

# SZAKDOLGOZAT

Kivés Miklós

2014

**Szegedi Tudományegyetem**  
**Természettudományi és Informatikai Kar**  
**Elméleti Fizikai Tanszék**  
**Kísérleti Fizikai Tanszék**

Szakdolgozat

Galaktikus Bose-Einstein kondenzátum sötét anyag halók  
stabilitása

Kivés Miklós

Fizika BSc szakos hallgató

Témavezető: Dr. Keresztes Zoltán

Szeged  
2014

# Tartalmi összefoglaló

Dolgozatomban a Bose-Einstein-kondenzátumot (BEC) vizsgáltam, mint lehetséges sötét anyag jelöltet. A dolgozat főként a [1] és [2] irodalmakra támaszkodik.

A 2. fejezetben a Bose-Einstein-kondenzátum fizikai alapjainak ismertetése után a Gross-Pitaevskii egyenletet származtatom. Ennek megoldására a Madelung hidrodinamikai reprezentációt használom, majd a Thomas-Fermi közelítést alkalmazva származtatom a stacioner, gömbszimmetrikus Bose-Einstein-kondenzátum sűrűségeloszlását. A 3.4 fejezet tartalmazza az önálló eredményeket. E fejezetben a kondenzátum időbeli stabilitását vizsgálom a modell paramétereinek függvényében. Az alkalmazott numerikus módszerek ismertetését a függelék tartalmazza.

# Tartalomjegyzék

<b>1. Bevezetés</b>	<b>3</b>
<b>2. A Bose-Einstein kondenzátum</b>	<b>4</b>
2.1. Átlagtér közelítés . . . . .	6
2.2. A Madelung hidrodinamikai egyenletek . . . . .	7
2.3. A Thomas-Fermi közelítés . . . . .	9
2.4. A Bose-Einstein kondenzátum sötét anyag haló . . . . .	10
<b>3. A Bose-Einstein kondenzátum sötét anyag halók stabilitása</b>	<b>11</b>
3.1. Az energia sztatikus esetben . . . . .	12
3.2. A stabilitás vizsgálata . . . . .	14
3.3. A mennyiségek átskálázása numerikus számításokhoz . . . . .	15
3.4. BEC haló stabilitás numerikus vizsgálata . . . . .	16
<b>4. Összefoglalás</b>	<b>23</b>
<b>5. Függelék</b>	<b>25</b>
5.1. A Crank-Nicolson-féle véges differenciák módszere . . . . .	25
5.2. Egyenesek módszere . . . . .	27
5.3. Tridiagonális egyenletrendszer megoldása . . . . .	28
5.3.1. A Woodbury-Sherman-Morrison formula . . . . .	29
5.4. A Numerov-módszer . . . . .	31
5.5. Integrálás Simpson módszerrel . . . . .	33

# 1. fejezet

## Bevezetés

A Planck-űrszonda mérései alapján az Univerzum összetételének 5%-a látható (barionikus) anyag, közel 27%-a sötét anyag és valamivel több mint 68%-a sötét energia [3]. A sötét anyag legvalószínűbb összetevői nyomással nem rendelkező, hideg, a többi anyagkomponenssel csak gravitációsan (esetleg gyengén) kölcsönható részecskék.

A jelenlegi modellek szerint a magon és a korongon kívül egy gömbszimmetrikus, sötét anyagból álló haló is körülveszi a galaxist, és tömegének meghatározó része ebben található. Néhány galaxis esetén a haló tömegeloszlása nem lehet gömbszimmetrikus, hanem inkább ellapult. A spirálgalaxisok vizsgálata rámutatott arra, hogy a  $\Lambda$ CDM modell nem alkalmazható kielégítően galaktikus méretű objektumok esetén, ugyanis a haló számított és megfigyelt tömegeloszlása különbözik. A tömegsűrűség ugyanis a  $\Lambda$ CDM modell szerint a mag központi részében kiugrást mutat [4]. Ezt az eloszlást a szerzők N-test szimuláció segítségével határozták meg. A Navarro-Frenk-White profil  $1/r$  szerint változik a centrumhoz közeli térrészben. A megfigyelt forgás görbék alapján azonban a törpe és LSB galaxisok esetén a sötét anyag eloszlása sokkal ellapultabb, azaz a tömegsűrűség a központi részen közel állandó [5], attól távolodva pedig lassan csökken.

A dolgozatban a sötét anyagot Bose-Einstein kondenzátum formájában feltételezem. A kritikus hőmérséklet alatt a bozonok ugyanabban a kvantum állapotban találhatók és összefüggő anyaghullámot alkotnak, amelyet Bose-Einstein kondenzátumnak nevezünk.

## 2. fejezet

# A Bose-Einstein kondenzátum

Termikus egyensúlyban egy  $V = L^3$  térfogatban lévő nem-kölcsönható bozon gáz a Bose-Einstein-eloszlást követi:

$$f = \frac{1}{\exp\left[\frac{\varepsilon - \mu}{k_B T}\right] - 1}, \quad (2.1)$$

ahol  $\varepsilon = \frac{p^2}{2m}$  a bozonok energiája,  $p$  az impulzusa,  $m$  a tömege,  $\mu$  a kémiai potenciál,  $k_B$  a Boltzmann-állandó és  $T$  a hőmérséklet. A  $\mathbf{p}$  hármas impulzus a  $\mathbf{q}$  csak egész értékű komponensekkel rendelkező vektor segítségével a következő alakba írható fel:  $\mathbf{p} = 2\pi\hbar\frac{\mathbf{q}}{L}$ , ahol  $\hbar$  a redukált Planck-állandó. A legalacsonyabb energiájú állapotban  $p = 0$ . A kondenzátlan bozonok száma  $T$  hőmérsékleten:

$$N_T = \sum_{p \neq 0} \frac{1}{\exp\left[\frac{\frac{p^2}{2m} - \mu}{k_B T}\right] - 1}. \quad (2.2)$$

Ha az energiaszintek egymást elég sűrűn követik, valamint az energia jóval nagyobb, mint a legelső gerjesztett állapot energiája:

$$k_B T \gg \frac{2\pi^2 \hbar^2}{mV^{2/3}}, \quad (2.3)$$

akkor az impulzusra való összegzés átírható integrállá, azaz  $\sum_{\mathbf{p}} \rightarrow V \int d\mathbf{p} \frac{1}{(2\pi\hbar)^3}$ ,

ahol  $(2\pi\hbar)^3$  az elemi fáziscella térfogata, így

$$N_T = \frac{V}{\lambda_T^3} g_{3/2} \left[ \exp\left(\frac{\mu}{k_B T}\right) \right], \quad (2.4)$$

ahol

$$\lambda_T = \hbar \sqrt{\frac{2\pi}{mk_B T}} \quad (2.5)$$

a termikus de Broglie hullámhossz és

$$g_{3/2}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty dx \frac{\sqrt{x}}{\frac{e^x}{z} - 1} \quad (2.6)$$

egy speciális Bose függvény, amiben  $z = \exp\left(\frac{\mu}{k_B T}\right)$  és  $x = \frac{p^2}{2mk_B T}$ . A legalacsonyabb energiájú állapotban, ahol  $n_0$  számú részecske tartózkodik, a kémiai potenciál

$$\mu = -k_B T \ln\left(1 + \frac{1}{n_0}\right) \approx -\frac{k_B T}{n_0}. \quad (2.7)$$

Termodinamikai határesetben, ha  $n_0, N, V \rightarrow \infty$ ,  $n = \frac{N}{V}$ ,  $\frac{n_0}{V} \rightarrow$  állandó:

$$\frac{n_0}{V} = 1 - \left(\frac{T}{T_c}\right)^{3/2} \quad (T \leq T_c). \quad (2.8)$$

A kritikus hőmérséklet:

$$T_c = \frac{2\pi\hbar^2}{mk_B} \left(\frac{n}{g_{3/2}(0)}\right)^{2/3}, \quad (2.9)$$

ahol  $g_{3/2}(0) = 2,612$ . A kritikus hőmérsékleten, amely általában alacsony, kezdenek a bozonok a legalacsonyabb állapotba kondenzálódni.

