runge-Lenz vektor nagysága:

$$\bar{A} = \left(G^2m^2\mu^2 + \frac{2E\bar{L}^2}{\mu}\right)^{1/2} \ . \qquad (30)$$

Látható, hogy $L(0) = L(2\pi) = L_0$. A pálya impulzusmomentum nagysága a kvadrupol-monopol és dipól-dipól kölcsönhatások miatt periodikusan változik.

Innen $\bar{L}$ a pálya impulzusmomentum szögátlaga:

$$\begin{aligned}
\bar{L} &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} L(\chi)d\chi = L_0 - \frac{3G\mu^3 m^3(3Gm\mu + 4\bar{A})}{4\bar{L}^3} \\
&\times \sum_{i=1}^{2} p_i \sin^2\kappa_i \cos 2(\psi_0 - \psi_i) \ , \\
&-\frac{\mu^2 d_1 d_2}{2\bar{L}^3}(3Gm\mu + 4\bar{A})\mathcal{B}_0 \ . \qquad (31)
\end{aligned}$$

így a (28) és (31) -ből

$$\begin{aligned}
L(\chi) &= \bar{L} + \frac{G\mu^3 m^3}{4\bar{L}^3}\sum_{i=1}^{2} p_i \sin^2\kappa_i \{2\bar{A}\cos(\chi + 2\delta_i) \\
&+ \left(3G\mu m + 2\bar{A}\cos\chi\right)\cos 2(\chi + \delta_i)\} \\
&+ \frac{\mu^2 d_1 d_2}{2\bar{L}^3}\left[(3Gm\mu + 4\bar{A}\cos\chi)\mathcal{B}_2(\chi) - \bar{A}\sin\chi\mathcal{B}_2'(\chi)\right] \ . \qquad (32)
\end{aligned}$$

A teljes energia kvadrupol-monopol ($E_{QM}(r,\chi)$) és dipól-dipól ($E_{DD}(r,\chi)$) kölcsönhatásokból származó része:

$$\begin{aligned}
E_{QM}(r,\chi) &= \frac{G\mu m^3}{2r^3}\sum_{i=1}^{2} p_i \left[1 - 3\sin^2\kappa_i \cos^2(\chi + \delta_i)\right] \ , \qquad (33) \\
E_{DD}(r,\chi) &= \frac{d_1 d_2}{2r^3}\left[\mathcal{A}_0 - 3\mathcal{B}_2(\chi)\right] \ , \qquad (34)
\end{aligned}$$

ahol

$$\mathcal{A}_0 = 2\cos\lambda + 3(\rho_1\sigma_2 - \rho_2\sigma_1)\sin\Delta\psi - 3(\rho_1\rho_2 + \sigma_1\sigma_2)\cos\Delta\psi \ . \qquad (35)$$

A λ szög a dipólmomentumok által bezárt szög, a $\Delta\psi = \psi_2 - \psi_1$.

Így a(15) és (16) összefüggések:

$$\begin{aligned}
v^2 &= \frac{2[E - E_{QM}(r,\chi) - E_{DD}(r,\chi)]}{\mu} + \frac{2Gm}{r} \ , \qquad (36) \\
\dot{r}^2 &= \frac{2[E - E_{QM}(r,\chi) - E_{DD}(r,\chi)]}{\mu} + \frac{2Gm}{r} - \frac{L(\chi)^2}{\mu^2 r^2} \qquad (37)
\end{aligned}$$

alakban írhatók.ahol $L(\chi)$ -t , $E_{QM}(r,\chi)$ -t és $E_{DD}(r,\chi)$ -t a (32) , (33) és (34) egyenletek adják. A χ paraméter csak a második poszt-newtoni tagokban jelenik meg.

3 A valódi és excentrikus anomália paraméterezések

Először az általánosított valódi anomália paraméterezéssel foglalkozunk $r = r(\chi)$. A radiális mozgás forduló pontjainak definíciója:

$$
\begin{aligned}
r_{min} &= r(0) \ , \qquad \dot{r}^2(0) = 0 \ , \\
r_{max} &= r(\pi) \ , \qquad \dot{r}^2(\pi) = 0 \ .
\end{aligned} \tag{38}
$$

A forduló pontokban a pálya impulzusmomentum nagysága $L(0) = \bar{L} + \delta L_-$ és $L(\pi) = \bar{L} + \delta L_+$. A $\delta L_\pm = \delta(L_{QM\pm} + L_{DD\pm}) = \delta L_{QM\pm} + \delta L_{DD\pm}$, ahol

$$
\delta L_{QM\pm} = \frac{G\mu^3 m^3}{4\bar{L}^3}(3Gm\mu \mp 4\bar{A}) \sum_{i=1}^{2} p_i \sin^2\kappa_i \cos 2\delta_i \ , \tag{39}
$$

$$
\delta L_{DD\pm} = \frac{\mu^2 d_1 d_2}{2\bar{L}^3}\left[(3Gm\mu + 4\bar{A})(\sigma_1\sigma_2 - \rho_1\rho_2)\right] \tag{40}
$$

A forduló pontokban megoldva a radiális egyenletet:

$$
\begin{aligned}
r_{\substack{max\\min}} &= \frac{Gm\mu \pm \bar{A}}{-2E} + \frac{G\mu^2 m^3}{4\bar{A}\bar{L}^2}\sum_{i=1}^{2} p_i \rho^i_\mp \\
&\quad + \frac{\mu d_1 d_2}{2\bar{A}\bar{L}^2}\left\{(\bar{A} \mp Gm\mu)\mathcal{A}_0 + \bar{A}\mathcal{B}_0\right\} , \\
\rho^i_\mp &= \alpha^i_0(\bar{A} \mp Gm\mu) + \beta^i_0(4\bar{A} \mp 3Gm\mu) \ , \\
\alpha^i_0 &= 2\left[1 - 3\sin^2\kappa_i \cos^2(\psi_0 - \psi_i)\right] \ , \\
\beta^i_0 &= \sin^2\kappa_i \cos 2(\psi_0 - \psi_i) \ ,
\end{aligned} \tag{41}
$$

ahol a $\frac{Gm\mu \pm \bar{A}}{-2E} = \frac{\bar{L}^2}{\mu(Gm\mu \mp \bar{A})}$ a Kepler mozgás forduló pontjai.

A χ általánosított valódi anomália paraméter definíciója

$$
\frac{2}{r} = \left(\frac{1}{r_{min}} + \frac{1}{r_{max}}\right) + \left(\frac{1}{r_{min}} - \frac{1}{r_{max}}\right)\cos\chi \ , \tag{42}
$$

amelyből kapható

$$
\begin{aligned}
r &= \frac{\bar{L}^2}{\mu(Gm\mu + \bar{A}\cos\chi)} + \frac{G\mu^2 m^3}{4\bar{A}\bar{L}^2(Gm\mu + \bar{A}\cos\chi)^2}\sum_{i=1}^{2} p_i\Lambda^i \\
&\quad + \frac{\mu d_1 d_2 \Lambda}{2\bar{A}\bar{L}^2(Gm\mu + \bar{A}\cos\chi)^2} \ ,
\end{aligned} \tag{43}
$$

ahol

$$
\begin{aligned}
\Lambda^i &= \bar{A}[\bar{A}^2(\alpha_0^i+4\beta_0^i)+(Gm\mu)^2(3\alpha_0^i+10\beta_0^i)] \\
&+ Gm\mu[\bar{A}^2(3\alpha_0^i+11\beta_0^i)+(Gm\mu)^2(\alpha_0^i+3\beta_0^i)]\cos\chi \ , \\
\Lambda &= \bar{A}\left[(3G^2m^2\mu^2+\bar{A}^2)\mathcal{A}_0+(G^2m^2\mu^2+\bar{A}^2)\mathcal{B}_0\right] \\
&\quad +Gm\mu\left[(G^2m^2\mu^2+3\bar{A}^2)\mathcal{A}_0+2\bar{A}^2\mathcal{B}_0\right]\cos\chi \ . \qquad (44)
\end{aligned}
$$

T a radiális mozgás periódusa könnyen számolható az általánosított excentrikus anomália paraméterezéssel, ennek definíciója:

$$
2r=(r_{max}+r_{min})-(r_{max}-r_{min})\cos\xi \ , \qquad (45)
$$

ebből a χ paraméterezésnél elvégzett hasonló számolással kapható

$$
\begin{aligned}
r &= \frac{Gm\mu-\bar{A}\cos\xi}{-2E}+\frac{G\mu^2m^3}{4\bar{A}\bar{L}^2}\sum_{i=1}^{2}p_i\Xi^i \\
&\quad +\frac{\mu d_1 d_2}{2\bar{A}\bar{L}^2}\left\{\bar{A}\left(\mathcal{A}_0+\mathcal{B}_0\right)+Gm\mu\mathcal{A}_0\cos\xi\right\} \ , \qquad (46)
\end{aligned}
$$

ahol

$$
\Xi^i=\bar{A}(\alpha_0^i+4\beta_0^i)+Gm\mu(\alpha_0^i+3\beta_0^i)\cos\xi \ . \qquad (47)
$$

Megjegyzés, hogy $\rho^i_\mp$, Λ^i és Ξ^i kifejezései ugyanolyan alakúak, mint a spin-spin kölcsönhatás vizsgálatánál a $\rho^i_\mp$, Λ^i , Ξ^i, csak a bennük szereplő α_0^i és β_0^i különbözik α_0 , β_0 -tól ([19]).

A két fajta paraméterezéssel lehetőség nyílik az időátlag számolására is. Tekintve például a valódi anomália paraméterezést (46) , egy $f(\chi)$ függvény időátlaga:

$$
\langle f\rangle=\frac{1}{T}\int_0^{2\pi}f(\chi)\frac{dt}{d\chi}d\chi \ . \qquad (48)
$$

A $dt/d\chi=(1/\dot{r})(dr/d\chi)$ kifejezés első faktorát (37) egyenlet Taylor sorából kapjuk, második faktort pedig a (42) χ szerinti deriválásával:

$$
\frac{dr}{d\chi}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r_{min}}-\frac{1}{r_{max}}\right)r^2\sin\chi \ . \qquad (49)
$$

Bevezetve egy komplex paramétert $z=\exp(i\chi)$ az integrál (48) könnyen számolható a reziduum tétel segítségével. A számolásokhoz még felhasználható, hogy vezető rendben érvényes:

$$
\dot{r}=\frac{\bar{A}}{\bar{L}}\sin\chi \ , \qquad (50)
$$

ami (42)-ből levezethető.

A periódus idő meghatározására a ξ paraméterezést használva írhatjuk:

$$T = \int_0^{2\pi} \frac{dt}{d\xi} d\xi = \int_0^{2\pi} \frac{1}{\dot{r}} \frac{dr}{d\xi}\, d\xi \ , \tag{51}$$

amiben $1/\dot{r}$ -ot most is (37) Taylor sorából vesszük, $dr/d\xi$ -t pedig (45) ξ szerinti deriváltjából fejezzük ki. Innen közvetlen integrálással, vagy a reziduum tétel felhasználásával a periódus idő meghatározható:

$$T = 2\pi G m \left(\frac{\mu}{-2E}\right)^{3/2} \ . \tag{52}$$

Érdekes, hogy a periódus idő alakilag megegyezik a Kepler mozgást jellemző periódus idővel, persze a képletben szereplő energia a perturbált rendszerre jellemző. A két paraméterezés alkalmas L időátlagának meghatározására. A χ paraméterezést választva írhatjuk:

$$\langle L \rangle = \frac{1}{T} \int_0^{T} L(\chi) dt = \frac{1}{T} \int_0^{2\pi} L(\chi) \frac{dt}{d\chi} d\chi \ . \tag{53}$$

Az előbb említett eljárást alkalmazva a reziduum tétel felhasználásával az eredmény:

$$\begin{aligned} \langle L \rangle &= \bar{L} + \frac{G m^3 \mu^2 F_1}{4\bar{A}^2 \bar{L}^3 F_2} \sum_{i=1}^{2} p_i \sin^2\kappa_i \cos 2\delta_i \\ &\quad + \frac{d_1 d_2 \mathcal{B}_0}{2\mu \bar{A}^2 \bar{L}^3} \left[G m \mu^4 (2G^2 m^2 \mu^2 - 3\bar{A}^2) - 2\,(-2\mu E)^{3/2}\, \bar{L}^3 \right], \end{aligned} \tag{54}$$

ahol

$$\begin{aligned} F_1 &= 2\bar{L}(-2\mu E)^{1/2}[\bar{A}^6 - 15G^2 m^2 \mu^2 \bar{A}^4 + 32 G^4 m^4 \mu^4 \bar{A}^2 - 16 G^6 m^6 \mu^6] \\ &\quad + G m \mu^2 [-11\bar{A}^6 + 58 G^2 m^2 \mu^2 \bar{A}^4 - 80 G^4 m^4 \mu^4 \bar{A}^2 + 32 G^6 m^6 \mu^6] \\ F_2 &= 4 G m \bar{L} (-2\mu E)^{1/2} [\bar{A}^2 - 2G^2 m^2 \mu^2] \\ &\quad + \bar{A}^4 - 8 G^2 m^2 \mu^2 \bar{A}^2 + 8 G^4 m^4 \mu^4 \ . \end{aligned} \tag{55}$$

4 SUGÁRZÁSI VISSZAHATÁS

4.0.1 Energia veszteség

Az energia pillanatnyi veszteségének vezető rendjeit az Einstein kvadrupol formula adja:

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{G}{5c^5} I^{(3)jl} I^{(3)jl} \ ,$$

ahol a kerek zárójelbe tett számok időderiváltat jelentenek, I^{jl} a rendszer tömeg kvadrupol momentuma, melynek vezető rendje:

$$I_N^{jl} = \mu \left(x^j x^l\right)^{STF} \quad , \tag{56}$$

ahol$\left(x^j x^l\right)^{STF}$ jelentése:

$$I_N^{jl} = \mu x^j x^l \ , \tag{57}$$

ha j nem egyenlő l -el és $j = l$ esetén pedig:

$$I_N^{jj} = \mu x^j x^j - \frac{1}{3}\sum_{j=1}^{3} \mu x^j x^j \ , \tag{58}$$

A newtoni, a kvadrupol-monopol és dipól-dipól kölcsönhatások hozzájárulása az energia veszteséghez:

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{G}{5c^5} I_N^{(3)jl}(\mathbf{a}_N) I_N^{(3)kl}(\mathbf{a}_N) - \frac{2G}{5c^5} I_N^{(3)jl}(\mathbf{a}_{QM}) I_N^{(3)kl}(\mathbf{a}_N) \ . \tag{59}$$