A termodinamikai határeset nem érhető el véges számú részecske esetén, ezért a kritikus hőmérséklet korrekcióra szorul. Ennek egyik lehetőségét a [6] cikk mutatja meg, melyben a szerzők  $N = 1000$  részecske esetén 7%-kal alacsonyabb kritikus hőmérsékletet állapítanak meg. A részecskék számának növekedésével a különbség egyre kisebbé válik. További példa a korrekcióra a [7] cikk, melyben harmonikus oszcillátort vizsgálnak a szerzők, és az izotróp és anizotróp eset között valamivel több, mint 1% eltérést számítanak ki.

A kritikus hőmérséklet alatt a bozonok közötti  $l = \sqrt[3]{V/N} = n^{-1/3}$  átlagos távolság és a de Broglie hullámhossz között a következő összefüggés kapható (2.5) és (2.9)-ből:

$$l < \frac{\lambda_T}{\zeta^{1/3}} \approx 0,73\lambda_T, \quad (2.10)$$

ahol  $\zeta$  a Riemann-féle zéta-függvény. A bozonokat kvantummechanikai hullámcsomagokként tekintve a kondenzáció akkor kezd kialakulni, amikor a de Broglie hullámhosszuk átfedésbe kerül.

Valós Bose gázban két részecske egymással való kölcsönhatásuk eredményeképpen molekulákat alkothat, így a gáz a Bose-Einstein kondenzációnál stabilabb állapotba kerülhet. Híg gázt feltételezve ez az eset elkerülhető, így a BEC kialakulhat a kritikus hőmérséklet alatt. A gáz akkor tekinthető hígnek, amennyiben a bozonok közötti karakterisztikus  $l_{int}$  kölcsönhatási távolság jelentősen kisebb, mint a bozonok közötti  $l$  átlagos távolság, azaz  $l_{int}^3 n \ll 1$ . Híg gázban a bozonok két-részecske kölcsönhatása a meghatározó. A BEC kialakulhat híg, nem-ideális Bose gázban is, azonban a kondenzáció mértéke és a kritikus hőmérséklet az ideális esethez képest módosul.

## 2.1. Átlagtér közelítés

Kölcsönható bozonok esetén, melyek  $V_{ext}$  külső potenciálban helyezkednek el, a Hamilton operátor:

$$\hat{H} = \int d\mathbf{r}' \hat{\Psi}^+(\mathbf{r}') \left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta' + V_{ext}(\mathbf{r}') \right] \hat{\Psi}(\mathbf{r}') + \frac{1}{2} \int d\mathbf{r}' d\mathbf{r}'' \hat{\Psi}^+(\mathbf{r}') \hat{\Psi}^+(\mathbf{r}'') V_{self}(\mathbf{r}' - \mathbf{r}'') \hat{\Psi}(\mathbf{r}') \hat{\Psi}(\mathbf{r}'') . \quad (2.11)$$

A kalappal jelölt operátorok a Schrödinger képből értendők. A  $\hat{\Psi}(\mathbf{r}')$  és  $\hat{\Psi}^+(\mathbf{r}')$  bozon mező operátorok, amelyek keltetnek és eltüntetnek egy részecskét az  $\mathbf{r}'$  helyen.  $\Delta'$  a 3-dimenziós Laplace operátor az  $\mathbf{r}'$  koordinátákban. A taszító jellegű, két részecske kölcsönhatási potenciál a következő:

$$V_{self} = \lambda \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') , \quad (2.12)$$

ahol a  $\lambda = \frac{4\pi\hbar^2 a}{m}$  állandó a kölcsönhatás erősségét paraméterezi, és  $a$  a szóráshossz.

A  $\hat{\Psi}(\mathbf{r})$  mező operátor megadható az egyrészecske  $\hat{a}_\alpha$  eltüntető operátor segítségével:

$$\hat{\Psi}(\mathbf{r}) = \sum_{\alpha} \Psi_{\alpha}(\mathbf{r}) \hat{a}_{\alpha} , \quad (2.13)$$

ahol  $\Psi_{\alpha}$  egy részecske  $|\alpha\rangle$  állapotának hullámfüggvénye. Ha a részecskék számát valamilyen állapotban  $n_{\alpha}$ -val jelöljük, akkor  $n_{\alpha} = \hat{a}_{\alpha}^+ \hat{a}_{\alpha}$ .

A Hamilton operátor nem függ az időtől, ezért a Heisenberg képbeli  $\hat{\Psi}(\mathbf{r}, t)$  az alábbiak szerint fejezhető ki:

$$\hat{\Psi}(\mathbf{r}, t) = \exp\left[\frac{i\hat{H}t}{\hbar}\right] \hat{\Psi}(\mathbf{r}) \exp\left[-\frac{i\hat{H}t}{\hbar}\right] = \sum_{\alpha} \Psi_{\alpha}(\mathbf{r}) \exp\left[\frac{i\hat{H}t}{\hbar}\right] \hat{a}_{\alpha} \exp\left[-\frac{i\hat{H}t}{\hbar}\right] .$$

Bevezetve az  $\hat{a}_{\alpha}(t) = \exp\left[\frac{i\hat{H}t}{\hbar}\right] \hat{a}_{\alpha} \exp\left[-\frac{i\hat{H}t}{\hbar}\right]$  jelölést, ezt így is írhatjuk:

$$\hat{\Psi}(\mathbf{r}, t) = \sum_{\alpha} \Psi_{\alpha}(\mathbf{r}) \hat{a}_{\alpha}(t) . \quad (2.14)$$

Az átlagtér közelítés segítségével a bozon mező operátort szétválaszthatjuk két részre:

$$\hat{\Psi}(\mathbf{r}, t) = \Psi_0(\mathbf{r}) \hat{a}_0(t) + \hat{\Psi}'(\mathbf{r}, t) , \quad (2.15)$$

ahol a 0 index jelöli az alapállapotot és  $\hat{\Psi}'(\mathbf{r}, t)$  a gerjesztett állapotot. A Bose-Einstein kondenzátum akkor alakul ki, amikor az alapállapotban lévő részecskék  $n_0(t)$  száma nagyon nagyvá válik, ekkor  $n_0(t) \approx n_0(t) + 1$ , illetve  $\hat{a}_0(t) \approx \hat{a}_0^+(t) \approx \sqrt{n_0(t)}$ . A Bose-Einstein kondenzátum járuléka várható értékét az alábbi hullámfüggvényel adhatjuk meg:

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \sqrt{n_0(t)} \Psi_0(\mathbf{r}) . \quad (2.16)$$



A gerjesztett állapotban lévő bozonok járuléka kicsi, ezért  $\hat{\Psi}'(\mathbf{r}, t)$ -t perturbációként vehető figyelembe.