Az argumentumokba írt gyorsulások arra utalnak, hogy a számolás elvégzésekor **r** második deriváltja helyébe mi írható. A v^2 -et és $\dot{r}^2$ -et (36) , (37) adja, $L(\chi)$ -t , $E_{QM}(r,\chi)$ -t és $E_{DD}(r,\chi)$ -t pedig (32) , (33) , (34). Ezek felhasználásával:

$$\begin{aligned}
\frac{dE}{dt} &= \left(\frac{dE}{dt}\right)_N + \left(\frac{dE}{dt}\right)_{QM} + \left(\frac{dE}{dt}\right)_{DD} \ , && (60)\\
\left(\frac{dE}{dt}\right)_N &= -\frac{8G^3m^2}{15c^5r^6}(2\mu E r^2 + 2Gm\mu^2 r + 11\bar{L}^2) \ , && (61)\\
\left(\frac{dE}{dt}\right)_{QM} &= \frac{2G^3m^4}{15c^5\bar{L}^2r^8}\sum_{i=1}^{2} p_i \\
&\quad \times \left\{\sum_{n=1}^{3} a_n \cos[n\chi + 2\delta_i]\sin^2\kappa_i + a_4(2 - 3\sin^2\kappa_i)\right\} \ , && (62)\\
\left(\frac{dE}{dt}\right)_{DD} &= \frac{4G^2md_1d_2}{15c^5\mu\bar{L}^2r^8}\left\{\sum_{k=1}^{3} a_k\mathcal{B}_k(\chi) + a_4\mathcal{A}_0\right\} \ , && (63)
\end{aligned}$$

ahol a_k :

$$\begin{aligned}
a_1 &= 3\mu\bar{A}r(-22Gm\mu^2r + 17\bar{L}^2) \ , \\
a_2 &= 6(-11G^2m^2\mu^4r^2 + 6E\bar{L}^2\mu r^2 + 5Gm\mu^2\bar{L}^2r - 51\bar{L}^4) \ , \\
a_3 &= -\mu\bar{A}r(22Gm\mu^2r + 51\bar{L}^2) \ , \\
a_4 &= 2\bar{L}^2(-6E\mu r^2 - 5Gm\mu^2r + 39\bar{L}^2) \ . && (64)
\end{aligned}$$

Az energia veszteség átlagolásánál a valódi anomália paramétert használjuk. Bevezetünk egy komplex paramétert $z = \exp(i\chi)$ és felhasználjuk a reziduum tételt (megjegyzés: pólus csak az origóban van) és kapjuk az enegia veszteség időátlagára:

$$\begin{aligned}
\left\langle \frac{dE}{dt} \right\rangle &= \left\langle \frac{dE}{dt} \right\rangle_N + \left\langle \frac{dE}{dt} \right\rangle_{QM} + \left\langle \frac{dE}{dt} \right\rangle_{DD} \ , && (65)\\
\left\langle \frac{dE}{dt} \right\rangle_N &= -\frac{G^2 m(-2E\mu)^{3/2}}{15c^5\bar{L}^7} \\
&\quad \times (148E^2\bar{L}^4 + 732G^2m^2\mu^3E\bar{L}^2 + 425G^4m^4\mu^6) \ , && (66)\\
\left\langle \frac{dE}{dt} \right\rangle_{QM} &= \frac{G^2\mu m^3(-2E\mu)^{3/2}}{30c^5\bar{L}^{11}} \\
&\quad \times \sum_{i=1}^{2} p_i[C_1 \sin^2\kappa_i \cos 2\delta_1 + C_2(2 - 3\sin^2\kappa_i)] \ , && (67)\\
\left\langle \frac{dE}{dt} \right\rangle_{DD} &= \frac{G^2 d_1 d_2(-2E\mu)^{3/2}}{15c^5\bar{L}^{11}} (C_1\mathcal{B}_0 + C_2\mathcal{A}_0) \ , && (68)
\end{aligned}$$

ahol C_k :

$$\begin{aligned}
C_1 &= -\mu\bar{A}^2(948E^2\bar{L}^4 + 8936G^2E\bar{L}^2m^2\mu^3 + 8335G^4m^4\mu^6) \ , \\
C_2 &= 708E^3\bar{L}^6 + 10020G^2E^2\bar{L}^4m^2\mu^3 + 18865G^4E\bar{L}^2m^4\mu^6 \\
&\quad +8316G^6m^6\mu^9 \ . && (69)
\end{aligned}$$

4.0.2 Változás a pálya impulzusmomentum nagyságában

Az L pálya impulzusmomentum nagysága számolható a következőképpen [19]:

$$\frac{dL}{dt} = \hat{\mathbf{L}} \cdot \frac{d\mathbf{J}}{dt} - \hat{\mathbf{L}} \cdot \frac{d\mathbf{S_1}}{dt} - \hat{\mathbf{L}} \cdot \frac{d\mathbf{S_2}}{dt} \ .$$

Szükség van a tengelyszimetrikus testek spinjei sugárzási veszteségének időátlagára. A Burke-Thorne potenciál felhasználásával [18]:

$$\frac{1}{S_i}\frac{d\,(\mathbf{S_i})_\mu}{dt} = \frac{2G}{5c^5\Omega_i}\left(\frac{\Theta_i}{\Theta_i'} - 1\right)\epsilon_{\mu\nu\rho} I_N^{(5)\nu\sigma}(\hat{\mathbf{S}}_\mathbf{i})_\rho(\hat{\mathbf{S}}_\mathbf{i})_\sigma \ , \tag{70}$$

és mivel $\mathbf{S_i}$ precessziós mozgást végez adódik $d\mathbf{S_i}/dt = S_i d\hat{\mathbf{S}}_\mathbf{i}/dt$. Követve [20]-t kapjuk:

$$\left\langle \frac{d\mathbf{S_i}}{dt} \right\rangle = 0 \ . \tag{71}$$

Tehát a pálya impulzusmomentum nagysága számolható:

$$\frac{dL}{dt} \simeq \hat{\mathbf{L}} \cdot \frac{d\mathbf{J}}{dt} \ . \tag{72}$$

$\mathbf{J}$ sugárzási vesztesége vezető rendben:

$$\frac{d\mathbf{J}^i}{dt} = -\frac{2G}{5c^5}\epsilon^{ijk} I^{(2)jl} I^{(3)kl} \ , \tag{73}$$

ahol ϵ^{ijk} az antiszimmetrikus Levi-Civita szimbolum. A newtoni, a kvadrupol-monopol és dipól-dipól kölcsönhatások hozzájárulása a teljes impulzusmomentum veszteséghez:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{J}^i}{dt} &= -\frac{2G}{5c^5}\epsilon^{ijk} I_N^{(2)jl}(\mathbf{a}_N) I_N^{(3)kl}(\mathbf{a}_N) \\ &\quad -\frac{2G}{5c^5}\epsilon^{ijk}\left[I_N^{(2)jl}(\mathbf{a}_N) I_N^{(3)kl}(\mathbf{a}_{QM}) + I_N^{(2)jl}(\mathbf{a}_{QM}) I_N^{(3)kl}(\mathbf{a}_N)\right] \ . \end{aligned} \tag{74}$$

Vezető rendben: $\hat{\mathbf{L}} = (0, 0, 1)$, így a következő pillanatnyi veszteségek adódnak:

$$\hat{\mathbf{L}} \cdot \frac{d\mathbf{J}}{dt} = \left(\hat{\mathbf{L}} \cdot \frac{d\mathbf{J}}{dt}\right)_N + \left(\hat{\mathbf{L}} \cdot \frac{d\mathbf{J}}{dt}\right)_{QM} + \left(\hat{\mathbf{L}} \cdot \frac{d\mathbf{J}}{dt}\right)_{DD} \ , \tag{75}$$

$$\left(\hat{\mathbf{L}} \cdot \frac{d\mathbf{J}}{dt}\right)_N = \frac{8G^2 m \bar{L}}{5c^5 \mu r^5}\left(2\mu E r^2 - 3\bar{L}^2\right) \ , \tag{76}$$

$$\begin{aligned} \left(\hat{\mathbf{L}} \cdot \frac{d\mathbf{J}}{dt}\right)_{QM} &= \frac{2G^2 m^3}{5c^5 \mu \bar{L} r^7}\sum_{i=1}^{2} p_i \\ &\quad \times \left\{\sum_{n=1}^{3} b_n \cos[n\chi + 2\delta_i]\sin^2\kappa_i + b_4(2 - 3\sin^2\kappa_i)\right\} \ , \end{aligned} \tag{77}$$

$$\left(\hat{\mathbf{L}} \cdot \frac{d\mathbf{J}}{dt}\right)_{DD} = \frac{4G d_1 d_2}{5c^5 \mu^2 \bar{L}^3 r^7}\left\{\sum_{k=1}^{3} b_k \mathcal{B}_k(\chi) + b_4 \mathcal{A}_0\right\} \ , \tag{78}$$

ahol b_k :

$$\begin{aligned} b_1 &= 3\mu \bar{A} r (2GEm\mu^3 r^3 - E\bar{L}^2 \mu r^2 - 9G\bar{L}^2 m \mu^2 r + 8\bar{L}^4) \ , \\ b_2 &= 3(2G^2 E m^2 \mu^5 r^4 + 22E\bar{L}^4 \mu r^2 - 9G^2 \bar{L}^2 m^2 \mu^4 r^2 + 10G\bar{L}^4 m \mu^2 r - 19\bar{L}^6) \ , \\ b_3 &= \mu \bar{A} r (2GEm\mu^3 r^3 + 3E\bar{L}^2 \mu r^2 - 9G\bar{L}^2 m \mu^2 r - 24\bar{L}^4) \ , \\ b_4 &= \bar{L}^4(-18E\mu r^2 - 8Gm\mu^2 r + 15\bar{L}^2) \ . \end{aligned} \tag{79}$$

Az átlagolásnál hasonló eljárást alkalmazva, mint az energia veszteségnél számolható, hogy:

$$\left\langle \frac{dL}{dt} \right\rangle = \left\langle \frac{dL}{dt} \right\rangle_N + \left\langle \frac{dL}{dt} \right\rangle_{QM} + \left\langle \frac{dL}{dt} \right\rangle_{DD} , \tag{80}$$

$$\left\langle \frac{dL}{dt} \right\rangle_N = -\frac{4G^2m(-2\mu E)^{3/2}}{5c^5\bar{L}^4}(14E\bar{L}^2 + 15G^2m^2\mu^3) , \tag{81}$$

$$\left\langle \frac{dL}{dt} \right\rangle_{QM} = \frac{G^2m^3\mu(-2\mu E)^{3/2}}{10c^5\bar{L}^8} \times \sum_{i=1}^{2} p_i[D_1 \sin^2\kappa_i \cos 2\delta_i + D_2(2 - 3\sin^2\kappa_i)] , \tag{82}$$

$$\left\langle \frac{dL}{dt} \right\rangle_{DD} = \frac{G^2d_1d_2(-2E\mu)^{3/2}}{5c^5\bar{L}^8}[D_1\mathcal{B}_0 + D_2\mathcal{A}_0] , \tag{83}$$

ahol D_k :

$$D_1 = -6\mu\bar{A}^2(31E\bar{L}^2 + 90G^2m^2\mu^3) ,$$
$$D_2 = 252E^2\bar{L}^4 + 1200G^2E\bar{L}^2m^2\mu^3 + 805G^4m^4\mu^6 . \tag{84}$$

4.0.3 Szögek változása

A szögek időfejlődésének meghatározásához vegyük az ő definíciójukat: $\kappa_i = \cos^{-1}(\mathbf{\hat{S}_i} \cdot \mathbf{\hat{L}}),\ (i = 1,2)$, $\gamma = \cos^{-1}(\mathbf{\hat{S}_1} \cdot \mathbf{\hat{S}_2})$, és deriváljuk ezeket időszerint.

A két spinvektor által bezárt szög γ változására kapjuk:

$$\frac{d}{dt}\cos\gamma = \frac{d}{dt}\left(\mathbf{\hat{S}_1} \cdot \mathbf{\hat{S}_2}\right) = \mathbf{\hat{S}_1}\cdot\frac{d\mathbf{\hat{S}_2}}{dt} + \mathbf{\hat{S}_2}\cdot\frac{d\mathbf{\hat{S}_1}}{dt} .$$

A jobb oldalon álló kifejezés spin-orbit járulékai a [18] -ban vannak számolva, a spin-spin kölcsönhatás pedig, mint az látható [20] -ben nem ad újabb járulékot. A kvadrupol-monopol és dipól-dipól kölcsönhatások esetében (71) -ből következik:

$$\frac{d}{dt}\cos\gamma \simeq 0 . \tag{85}$$

A κ_i szögek esetében a helyzet bonyolultabb. Definíciójukból következik,hogy:

$$\frac{d}{dt}\cos\kappa_i = \frac{d}{dt}\left(\mathbf{\hat{S}_i}\cdot\frac{\mathbf{L}}{L(\chi)}\right) = \frac{1}{L(\chi)}\left[\mathbf{\hat{S}_i}\cdot\frac{d(\mathbf{J} - \mathbf{S_1} - \mathbf{S_2})}{dt} - \frac{dL}{dt}\cos\kappa_i + \mathbf{L}\cdot\frac{d\mathbf{\hat{S}_i}}{dt}\right] . \tag{86}$$

A megkövetelt pontosság miatt minden poszt-newtoni tagban végrehajtható a $L(\chi) \to \bar{L}$ csere. A pálya impulzusmomentum nagyságának időfejlődése:

$$\frac{dL}{dt} = \mathbf{\hat{L}}\cdot\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{\hat{L}}\cdot\frac{d\mathbf{J}}{dt} - \mathbf{\hat{L}}\cdot\frac{d\mathbf{S_1}}{dt} - \mathbf{\hat{L}}\cdot\frac{d\mathbf{S_2}}{dt} . \tag{87}$$

Beírva ezeket (86) egyenletbe, és figyelembe véve, hogy $\mathbf{\hat{S}_i} \cdot d\mathbf{S_i}/dt = 0$ kapom:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\cos\kappa_i &= \frac{1}{L(\chi)}(\mathbf{\hat{S}_i} - \mathbf{\hat{L}}\cos\kappa_i)\cdot\frac{d\mathbf{J}}{dt} \\ &+\frac{1}{\bar{L}}\left[-\mathbf{\hat{S}_i}\cdot\frac{d\mathbf{S_j}}{dt} + \mathbf{\hat{L}}\cdot\left(\frac{d\mathbf{S_1}}{dt} + \frac{d\mathbf{S_2}}{dt}\right)\cos\kappa_i + \mathbf{L}\cdot\frac{d\mathbf{\hat{S}_i}}{dt}\right] , \quad (88)\end{aligned}$$

ahol $j \neq i$. A (71) -ből azonnal látszik, hogy a κ_i szögek változásának átlagolásakor a szögletes zárójelben lévő kifejezés eltünik. Mivel célunk a periódus alatti átlag változás meghatározása, így a szögletes zárójelben lévő kifejezést nem kell figyelembe venni a továbbiakban.