A valószínűség sűrűségfüggvény:

$$\varrho(\mathbf{r}, t) = |\psi(\mathbf{r}, t)|^2, \quad (2.17)$$

amit normálva a  $\int d\mathbf{r} |\psi_0(\mathbf{r}, t)|^2 = 1$  választással kapjuk, hogy

$$n_0(t) = \int d\mathbf{r} \varrho(\mathbf{r}, t). \quad (2.18)$$

A Heisenberg egyenlet:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \hat{\Psi}(\mathbf{r}, t) = \left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V_{ext}(\mathbf{r}) + \lambda \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}, t) \hat{\Psi}(\mathbf{r}, t) \right] \hat{\Psi}(\mathbf{r}, t), \quad (2.19)$$

amelyből a gerjesztett állapotú részecskék elhanyagolásával megkapjuk az alábbi Gross-Pitaevskii egyenletet:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\mathbf{r}, t) = \left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V_{ext}(\mathbf{r}) + \lambda \varrho(\mathbf{r}, t) \right] \psi(\mathbf{r}, t). \quad (2.20)$$

Ez az egyenlet írja le a Bose-Einstein kondenzátumot átlagtér közelítésben.

## 2.2. A Madelung hidrodinamikai egyenletek

A (2.20) egyenlet megoldásához a komplex hullámfüggvény Madelung reprezentációja használható fel:

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \sqrt{\varrho(\mathbf{r}, t)} \exp \left[ \frac{i}{\hbar} S(\mathbf{r}, t) \right], \quad (2.21)$$

ahol  $S(\mathbf{r}, t)$  valós fázis. A (2.21) behelyettesíthető (2.20)-ba:

$$\begin{aligned} & i\hbar \left( \exp \left[ \frac{i}{\hbar} S \right] \frac{\partial \sqrt{\varrho}}{\partial t} + \sqrt{\varrho} \frac{i}{\hbar} \exp \left[ \frac{i}{\hbar} S \right] \frac{\partial S}{\partial t} \right) \\ &= -\frac{\hbar^2}{2m} \left\{ \nabla \left( \exp \left[ \frac{i}{\hbar} S \right] \nabla \sqrt{\varrho} + \sqrt{\varrho} \frac{i}{\hbar} \exp \left[ \frac{i}{\hbar} S \right] \nabla S \right) \right\} \\ & \quad + V_{ext} \sqrt{\varrho} \exp \left[ \frac{i}{\hbar} S \right] + \lambda \varrho \sqrt{\varrho} \exp \left[ \frac{i}{\hbar} S \right], \end{aligned} \quad (2.22)$$

$$\begin{aligned} & i\hbar \exp \left[ \frac{i}{\hbar} S \right] \frac{\partial \sqrt{\varrho}}{\partial t} - \sqrt{\varrho} \exp \left[ \frac{i}{\hbar} S \right] \frac{\partial S}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \left\{ \exp \left[ \frac{i}{\hbar} S \right] \frac{i}{\hbar} \nabla S \nabla \sqrt{\varrho} \right. \\ & \left. + \exp \left[ \frac{i}{\hbar} S \right] \Delta \sqrt{\varrho} + \frac{i}{\hbar} \exp \left[ \frac{i}{\hbar} S \right] \nabla \sqrt{\varrho} \nabla S + \sqrt{\varrho} \frac{i}{\hbar} \exp \left[ \frac{i}{\hbar} S \right] \frac{i}{\hbar} (\nabla S)^2 \right\} \end{aligned}$$

$$+\sqrt{\varrho} \frac{i}{\hbar} \exp \left[ \frac{i}{\hbar} S \right] \Delta S \Big\} + V_{ext} \sqrt{\varrho} \exp \left[ \frac{i}{\hbar} S \right] + \lambda \varrho \sqrt{\varrho} \exp \left[ \frac{i}{\hbar} S \right] , \quad (2.23)$$

ezt elosztva az  $\exp \left[ \frac{i}{\hbar} S \right]$  tényezővel

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial \sqrt{\varrho}}{\partial t} - \sqrt{\varrho} \frac{\partial S}{\partial t} &= -\frac{\hbar^2}{2m} \left\{ \frac{i}{\hbar} \nabla S \nabla \sqrt{\varrho} + \Delta \sqrt{\varrho} \right. \\ &\left. + \frac{i}{\hbar} \nabla \sqrt{\varrho} \nabla S - \frac{1}{\hbar^2} \sqrt{\varrho} (\nabla S)^2 + \frac{i}{\hbar} \sqrt{\varrho} \Delta S \right\} + V_{ext} \sqrt{\varrho} + \lambda \varrho \sqrt{\varrho} . \end{aligned} \quad (2.24)$$

A (2.20) egyenlet valós részére a

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m} (\nabla S)^2 + \lambda \varrho + V_{ext} + V_Q = 0 \quad (2.25)$$

összefüggés áll elő, amiben a  $V_Q$  kvantum korrekciós potenciál

$$V_Q = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\Delta \sqrt{\varrho}}{\sqrt{\varrho}} . \quad (2.26)$$

A (2.20) egyenlet komplex része egy kontinuitási egyenletet ad:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sqrt{\varrho}}{\partial t} + \frac{1}{2m} \{ \nabla S \nabla \sqrt{\varrho} + \nabla \sqrt{\varrho} \nabla S + \sqrt{\varrho} \Delta S \} &= 0 , \\ \frac{\partial \sqrt{\varrho}}{\partial t} + \frac{1}{m} \nabla \sqrt{\varrho} \nabla S + \frac{1}{2m} \sqrt{\varrho} \Delta S &= 0 , \\ \frac{1}{2\sqrt{\varrho}} \frac{\partial \varrho}{\partial t} + \frac{1}{2m\sqrt{\varrho}} \nabla \varrho \nabla S + \frac{1}{2m} \sqrt{\varrho} \Delta S &= 0 , \\ \frac{\partial \varrho}{\partial t} + \frac{1}{m} \nabla \varrho \nabla S + \frac{1}{m} \varrho \Delta S &= 0 , \\ \frac{\partial \varrho}{\partial t} + \frac{1}{m} \nabla (\varrho \nabla S) &= 0 , \\ \frac{\partial \varrho}{\partial t} + \nabla (\varrho \mathbf{v}) &= 0 . \end{aligned} \quad (2.27)$$

A (2.25) egyenlet gradiensét véve az alábbiakat kapjuk:

$$\nabla \left( \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{m}{2} \mathbf{v}^2 + \lambda \varrho + V_{ext} + V_Q \right) = 0 , \quad (2.28)$$

$$\frac{\nabla \partial S}{\partial t} + m \mathbf{v} \nabla \mathbf{v} + \lambda \nabla \varrho + \nabla V_{ext} + \nabla V_Q = 0 , \quad (2.29)$$

$$m \varrho \left[ \frac{\nabla \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right] + \varrho \lambda \nabla \varrho + \varrho \nabla V_{ext} + \varrho \nabla V_Q = 0 , \quad (2.30)$$

$$m \varrho \left[ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right] = -\nabla p - \varrho \nabla V_{ext} - \varrho \nabla V_Q . \quad (2.31)$$

Az összefüggésekben  $\mathbf{v} = \frac{\nabla S(\mathbf{r})}{m}$  és  $p = \frac{\lambda}{2}\varrho^2$ . A (2.31) egyenlet utolsó tagjának  $i$ -edik összetevőjét így írhatjuk fel:

$$\varrho \nabla_i V_Q = \sum_j \nabla_j \sigma_{ij}^Q, \quad (2.32)$$

ahol

$$\sigma_{ij}^Q = -\frac{\hbar^2}{4m} \varrho \nabla_i \nabla_j \ln \varrho. \quad (2.33)$$

A (2.27) és (2.31) egyenletet *Madelung hidrodinamikai egyenleteknek* nevezzük.