A (88) egyenlet első tagjának kiértékelésére szükséges a teljes impulzusmomentum veszteség $d\mathbf{J}/dt$ struktúrája [16] :

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{J}}{dt} &= \left(\frac{d\mathbf{J}}{dt}\right)_N + \left(\frac{d\mathbf{J}}{dt}\right)_{pn} + \left(\frac{d\mathbf{J}}{dt}\right)_{2pn} + \left(\frac{d\mathbf{J}}{dt}\right)_{so} \\ &+ \left(\frac{d\mathbf{J}}{dt}\right)_{ss} + \left(\frac{d\mathbf{J}}{dt}\right)_{QM} + \left(\frac{d\mathbf{J}}{dt}\right)_{DD} + \left(\frac{d\mathbf{J}}{dt}\right)_{usz\acute{a}ly} . \quad (89)\end{aligned}$$

A vezető rendű járulékot régebben kiszámolta Peters [7], a pn járulékot Junker és Schäfer [12], az so járulékot Kidder [16], és a $2pn$ járulékot Gopakumar és Iyer [11] $\mathbf{r}, \mathbf{v}, \mathbf{S_i}$ és $\dot{r}$ függvényeként. Az uszály vezető rendbeli járuléka 3/2 poszt-newtoni rendnél jelenik meg és időbeli átlagát Rieth és Schäfer [17] adta meg Fourier soros alakban:

N , pn , $2pn$ járulékok leírhatók a következőképpen:

$$\left(\frac{d\mathbf{J}}{dt}\right)_{N,\ pn,\ 2pn} = \Gamma_{0,\ 1,\ 2} \cdot \mathbf{L}_N \quad (90)$$

ahol a $\Gamma_{0,\ 1,\ 2}$ együtthatók kiolvashatók [16] -ben (3.28.a,b)-ból és [11] -ben (3.9.d)-ből. Hasonló alakban kifejezhető az uszály időbeli átlaga, amelyet [17] -ben (84) adja:

$$\left\langle\frac{d\mathbf{J}}{dt}\right\rangle_{usz\acute{a}ly} = \Gamma_{usz\acute{a}ly} \cdot \mathbf{L}_N \ . \quad (91)$$

A pálya impulzusmomentum kifejezése:

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}_N + \mathbf{L}_{PN} + \mathbf{L}_{2PN} + \mathbf{L}_{SO} = (1 + \gamma_1 + \gamma_2)\mathbf{L}_N + \mathbf{L}_{SO} \ . \quad (92)$$

Ebből meghatározható a pálya impulzusmomentum:

$$\mathbf{L}_N = (1 - \gamma_1 - \gamma_2 + \gamma_1^2)\mathbf{L} - \mathbf{L}_{SO} \ . \quad (93)$$

A $\gamma_{1,\ 2}$ együtthatók felismerhetők [16] -ben (2.9.b,d)-ből. Második poszt-newtoni rendig írhatjuk:

$$\left(\frac{d\mathbf{J}}{dt}\right)_{N+\ pn\ +\ 2pn} = (\Gamma_0 + \eta_1 + \eta_2)\mathbf{L} - \Gamma_0 \cdot \mathbf{L}_{SO} \quad (94)$$

és

$$\left\langle \frac{d\mathbf{J}}{dt} \right\rangle_{uszály} = \Gamma_{uszály} \cdot \mathbf{L} \ , \tag{95}$$

ahol a (94) -ben szereplő $\eta_{1,2}$ együtthatók kifejezhetők $\Gamma_{0,\ 1,\ 2}$ és $\gamma_{1,\ 2}$ -vel:

$$\begin{aligned} \eta_1 &= \Gamma_1 - \Gamma_0\gamma_1 \\ \eta_2 &= \Gamma_2 - \Gamma_1\gamma_1 - \Gamma_0(\gamma_2 - \gamma_1^2) \ . \end{aligned} \tag{96}$$

Összevetve (88) , (89) , (94) egyenleteket és felhasználva

$$(\hat{\mathbf{S}}_\mathbf{i} - \hat{\mathbf{L}}\cos\kappa_i) \cdot \mathbf{L} = 0 \tag{97}$$

azonosságot, kapjuk:

$$\begin{aligned} \frac{1}{L(\chi)}(\hat{\mathbf{S}}_\mathbf{i} - \hat{\mathbf{L}}\cos\kappa_i) \cdot \left(\frac{d\mathbf{J}}{dt}\right) &= \frac{1}{\bar{L}}(\hat{\mathbf{S}}_\mathbf{i} - \hat{\mathbf{L}}\cos\kappa_i) \\ &\quad \times \Big\{ \left(\frac{d\mathbf{J}}{dt}\right)_{uszály} + \left(\frac{d\mathbf{J}}{dt}\right)_{so} \\ &\quad - \Gamma_0 \mathbf{L}_{SO} + \left(\frac{d\mathbf{J}}{dt}\right)_{ss} + \left(\frac{d\mathbf{J}}{dt}\right)_{QM} \\ &\quad + \left(\frac{d\mathbf{J}}{dt}\right)_{DD} \Big\}. \end{aligned} \tag{98}$$

Az uszály átlagolásnál (95) és (97) miatt eltűnik.

A (98) egyenlet második és harmadik tagja spin-pálya, a negyedik tag pedig spin-spin jellegű járulék a κ_i szögek sugárzási veszteségéhez. A spin-pálya korrekciókat [18] (4.4) adja, a spin-spint [20] (4.1), (4.2) és (4.3).

Végsősoron a kvadrupol-monopol kölcsönhatás járulékára $-\ \frac{d}{dt}\cos\kappa_i$ -ben:

$$\left(\frac{d}{dt}\cos\kappa_i\right)_{QM} \simeq \frac{1}{\bar{L}}(\hat{\mathbf{S}}_\mathbf{i} - \hat{\mathbf{L}}\cos\kappa_i) \cdot \left(\frac{d\mathbf{J}}{dt}\right)_{QM} \tag{99}$$

adódik, és ugyanilyen kifejezés a dipól-dipól járulékra:

$$\left(\frac{d}{dt}\cos\kappa_i\right)_{DD} \simeq \frac{1}{\bar{L}}(\hat{\mathbf{S}}_\mathbf{i} - \hat{\mathbf{L}}\cos\kappa_i) \cdot \left(\frac{d\mathbf{J}}{dt}\right)_{DD} \tag{100}$$

Ez a kifejezés paraméteres alakban (χ-vel megadva) a következőképpen fest:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\bar{L}}(\hat{\mathbf{S}}_{\mathbf{i}} - \hat{\mathbf{L}}\cos\kappa_i)\cdot\left(\frac{d\mathbf{J}}{dt}\right)_{QM} &= \frac{3G^2m^3}{10c^5\mu\bar{L}^2r^7}\sin\kappa_i\sum_{j=1}^{2}p_j\sin 2\kappa_j \\
&\times\Big\{\sum_{n=1}^{3}u_n\cos\left(n\chi+\delta_i+\delta_j\right) \\
&+u_4\sin\chi\sin\left(\delta_i-\delta_j\right) \\
&+u_5\cos\left(\delta_i-\delta_j\right)\Big\}\ , \qquad (101) \\
\frac{1}{\bar{L}}(\hat{\mathbf{S}}_{\mathbf{i}} - \hat{\mathbf{L}}\cos\kappa_i)\cdot\left(\frac{d\mathbf{J}}{dt}\right)_{DD} &= \frac{3Gd_1d_2}{5c^5\mu^2\bar{L}^2r^7}\sin\kappa_i \\
&\times\sum_{j=1}^{2}\Big\{\mu_{3-j|z}\sum_{n=1}^{3}u_n[B_j\sin(n\chi+\delta_i+\delta_j) \\
&-C_j\cos(n\chi+\delta_i+\delta_j)] \\
&-u_4\sin\chi\,[B_j\cos(\delta_j-\delta_i)+C_j\sin(\delta_j-\delta_i)] \\
&-u_5[B_j\sin(\delta_j-\delta_i) \\
&-C_j\cos(\delta_j-\delta_i)]\Big\}\ , \qquad (102)
\end{aligned}
$$

ahol $\mu_{3-j|z}$ a mágneses dipólmomentum vektor z komponense, u_i együtthatók pedig:

$$
\begin{aligned}
u_1 &= -u_3 = \mu\bar{A}r(2\mu Er^2 - 3\bar{L}^2)\ , \\
u_2 &= 2\bar{L}^2(Gm\mu^2r + 3\bar{L}^2)\ , \\
u_4 &= 2\mu\bar{A}r(2\mu Er^2 - 5\bar{L}^2)\ , \\
u_5 &= 2\bar{L}^2(4\mu Er^2 + Gm\mu^2r - 5\bar{L}^2)\ . \qquad (103)
\end{aligned}
$$

A reziduum tétel segítségével az átlagolás elvégezhető:

$$\left\langle \frac{d\gamma}{dt} \right\rangle = 0 \tag{104}$$

$$\left\langle \frac{d\kappa_i}{dt} \right\rangle = \left\langle \frac{d\kappa_i}{dt} \right\rangle_{SO} + \left\langle \frac{d\kappa_i}{dt} \right\rangle_{SS-self} + \left\langle \frac{d\kappa_i}{dt} \right\rangle_{SS} + \left\langle \frac{d\kappa_i}{dt} \right\rangle_{QM} \tag{105}$$

$$\left\langle \frac{d\kappa_i}{dt} \right\rangle_{SO} \quad [18]-ban\ (4.4)\ adja, \tag{106}$$

$$\left\langle \frac{d\kappa_i}{dt} \right\rangle_{SS-self} \quad [20]-ban\ (4.7)\ adja, \tag{107}$$

$$\left\langle \frac{d\kappa_i}{dt} \right\rangle_{S_1S_2} \quad [20]-ban\ (4.8)\ adja, \tag{108}$$

$$\left\langle \frac{d\kappa_i}{dt} \right\rangle_{QM} = \frac{3G^2m^3\mu(-2\mu E)^{3/2}}{10c^5\bar{L}^9}\sum_{j=1}^{2} p_j \sin 2\kappa_j \times \left[V_1 \cos(\delta_i+\delta_j) + V_2 \cos(\delta_i-\delta_j)\right] , \tag{109}$$

$$\left\langle \frac{d\kappa_i}{dt} \right\rangle_{DD} = \frac{3Gd_1d_2(-2E\mu)^{3/2}}{5c^5\bar{L}^9} \times \sum_{j=1}^{2} \mu_{3-j|z}\left\{V_1\left[\sigma_j \cos(\delta_i+\delta_j) - \rho_j \sin(\delta_i+\delta_j)\right] + V_2\left[\sigma_j \cos(\delta_i-\delta_j) + \rho_j \sin(\delta_i-\delta_j)\right]\right\} , \tag{110}$$

ahol a V_{1-2} együtthatók:

$$\begin{aligned} V_1 &= 40E^2\bar{L}^4 + 90G^2m^2\mu^3E\bar{L}^2 + 35G^4m^4\mu^6 \\ V_2 &= 48E^2\bar{L}^4 + 140G^2m^2\mu^3E\bar{L}^2 + 70G^4m^4\mu^6 \ . \end{aligned} \tag{111}$$

A (104)-(109) *egyenletek adják a szögek evolúciójának teljes leírását második poszt-newtoni rendig.*

5 ÖSSZEFOGLALÓ

Fő eredményként meghatároztuk a második poszt-newtoni rendű kvadrupol-monopol és dipól-dipól járulékokat a gravitációs sugárzási visszahatásokban. Kiszámoltuk a pályaelemek egyrészével ekvivalens energia és a pálya impulzus-momentum nagyságának veszteségeit, valamint a saját-perdületek és a pálya-impulzusmomentum relatív irányait jellemző szögek változását. A veszteségek elsőrendű zárt differenciálegyenlet-rendszert alkotnak, mely numerikus fejlesztésre alkalmas. Általánosítottuk a valódi és excentrikus anomália paraméterezéseket a perturbált mozgások radiális részének leírására, a szekuláris kifejezéseket pedig a reziduum tétellel számoltuk, saját készítésű REDUCE analitikus programok felhasználásával.

Az energiaveszteség (65)-(68), pálya impulzus momentum nagyságának vesztesége (80)-(83), kiegészítve a megfelelő spin-pálya kifejezésekkel [18] -ból (a következő helyettesítésekel: $L \to \bar{L}$ and $A_0 \to \bar{A}$), spin-spin kifejezésekkel [19] -ból és poszt-newtoni kifejezésekkel [11] -ból, megadja a teljes sugárzási visszahatást a második poszt-newtoni rendig.

A κ_i és γ szögek időfejlődéséhez az összes járulék fel van sorolva a IV. rész utolsó alfejezetében.

Végül összehasonlítjuk az energiaveszteségre vonatkozó eredményeket a Poisson által számolttal [21] , ami körpályákra vonatkozik. A körpálya határesetet véve a [21] -ban egy perturbációját kapom a Kepler féle körpályának. A körpálya feltételeket lehetetlen alkalmazni a nem perturbált pályára $E_N = E - E_{QM} = -Gm\mu/2r_0$ és $L_N^2 = L^2(\chi) = (\bar{L} + \delta L)^2 = Gm\mu^2 r_0$ (r_0 a nem perturbált pályának a sugara), mert E_{QM} és δL nem állandók míg E , $\bar{L}$ és r_0 azok. Ez arra a megjegyzésre késztet minket, hogy a pályák nem lehetnek szigorúan kör alakúak. Hanem a körpálya feltételeket átlagos értelemben kell használni. Felhasználva még, hogy δL szögátlaga eltünik:

$$\begin{aligned} \bar{E}_N &= E - \bar{E}_{QM} = -Gm\mu/2r_0 \quad , \\ L_N^2 &= \bar{L}^2 = Gm\mu^2 r_0 \quad . \end{aligned} \tag{112}$$

Ezeket az értékeket behelyettesítve E_{QM} szögátlagába (ami már második PN rendű) kapjuk, hogy:

$$E_{QM} = \frac{Gm^3\mu}{4r_0^3} \sum_{i=1}^{2} p_i(3\cos^2\kappa_i - 1) \quad . \tag{113}$$

Kifejezve E és $\bar{L}$ -t (112) -ből, (113) -ből és behelyettesítve őket (65) - (67) -ig megkapjuk a sugárzási energiaveszteséget a fenti módon értelmezett körpályára vonatkozóan.

$$\left\langle \frac{dE}{dt} \right\rangle = -\frac{32G^4m^3\mu^2}{5c^5r_0^5} \left[1 - 6\frac{m^2}{r_0^6} \sum_{i=1}^{2} p_i(3\cos^2\kappa_i - 1) \right] \quad . \tag{114}$$

Kihasználva a perturbálattlan körpálya r_0 sugara és a perturbált pálya $\langle v \rangle$ átlag sebessége közötti összefüggést adódik:

$$r_0 = \frac{Gm}{\langle v \rangle^2} \left[1 - \frac{\langle v \rangle^4}{G^2} \sum_{i=1}^{2} p_i(3\cos^2\kappa_i - 1) \right] \quad , \tag{115}$$

és azt találtuk, hogy a körpályán számolt átlagos energiaveszteség megegyezik a [21] -beli (22) összefüggéssel.

A dipól-dipól kölcsönhatás vizsgálata körpálya határesetben folyamatban van.