## 2.3. A Thomas-Fermi közelítés

Stacioner állapotban

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \sqrt{\varrho(\mathbf{r})} \exp\left[\frac{i\mu}{\hbar}t\right], \quad (2.34)$$

ahol  $\mu$  konstans. A kontinuitási egyenlet ekkor automatikusan teljesül, míg a (2.25) egyenlet alakja az alábbi lesz:

$$V_{ext} + V_Q + \lambda\varrho = 0. \quad (2.35)$$

A Thomas-Fermi közelítés szerint a  $V_Q$  potenciál elhanyagolható a  $\lambda\varrho$  taghoz képest. A közelítésnek az az alapja, hogy  $V_Q$  jelentős járulékot a kondenzátum határához közel ad [1].

Feltesszük, hogy  $V_{ext}$  potenciált a Bose-Einstein kondenzátum öngravitációja hozza létre. Ekkor  $\frac{V_{ext}(\mathbf{r})}{m}$  potenciál teljesíti a Poisson-egyenletet:

$$\Delta \frac{V_{ext}}{m} = 4\pi G \varrho_{BEC}, \quad (2.36)$$

ahol  $\varrho_{BEC} = m\varrho$  és  $G$  a gravitációs állandó.

A (2.35) és (2.36) egyenletek Laplace operátorát véve a következőt kapjuk:

$$\Delta \varrho_{BEC} + \frac{4\pi G m^2}{\lambda} \varrho_{BEC} = 0. \quad (2.37)$$

Gömb-szimmetrikus esetben  $\varrho_{BEC} = \varrho_{BEC}(r)$ , így az alábbi egyszerűbb egyenlethez jutunk:

$$\frac{d^2(r\varrho_{BEC})}{dr^2} + \frac{4\pi G m^2}{\lambda} (r\varrho_{BEC}) = 0. \quad (2.38)$$

Ennek a megoldása:

$$\varrho_{BEC}(r) = \varrho_{BEC}^{(c)} \frac{\sin kr}{kr}, \quad (2.39)$$

ahol  $k = \sqrt{\frac{Gm^3}{\hbar^2 a}}$  és  $\varrho_{BEC}^{(c)} \equiv \varrho_{BEC}(0)$  a középpontban lévő sűrűség.

A Thomas-Fermi közelítés igazolására vegyük a (2.26) kvantum korrekciós potenciált, amit átírva polár koordinátákba és behelyettesítve a (2.35) egyenletbe egy konstans és egy  $\varrho_{BEC}^{-2}$ -nal arányos tagot kapunk, míg az önkölcsönhatási tag  $\varrho_{BEC}$ -mal arányos. Az  $R_{BEC}$  határhoz közel a Thomas-Fermi közelítés nem alkalmazható. A (2.35) összefüggést  $\left(\frac{\varrho_{BEC}}{\varrho_{BEC}^{(c)}}\right)^2$ -tel megszorozva és  $\varrho_{BEC}$  (2.39) kifejezését behelyettesítve, valamint integrálva az  $r \in [0, R_{BEC}]$  intervallumon, erre az összetevőre  $\hbar^2/km$ , míg az önkölcsönhatási összetevőre  $\hbar^2 a n_0$  érték kapható. A Thomas-Fermi közelítés ezek alapján akkor alkalmazható, ha  $n_0 \gg 1/ka$  [1].

## 2.4. A Bose-Einstein kondenzátum sötét anyag haló

A sötét anyag haló méretét a  $\varrho(R_{BEC}) = 0$  összefüggés segítségével definiáljuk. Ekkor  $k = \frac{\pi}{R_{BEC}}$  és

$$R_{BEC} = \pi \sqrt{\frac{\hbar^2 a}{Gm^3}}. \quad (2.40)$$

A tömegeloszlás a következőképpen számolható:

$$m_{BEC}(r) = 4\pi \int_0^r \varrho_{BEC}(r) r^2 dr = \frac{4\pi \varrho_{BEC}^{(c)}}{k^2} r \left( \frac{\sin kr}{kr} - \cos kr \right). \quad (2.41)$$

## 3. fejezet

# A Bose-Einstein kondenzátum sötét anyag halók stabilitása

Az átlagtér közelítés szerint a BEC energiája [8]

$$E = \langle \hat{H} \rangle = K + W + I , \quad (3.1)$$

ahol  $\hat{H}$  a Hamilton operátor,  $K$  a kinetikus,  $W$  a potenciális és  $I$  a kölcsönhatási energia. Az energia tehát a Hamilton operátor várható értéke, időbeli stabilitás csak abban az esetben várható, ha  $E < 0$ . A viriál tétel szerint sztatikus eloszlásra  $2K + W + 3I = 0$  [2] [9], így a teljes energia (3.1) összefüggése alapján  $E + K + 2I = 0$ . Mivel a kinetikus és a kölcsönhatási energia is pozitív, ezért a teljes energiának negatívnak kell lennie egyensúlyi helyzetben.

A kinetikus energia pontos értékét az alábbi integrál adja meg:

$$K = -\frac{\hbar^2}{2m^2} \int \psi^* \nabla^2 \psi \, d^3r = -\frac{2\pi\hbar^2}{m^2} \int \psi^* \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + 4 \frac{\partial \psi}{\partial r^2} \right) r^2 \, dr , \quad (3.2)$$

a potenciális energia kifejezése:

$$W = \int V m |\psi|^2 \, d^3r = 4\pi \int V m |\psi|^2 r^2 \, dr , \quad (3.3)$$

végül a kölcsönhatási energiára vonatkozó egyenlet:

$$I = \frac{2\pi\hbar^2 a}{m^3} \int |\psi|^4 \, d^3r = \frac{8\pi^2\hbar^2 a}{m^3} \int |\psi|^4 r^2 \, dr . \quad (3.4)$$

A teljes energia ezek összegével adható meg:

$$E = -\frac{2\pi\hbar^2}{m^2} \int \psi^* \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + 4 \frac{\partial \psi}{\partial r^2} \right) r^2 \, dr + 4\pi \int V m |\psi|^2 r^2 \, dr + \frac{8\pi^2\hbar^2 a}{m^3} \int |\psi|^4 r^2 \, dr . \quad (3.5)$$

### 3.1. Az energia sztatikus esetben

A [8] cikk szerint a kölcsönhatási energia a következőképpen határozható meg, ha a haló  $R$  sugarán belül a (2.39) képlet adja meg a BEC sűrűséget, azon kívül pedig zérus a sűrűség:

$$\begin{aligned}
 I &= \frac{2\pi\hbar^2 a}{m} \int |\psi|^4 d^3r = \frac{8\pi^2\hbar^2 a}{m^3} \int_0^{R_{BEC}} \left( \varrho_{BEC}^{(c)} \frac{\sin kr}{kr} \right)^2 r^2 dr \\
 &= \frac{8\pi^2\hbar^2 a}{m^3} \left( \varrho_{BEC}^{(c)} \right)^2 \int_0^{R_{BEC}} \frac{\sin^2 kr}{k^2} dr = \frac{8\pi^2\hbar^2 a}{m^3} \left( \varrho_{BEC}^{(c)} \right)^2 \frac{1}{k^2} \left[ \frac{r}{2} - \frac{\sin 2kr}{4k} \right]_0^{R_{BEC}} \\
 &= \frac{8\pi^2\hbar^2 a}{m^3} \left( \varrho_{BEC}^{(c)} \right)^2 \frac{R_{BEC}^2}{\pi^2} \frac{R_{BEC}}{2} = 4 \frac{\hbar^2 a}{m^3} \left( \varrho_{BEC}^{(c)} \right)^2 R_{BEC}^3. \quad (3.6)
 \end{aligned}$$

A kölcsönhatási energia előjele csak  $a$  előjelétől függ, és mivel  $a > 0$  ezért pozitív.