6 Függelék: A SPINPRECESSZIÓS EGYENLET LEVEZETÉSE

A kettős kompakt rendszer komponenseit tengelyszimmetrikus merev testekként kezeljük, így a kvadrupol-monopol kölcsönhatás által perturbált rendszer Lagrange függvénye [21], [24] a következő alakba írható:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= \mathcal{L}_N + \mathcal{L}_{QM} \ , \\
\mathcal{L}_N &= \frac{\mu \dot{r}^2}{2} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2} \Theta_i' \mathbf{\Omega_i^2} + \frac{G\mu m}{r} \ , \\
\mathcal{L}_{QM} &= \frac{G\mu m^3}{2r^5}\sum_{i=1}^{2} p_i \left[3\left(\mathbf{\hat{S}_i}\cdot\mathbf{r}\right)^2 - r^2\right] \ ,
\end{aligned} \tag{116}$$

Ezután felírjuk gömbi polár koordinátákban a Lagrange függvényt. Ehhez szükséges néhány kifejezés:

$$\mathbf{\hat{S}_i} = (\sin\kappa_i\cos\psi_i, \sin\kappa_i\sin\psi_i \ , \cos\kappa_i), \tag{117}$$

$$\mathbf{r} = r(\cos\psi, \sin\psi, 0), \tag{118}$$

$$\mathbf{r\hat{S}_i} = r\sin\kappa_i\cos(\psi - \psi_i), \tag{119}$$

$$\mathbf{\dot{r}}^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\psi}^2, \tag{120}$$

Kell még $\mathbf{\Omega_i}$ Euler szögekkel való kifejezése. $\mathbf{\Omega_i}$ felbontható három tengely körüli forgatásra. Ez a felbontás a tengelyek lerögzítése esetén sem egyértelmű. A dolgozat végén található 3. , 4. és 5. ábráról leolvasható: $\mathbf{\Omega_i} = \dot{\alpha}_i\mathbf{\hat{z}} + \dot{\beta}_i\mathbf{\hat{x}_2} + \dot{\gamma}_i\mathbf{\hat{z}_3}$. $\mathbf{\Omega_i}$ -t ezek után felírjuk az $\mathbf{\hat{x}}_3$, $\mathbf{\hat{y}}_3$, $\mathbf{\hat{z}}_3$ bázisban, felhasználva, hogy: $\mathbf{\hat{z}} = \cos\beta_i\mathbf{\hat{z}}_3 + \sin\beta_i\mathbf{\hat{y}}_2$, $\mathbf{\hat{y}}_2 = \cos\gamma_i\mathbf{\hat{y}}_3 + \sin\beta_i\mathbf{\hat{x}}_3$, $\mathbf{\hat{x}}_2 = \cos\gamma_i\mathbf{\hat{x}}_3 - \sin\gamma_i\mathbf{\hat{y}}_3$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{\Omega_i} = \ &(\ \dot{\beta}_i\cos\gamma_i + \dot{\alpha}_i\sin\beta_i\sin\gamma_i \ , \\
&-\dot{\beta}_i\sin\gamma_i + \dot{\alpha}_i\sin\beta_i\cos\gamma_i \ , \ \dot{\alpha}_i\cos\beta_i + \dot{\gamma}_i \ ) \ .
\end{aligned} \tag{121}$$

Az $\mathbf{\hat{x}}_2 = \mathbf{\hat{x}}_1 = \cos\alpha_i\mathbf{\hat{x}} + \sin\alpha_i\mathbf{\hat{y}}$, $\mathbf{\hat{z}}_3 = \cos\beta_i\mathbf{\hat{z}} - \sin\beta_i\mathbf{\hat{y}}_1$, $\mathbf{\hat{y}}_1 = \cos\alpha_i\mathbf{\hat{y}} - \sin\alpha_i\mathbf{\hat{x}}$ kifejezésekkel pedig $\mathbf{\Omega_i}$ felírható az $\mathbf{\hat{x}}, \mathbf{\hat{y}}, \mathbf{\hat{z}}$ bázisban:

$$\begin{aligned}
\mathbf{\Omega_i} = \ &(\ \dot{\beta}_i\cos\alpha_i + \dot{\gamma}_i\sin\beta_i\sin\alpha_i \ , \\
&\dot{\beta}_i\sin\alpha_i - \dot{\gamma}_i\sin\beta_i\cos\alpha_i \ , \ \dot{\gamma}_i\cos\beta_i + \dot{\alpha}_i \ ) \ .
\end{aligned} \tag{122}$$

A jelöléseink szerint $\alpha_i = \psi_i - \pi/2$, $\beta_i = -\kappa_i$, $\gamma_i = -\delta_i$ így:

$$\begin{aligned}
\mathbf{\Omega}_i = \ &(- \ \dot{\kappa}_i\sin\psi_i - \dot{\delta}_i\sin\kappa_i\cos\psi_i \ , \\
&\dot{\kappa}_i\cos\psi_i \ - \dot{\delta}_i\sin\kappa_i\sin\psi_i \ , \ - \dot{\delta}_i\cos\kappa_i + \dot{\psi}_i \ ) \ ,
\end{aligned} \tag{123}$$

A ψ_i változóra felírjuk az Euler-Lagrange egyenletet és kapjuk:

$$\Theta_i' \left(\mathbf{\Omega_i} \cdot \hat{\mathbf{z}}\right) = \frac{3G\mu m^3}{2r^3} p_i \sin^2 \kappa_i \sin 2(\psi - \psi_i) \ , \tag{124}$$

A jobboldalt átalakíthatjuk más alakba, felhasználva, hogy: $\sin^2 \kappa_i \sin 2(\psi - \psi_i)$ $= 2 \sin \kappa_i \cos(\psi - \psi_i) \sin \kappa_i (\sin \psi \cos \psi_i - \cos \psi \sin \psi_i) = -2 \left(\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{S}}_\mathbf{i}\right) (\hat{\mathbf{r}} \times \hat{\mathbf{S}}_\mathbf{i}) \cdot$ $\hat{\mathbf{z}}$. Így a spinprecessziós egyenlet $\hat{\mathbf{z}}$ komponenséhez jutottunk. A másik két komponens a κ_i változóra felírt Euler-Lagrange egyenletetből vezethető le. Az Euler-Lagrange egyenlet a κ_i -re:

$$\begin{aligned}
\Theta_i' \dot{\mathbf{\Omega}}_\mathbf{i} \cdot (-\sin \psi_i \ , \cos \psi_i \ , 0\ ) &= \Theta_i' \mathbf{\Omega_i} \cdot (\ \dot{\psi}_i \cos \psi_i - \dot{\delta}_i \cos \kappa_i \cos \psi_i \\
&\quad , \ \dot{\psi}_i \sin \psi \ - \dot{\delta}_i \cos \kappa_i \sin \psi_i \ , \ \dot{\delta}_i \sin \kappa_i \ ) \\
&\quad + \frac{3G\mu m^3}{2r^3} p_i \sin 2\kappa_i \cos^2(\psi - \psi_i) \ .
\end{aligned} \tag{125}$$

A jobboldal első tagja egy azonosság:

$$\begin{aligned}
& \Theta_i' \mathbf{\Omega_i} \cdot (\ \dot{\psi}_i \cos \psi_i - \dot{\delta}_i \cos \kappa_i \cos \psi_i \ , \ \dot{\psi}_i \sin \psi \ - \dot{\delta}_i \cos \kappa_i \sin \psi_i \ , \ \dot{\delta}_i \sin \kappa_i \ ) \\
= \ & \Theta_i' \mathbf{\Omega_i} \cdot \ [(\mathbf{\Omega_i} \cdot \hat{\mathbf{z}}) \cos \psi_i \ , \ (\mathbf{\Omega_i} \cdot \hat{\mathbf{z}}) \sin \psi_i \ , - (\mathbf{\Omega_i} \cdot \hat{\mathbf{x}}) \cos \psi_i - (\mathbf{\Omega_i} \cdot \hat{\mathbf{y}}) \sin \psi_i] \\
= \ & -\Theta_i' \mathbf{\Omega_i} \cdot \{\mathbf{\Omega_i} \times [\hat{\mathbf{z}} \times (\cos \psi_i, \sin \psi_i, 0)]\} = 0 \ .
\end{aligned} \tag{126}$$

A (125)-at trigonometriai azonosságokat felhasználva tovább alakítjuk:

$$\begin{aligned}
-\Theta_i' \left(\dot{\mathbf{\Omega}}_\mathbf{i} \cdot \hat{\mathbf{x}}\right) \sin \psi_i + \Theta_i' \left(\dot{\mathbf{\Omega}}_\mathbf{i} \cdot \hat{\mathbf{y}}\right) \cos \psi_i &= \frac{3G\mu m^3}{r^3} p_i \sin \kappa_i \cos(\psi - \psi_i) \\
&\quad \times \cos \kappa_i \ (\cos \psi \cos \psi_i \\
&\quad + \sin \psi \sin \psi_i) \ .
\end{aligned} \tag{127}$$

Felhasználjuk (119)-et, majd $\cos \psi_i$ és $\sin \psi_i$ együtthatóit egyenlővé téve az alábbi két kifejezéshez jutunk:

$$\Theta_i' \left(\dot{\mathbf{\Omega}}_\mathbf{i} \cdot \hat{\mathbf{x}}\right) = -\frac{3G\mu m^3}{r^3} p_i \left(\mathbf{r} \cdot \hat{\mathbf{S}}_\mathbf{i}\right) \cos \kappa_i \sin \psi \ , \tag{128}$$

$$\Theta_i' \left(\dot{\mathbf{\Omega}}_\mathbf{i} \cdot \hat{\mathbf{y}}\right) = \frac{3G\mu m^3}{r^3} p_i \left(\mathbf{r} \cdot \hat{\mathbf{S}}_\mathbf{i}\right) \cos \kappa_i \cos \psi \ . \tag{129}$$

Tekintsük az $\hat{\mathbf{r}} \times \hat{\mathbf{S}}_\mathbf{i}$ gömbi koordinátákban adott kifejezését:

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbf{r}} \times \hat{\mathbf{S}}_\mathbf{i} &= (\sin \psi \cos \kappa_i \ , - \ \cos \psi \cos \kappa_i \ , \\
&\quad \cos \psi \sin \kappa_i \sin \psi_i - \sin \psi \sin \kappa_i \cos \psi_i \ ) \ ,
\end{aligned} \tag{130}$$

amelyből leolvasható, hogy $\cos \kappa_i \sin \psi = \left(\hat{\mathbf{r}} \times \hat{\mathbf{S}}_\mathbf{i}\right) \cdot \hat{\mathbf{x}}$ és $\cos \kappa_i \cos \psi = \left(\hat{\mathbf{r}} \times \hat{\mathbf{S}}_\mathbf{i}\right) \cdot$ $\hat{\mathbf{y}}$. Így megkaptuk a spinprecessziós egyenlet $\hat{\mathbf{x}}$ és $\hat{\mathbf{y}}$ komponensét. Az eredményeink egy vektori egyenletbe foglalhatók. A (128), (129), (124) és (130) kifejezésekből adódik a spinprecessziós egyenlet:

$$\dot{\mathbf{S}}_{\mathbf{i}} = -\frac{3G\mu m^3}{r^5} p_i \left(\hat{\mathbf{S}}_{\mathbf{i}} \cdot \mathbf{r}\right) \left(\mathbf{r} \times \hat{\mathbf{S}}_{\mathbf{i}}\right) \ . \tag{131}$$

References

[1] A. Abramovici et al., Science **256**, 325 (1992).

[2] C. Bradaschia et al., Nucl. Instrum. Methods A **289** , 518 (1990).

[3] J. Hough, in *Proceedings of the Sixth Marcell Grossmann Meeting*, edited by H. Sato and T. Nakamura (World Scientific, Singapore, 1992), p. 192.

[4] K. Kuroda et al., in *Proceedings of International Conference on Gravitational Waves: Sources and Detectors*, eds. I. Ciufolini and F. Fidecaro (World Scientific, Singapore, 1997), p. 100.

[5] P. Bender, I. Ciufolini, K. Danzmann, W. M. Folkner, J. Hough, D. Robertson, A. Rüdiger, M. C. W. Sandford, R. Schilling, B. F. Schutz, R. Stebbins, T. Sumner, P. Touboul, S. Vitale, H. Ward, and W. Winkler: *LISA: Pre-Phase A Report (MPQ 208)* (Max-Planck Institut für Quantenoptik, Garching, Germany, 1996).

[6] B. F. Schutz, to be published in *Proceedings of the 1997 Alpbach Summer School on Fundamental Physics in Space,* edited by A. Wilson, gr-qc/9710079.

[7] P.C.Peters, Phys. Rev. **136**, B1224 (1964).

[8] G. D. Quinlan and S. L. Shapiro, Astrophys. J., Lett. Ed. **321**, 199 (1987)

[9] D. Hills and P. L. Bender, Astrophys. J., Lett. Ed. **445**, L7 (1995).

[10] K. Martel and E. Poisson, *Gravitational waves from eccentric compact binaries: Reduction in signal-to-noise ratio due to nonoptimal signal processing, gr-qc/9907006*

K. Martel, *Detection of Gravitational Waves from Eccentric Compact Binaries*, gr-qc/9908043.

[11] A. Gopakumar and B. R. Iyer, Phys. Rev D**56**, 7708 (1997).

[12] W.Junker and G.Schäfer, Mon. Not. R. Astron. Soc. **254** , 146 (1992).

[13] B. M. Barker and R. F. O'Connell, Phys. Rev D**12**, 329 (1975). Comparison is immediate by changing their notations M, $\mathbf{n}^{(\mathbf{i})}$, $J_2^{(i)}$, $I^{(i)}$, $\Delta I^{(i)}$, $\omega^{(i)}$ to m, $\hat{\mathbf{S}}_{\mathbf{i}}, -m^2 p_i$, Θ_i', $-Q_i$, Ω_i respectively.

[14] T.A.Apostolatos, C.Cutler, G.J.Sussman and K.S.Thorne, Phys. Rev D**49**, 6274 (1994).

[15] L. Kidder, C. Will, and A. Wiseman, Phys. Rev D**47**, 4183 (1993).

[16] L. Kidder, Phys. Rev D**52**, 821 (1995).

[17] R. Rieth and G. Schäfer, Class. Quantum Grav. **14**, 2357 (1997).

[18] L. Á. Gergely, Z. Perjés, and M. Vasúth, Phys. Rev D**58**, 124001 (1998).

[19] L.Á. Gergely, Phys. Rev D**61**, 024035 (2000).

[20] L.Á. Gergely, Phys. Rev D**62**, 024007 (2000).

[21] E. Poisson, Phys. Rev D**57**, 5287 (1998).

[22] K. Ioka, K. Taniguchi, Astrophys. J. **537** , 327 (2000).

[23] L. Á. Gergely, Z. Perjés, and M. Vasúth, Astrophys. J. Suppl. **126**, 79 (2000).

[24] H. Goldstein, *Classical Mechanics,* 2nd ed. (Addison-Wesley, Reading, MA, 1980), Chap. 5.

[25] H. Tagoshi, A. Ohashi, and B. J. Owen, Phys. Rev D**63**, 044006 (2001).

[26] L. Á. Gergely, Z. Perjés, and M. Vasúth, Phys. Rev D**57**, 3423 (1998).