A (2.41) képlet segítségével kiszámolhatjuk a haló teljes tömegét:

$$\begin{aligned}
 M_{BEC} &= \frac{4\pi\varrho_{BEC}^{(c)}}{k^2} R_{BEC} \left( \frac{\sin kR_{BEC}}{kR_{BEC}} - \cos kR_{BEC} \right) \\
 &= \frac{4\varrho_{BEC}^{(c)} R_{BEC}^3}{\pi} \left( \frac{\sin \pi}{\pi} - \cos \pi \right) = \frac{4}{\pi} \varrho_{BEC}^{(c)} R_{BEC}^3. \quad (3.7)
 \end{aligned}$$

A gravitációs mező a következő függvény segítségével számolható ki:

$$g(r) = \begin{cases} -\frac{Gm_{BEC}(r)}{r^2} = -\frac{4\pi G\varrho_{BEC}^{(c)}}{k^2 r} \left( \frac{\sin kr}{kr} - \cos kr \right) & \text{ha } r < R_{BEC} \\ -\frac{GM_{BEC}}{r^2} = -\frac{4}{\pi} G\varrho_{BEC}^{(c)} \frac{R_{BEC}^3}{r^2} & \text{ha } r \geq R_{BEC} \end{cases}, \quad (3.8)$$

ahol  $m_{BEC}(r)$  az  $r$  sugáron belül található részecskék tömege. A gravitációs potenciál így

$$\begin{aligned}
 V(r) &= \int_r^\infty g(r') dr' = -\frac{4\pi G\varrho_{BEC}^{(c)}}{k^2} \int_r^{R_{BEC}} \left( \frac{\sin kr'}{kr'^2} - \frac{\cos kr'}{r'} \right) dr' \\
 &\quad - \frac{4}{\pi} G\varrho_{BEC}^{(c)} R_{BEC}^3 \int_{R_{BEC}}^\infty \frac{1}{r'^2} dr' = \\
 &= -\frac{4\pi G\varrho_{BEC}^{(c)}}{k^3} \left[ \frac{\sin kr'}{r'} \right]_r^{R_{BEC}} - \frac{4}{\pi} G\varrho_{BEC}^{(c)} R_{BEC}^3 \left[ -\frac{1}{r'} \right]_{R_{BEC}}^\infty \\
 &= -\frac{4\pi Gm}{k^2} |\psi|_r|^2 - \frac{4}{\pi} G\varrho_{BEC}^{(c)} R_{BEC}^2, \quad (3.9)
 \end{aligned}$$

ahol  $\psi$  kiértékelése az  $r$  helyen történik. A gravitációs mező potenciális energiája megadható az alábbiak szerint:

$$W = \int_0^{R_{BEC}} Vm |\psi|^2 d^3r = -4\pi \int_0^{R_{BEC}} \left( \frac{4\pi Gm^2}{k^2} |\psi|^2 + \frac{4}{\pi} Gm\varrho_{BEC}^{(c)} R_{BEC}^2 \right) |\psi|^2 r^2 dr$$

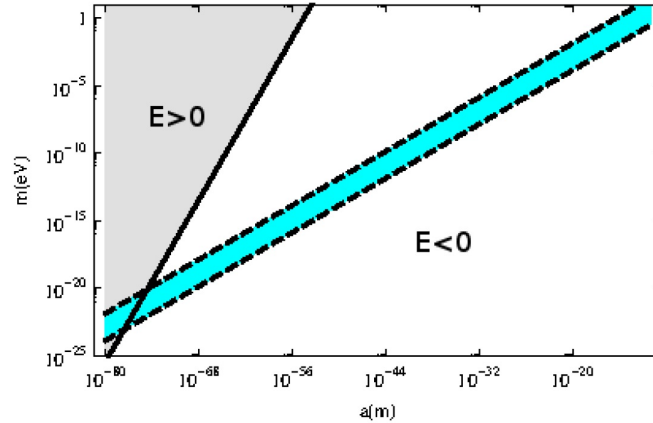
$$\begin{aligned}
&= -\frac{16\pi^2 G \left(\varrho_{BEC}^{(c)}\right)^2}{k^2} \int_0^{R_{BEC}} \left( \frac{\sin^2 kr}{k^2 r^2} + \frac{k^2}{\pi^2} R_{BEC}^2 \frac{\sin kr}{kr} \right) r^2 dr \\
&= -\frac{16\pi^2 G \left(\varrho_{BEC}^{(c)}\right)^2}{k^2} \int_0^{R_{BEC}} \left( \frac{\sin^2 kr}{k^2} + \frac{\sin kr}{k} r \right) dr \\
&= -\frac{16\pi^2 a \hbar^2 \left(\varrho_{BEC}^{(c)}\right)^2}{m^3} \left( \frac{1}{k^2} \left[ \frac{r}{2} - \frac{\sin 2kr}{4k} \right]_0^{R_{BEC}} - \left[ \frac{r \cos kr}{k^2} \right]_0^{R_{BEC}} + \int_0^{R_{BEC}} \frac{\cos kr}{k^2} dr \right) \\
&= -\frac{16\pi^2 a \hbar^2 \left(\varrho_{BEC}^{(c)}\right)^2}{m^3} \left( \frac{R_{BEC}^3}{2\pi^2} - \frac{\sin 2\pi}{4k^3} - \frac{R_{BEC} \cos \pi}{k^2} + \left[ \frac{\sin kr}{k^3} \right]_0^{R_{BEC}} \right) \\
&= -\frac{16\pi^2 a \hbar^2 \left(\varrho_{BEC}^{(c)}\right)^2}{m^3} \frac{3R_{BEC}^3}{2\pi^2} = -24 \frac{\hbar^2 a}{m^3} \left(\varrho_{BEC}^{(c)}\right)^2 R_{BEC}^3, \quad (3.10)
\end{aligned}$$

azaz  $W = -6I$  (ami korigálja a [8] cikk (20) egyenletét).

A kinetikus energia kiszámítására numerikus közelítés használható [8]. A cikk szerzői az alábbi eredményt kapták a kinetikus és kölcsönhatási energiák viszonyára:

$$\eta = \frac{K}{3I} \sim \frac{m}{a \varrho_{BEC}^{(c)} R_{BEC}^2}. \quad (3.11)$$

A teljes energia akkor negatív, ha  $\eta \leq 1$ , egyébként pozitív [8]. A 3.1 ábra alapján meghatározható a bozon tömegének és a szóráshossznak ismeretében a várható időbeli stabilitás.



3.1. ábra. Az  $a - m$  paraméterek alapján az energia ábrázolása. A szürkén jelzett részen az energia pozitív, a fehér részen negatív. A szaggatott vonalak közötti sáv jelöli a haló sugarának  $0,1 - 10 \text{ kpc}$  közé eső tartományát [8].

A kerületi sebesség az  $r$ -sugarú körpályán a Newtoni mechanika alapján:

$$v(r) = \sqrt{\frac{G \cdot m(r)}{r}}. \quad (3.12)$$

### 3.2. A stabilitás vizsgálata

A sztatikus anyageloszlások stabilitása két módon vizsgálható. Perturbáció számítás segítségével, amikor megengedünk kis eltéréseket az eredeti eloszlástól, ekkor azt határozzuk meg, hogy a kezdetben kis eltérések időben növekednek vagy csökkennek. Egy másik módszer szerint valamilyen kezdeti időpontban elfogadjuk a sztatikus esetben származtatott anyageloszlást, majd a sztatikusságot nem megkövetelve fejlesztjük az eredeti egyenletrendszer időben. Ezek közül az utóbbit választottam.

A Gross-Pitaevskii-Poisson (GPP) csatolt egyenletrendszer a következő:

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m^2} \nabla^2 \psi + V\psi + \frac{2\pi\hbar^2 a}{m^3} |\psi|^2 \psi ,$$

$$\nabla^2 V = 4\pi G m^2 |\psi|^2 . \quad (3.13)$$

Gömb-szimmetrikus tömegeloszlást tekintve a GPP egyenletrendszer átírhatjuk az alábbi formába:

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m^2} \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + 4 \frac{\partial \psi}{\partial r^2} \right) + V\psi + \frac{2\pi\hbar a}{m^3} |\psi|^2 \psi ,$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + 4 \frac{\partial V}{\partial r^2} = 4\pi G m^2 |\psi|^2 , \quad (3.14)$$

ahol kihasználtuk, hogy  $\frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} = 4 \frac{\partial}{\partial r^2}$ , a deriválást tehát  $r^2$  szerint végezzük, ezzel az  $r = 0$  pontban lévő szingularitást ki tudjuk küszöbölni a numerikus számítások folyamán.

A Gross-Pitaevskii egyenlet numerikus megoldásához a Crank-Nicolson-féle véges differencia módszert használtam, a határokon az egyenesek módszerének alkalmazásával. Ez utóbbi miatt a keletkező lineáris egyenletrendszer nem teljesen tridiagonális, ezt az eltérést a Woodbury-Sherman-Morrison formula [12] segítségével küszöböltem ki. A Poisson-egyenlet megoldásához hatodrendben pontos Numerov-módszert [13] használtam, megfelelő határfeltételt kiróva. Az integrálási tartományt úgy választottam meg, hogy a sűrűség változása a határon zérus legyen az eltelte időt követően. Az időfejlődés hosszára 100 millió évet állítottam be, ez elegendőnek bizonyult a stabilitás eldöntéséhez. A felhasznált numerikus módszerekről leírás a függelékben található.

A rendszer kezdeti hullámfüggvényét összhangban (2.33)-tel, az alábbi módon adhatjuk meg:

$$\psi(r, t = 0) = \begin{cases} \frac{\sqrt{\rho_{BEC}(r)}}{m}, & \text{ha } r < R , \\ 0, & \text{ha } R \leq r , \end{cases} \quad (3.15)$$

ahol  $R$  a haló kezdeti sugara. A vizsgált mennyiségeket (a haló tömegét, energiáját, a gravitációs potenciált és a kerületi sebességet) figyelembe véve elegendő, ha a kezdeti hullámfüggvénynek csak valós részt tulajdonítunk, a képzetest pedig zérusnak vesszük.



A sűrűség és hullámfüggvény  $t = 0$  időpontban történő meghatározása után a Poisson-egyenlet megoldásával megkapjuk a  $V$  potenciált, amit behelyettesítve a Gross-Pitaevskii-egyenletbe kiszámolhatjuk a  $t = dt$  időpontban a hullámfüggvényt, ebből pedig a sűrűséget, amivel a Poisson egyenletet ismét megoldhatjuk. A két egyenlet ciklikus alkalmazásával a rendszer időfejlődése vizsgálható.

### 3.3. A mennyiségek átskálázása numerikus számításokhoz

Numerikus számítások elvégzéséhez SI egységek helyett érdemes más mértékegység-rendszert választani. Az átszámításhoz a [14] cikkben használt módszert alkalmaztam.

Az összefüggésekben a redukált Planck-állandóra  $[\hbar_k] = 1$  programbeli értéket véve ( $k$  a programban használt mennyiséget jelöli) az alábbi írhathatjuk:

$$\hbar = 1,04547 \cdot 10^{-34} \frac{m^2 \cdot kg}{s} = [\hbar_k] \frac{([L_k] m)^2 \cdot ([M_k] kg)}{([T_k] s)}, \quad (3.16)$$

ahol  $[L_k]$  a hosszúság,  $[M_k]$  a tömeg és  $[T_k]$  az idő programbeli egységének mérőszáma. A szögletes zárójelben a mérőszám, utána a mértékegység szerepel. A gravitációs állandó kódbeli egységét  $G_k$ -val jelölve a következő egyenlőséget írhatjuk:

$$G = 6,67428 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg \cdot s^2} = [G_k] \frac{([L_k] m)^3}{([M_k] kg) \cdot ([T_k] s)^2}. \quad (3.17)$$

A hosszúság egységére  $1kpc = 3,086 \cdot 10^{19}m$ -t,  $[G_k]$ -nak  $10^{-100}$  értékeket választva a következőket kapjuk az idő egységére:

$$T_k = [T_k] s = \sqrt[3]{\frac{G_k \cdot L_k^5}{\hbar \cdot G}} = 7,375 \cdot 10^{13} s = 2,34 \text{ millió év}, \quad (3.18)$$

illetve a tömeg egységére:

$$M_k = [M_k] kg = \sqrt{\frac{\hbar \cdot G_k \cdot L_k}{G \cdot T_k}} = 8,096 \cdot 10^{-60} kg. \quad (3.19)$$

Ezekkel az értékekkel számolva, a bozon tömegét  $m = 10^{-23}eV/c^2$ -nek véve, a programbeli tömege  $m_k = 2,2kg$ , a sebesség egysége  $399km/s$ .

A fenti mértékegységeket felhasználva, az együtthatókat átszámolva kódbeli egységekre a Gross-Pitaevskii egyenletre az alábbi formát kapjuk:

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} = -0.2273 \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + 4 \frac{\partial \psi}{\partial r^2} \right) + V \psi + 1.2982 a |\psi|^2 \psi. \quad (3.20)$$

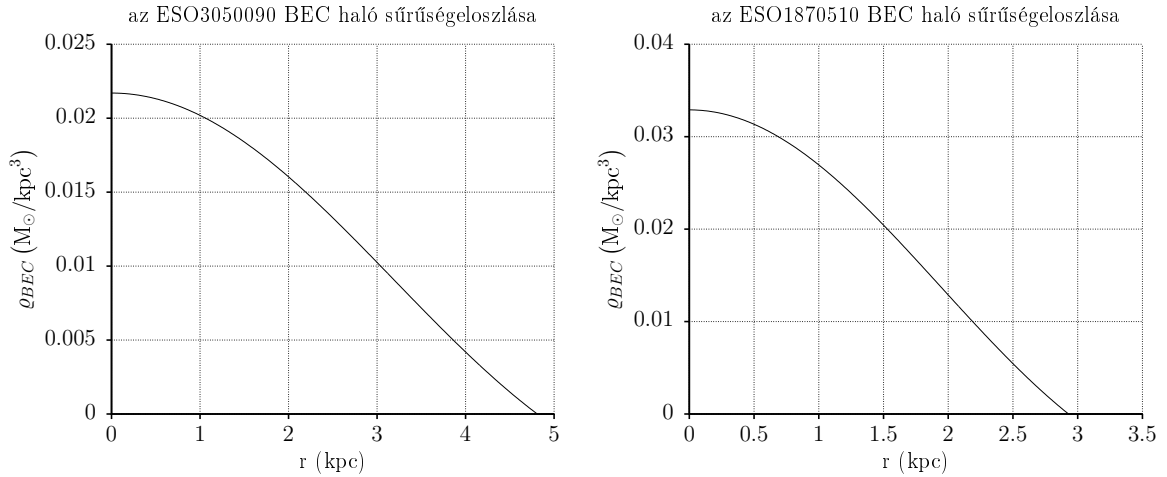
### 3.4. BEC haló stabilitás numerikus vizsgálata

Ha kiszámítjuk a rendszer teljes energiáját, és az nagyobb, mint zérus, akkor azt várhatjuk, hogy a részecskék a halóból kifelé fognak mozogni. Ugyanis ahhoz, hogy egy részecske el tudjon szakadni, a kinetikus és kölcsönhatási energiájának összege nagyobb kell legyen, mint a potenciális energiájának abszolút értéke. A numerikus számítások során a kezdeti haló sugáron belüli tömeg változásának vizsgálatával a részecskék kiáramlása nyomon követhető. A kezdeti haló sugáron belüli  $M_{BEC}(R)$  tömeg meghatározásához az alábbi összefüggést használtam fel:

$$M_{BEC}(R) = 4\pi \int_0^R \varrho_{BEC}(r, t) r^2 dr . \quad (3.21)$$

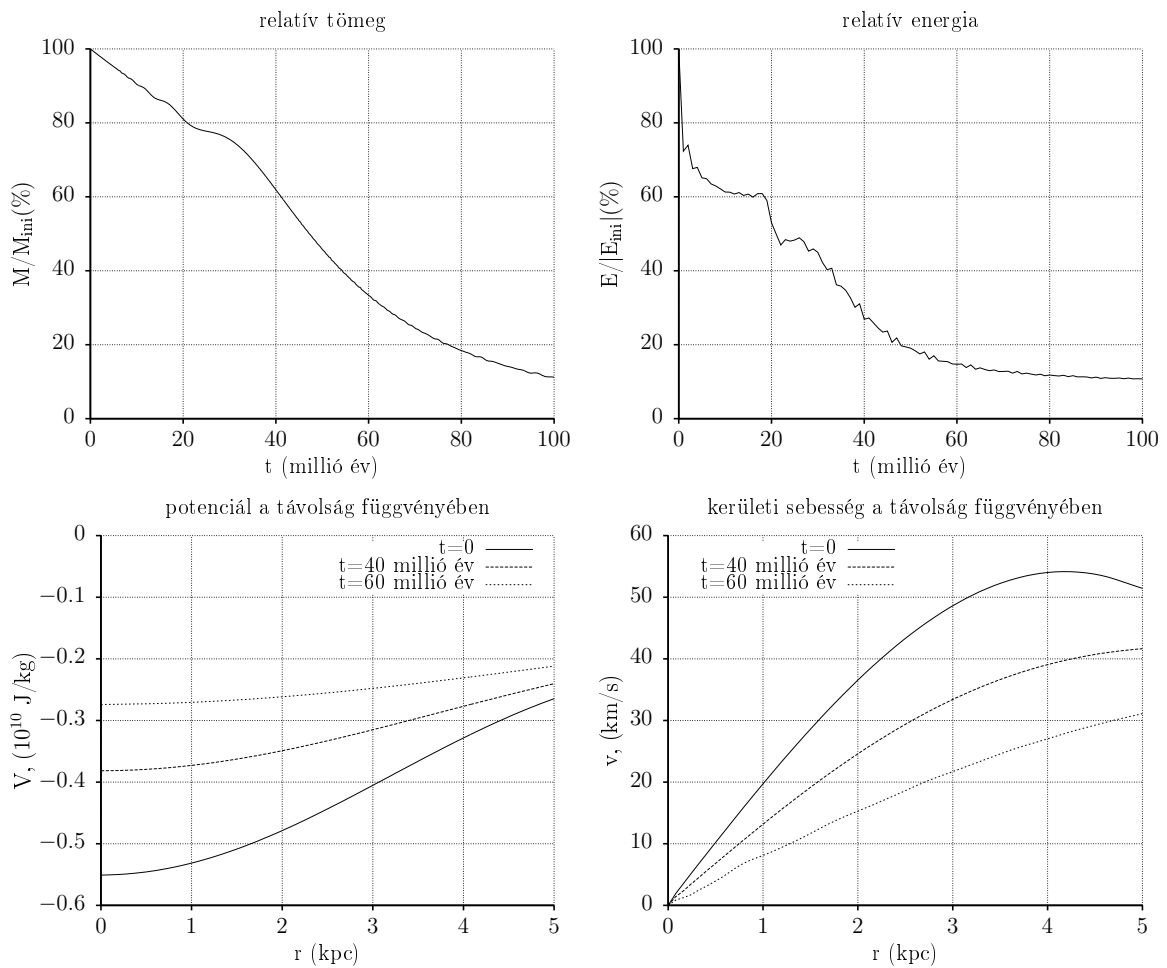
A numerikus számítások folyamán a (3.5) integrállal határoztam meg a rendszer összenergiáját a kezdeti haló sugáron belül.

A számításokat két galaxis esetén végeztem el. Az egyik az ESO3050090, mely halójának sugara a megfigyelések szerint  $R_{ESO3050090} = 4,81 kpc$ , a másik az ESO1870510, ennek sugara  $R_{ESO1870510} = 2,93 kpc$ , a centrumbeli anyagsűrűség a két galaxist tekintve  $\varrho_{ESO3050090}^{(c)} = 0,0217 M_\odot/kpc^3$  és  $\varrho_{ESO1870510}^{(c)} = 0,0329 M_\odot/kpc^3$ . A szóráshosszra a (2.40) összefüggés felhasználásával az első galaxist tekintve  $a_{ESO3050090} = 7,55 \cdot 10^{-80} m$ , a második esetén  $a_{ESO1870510} = 2,8 \cdot 10^{-80} m$  értéket kapunk. A részecskék száma a halókban  $N_{ESO3050090} = 3,43 \cdot 10^{98}$  és  $N_{ESO1870510} = 1,17 \cdot 10^{98}$ , a halók tömege  $M_{ESO3050090} = 3,07 \cdot 10^9 M_\odot$  és  $M_{ESO1870510} = 1,05 \cdot 10^9 M_\odot$ . A (2.39) összefüggés alapján meghatározott sűrűségeloszlások a  $t = 0$  időpontban a 3.2 ábrán láthatóak.



3.2. ábra. A kezdeti sűrűségeloszlás a két galaxis esetén.

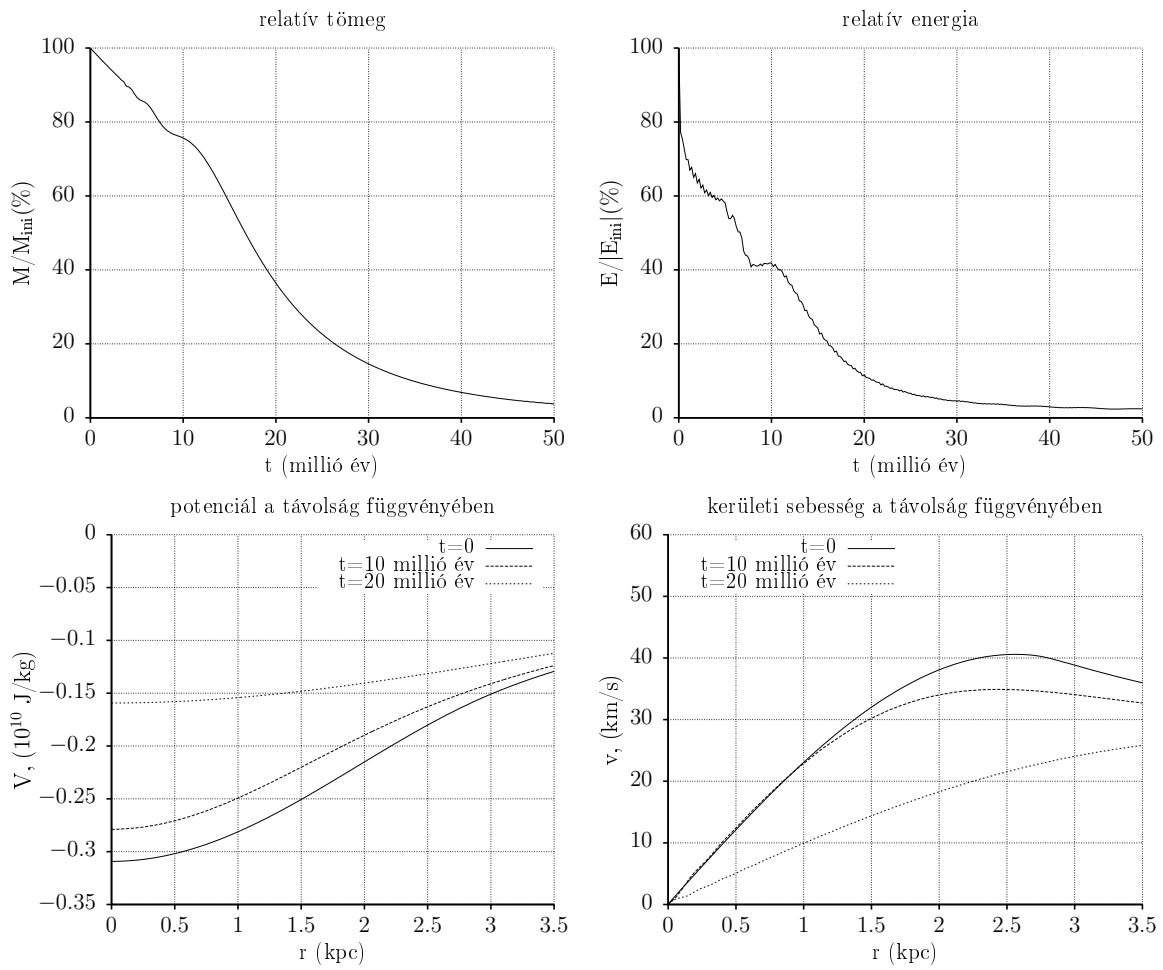
Az eredmények a 3.3 és a 3.4 ábrákon láthatóak. Az ábrákon  $M_{ini}$  a  $t = 0$  időpontban a haló kezdeti sugarán belüli teljes tömeget,  $M$  a haló kezdeti sugarán belüli tömeget,  $E_{ini}$  a  $t = 0$  időpontban a haló kezdeti sugarán belüli teljes energiát és  $E$  a haló kezdeti sugarán belüli energiát jelöli. A BEC haló eredeti sugarán belül található részecskék össztömege a számítások szerint idővel csökken, azaz a részecskék folyamatosan kifelé mozognak a halóból. Ennek eredményeképpen a részecskék összenergiája csökken az idővel, ahogy ezt a relatív energiát ábrázoló ábra mutatja. Az ábrákról az is látható, hogy a gravitációs potenciál csökken az idővel, illetve a kerületi sebesség is hasonlóképpen változik. Ezen eredmények azt mutatják, hogy az általam vizsgált galaxisok BEC halója időben nem stabil.



3.3. ábra. A numerikus számítások eredménye az ESO3050090 galaxis esetén. Az ábrákon az eredeti haló sugáron belüli tömeg- és energiaarány időbeli változása látható a kezdeti állapothoz képest, valamint a potenciál és kerületi sebesség alakulása a centrumtól való távolság függvényében, 3 időpontban. A grafikonokról megállapítható, hogy a kezdeti konfiguráció időben nem stabil.

A [2] cikkben található ábrákkal összehasonlítva megfigyelhető, hogy a BEC haló eredeti sugarán belül található tömeg és energia idővel való csökkenése lassabban történik. Ennek oka az lehet, hogy a [2] cikkben a szerzők a gravitációs potenciál centrumban lévő nagyságát mindkét galaxis esetén ugyanakkorának vették, ez  $-0,358$  kódbeli értékük alapján  $-1,32 \cdot 10^{10} J/kg$ . Ellenben én figyelembe vettem, hogy a végtelenben a potenciálnak nullának kell lennie, ezért a centrumbeli potenciálra az ESO3050090 galaxis esetén  $-5,5 \cdot 10^9 J/kg$ , az ESO1870510 esetén pedig  $-3,1 \cdot 10^9 J/kg$  adódik.

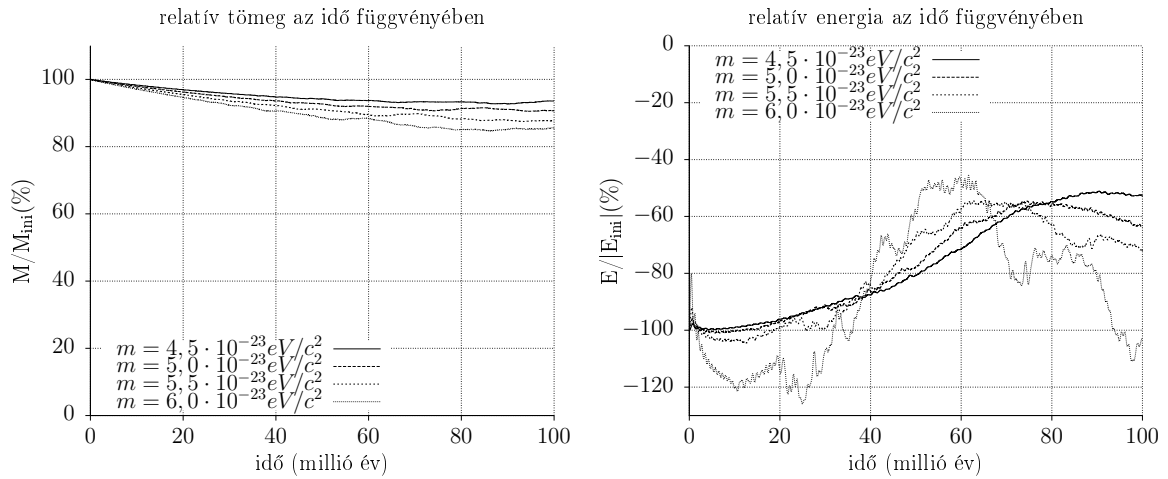
A két általam vizsgált galaxis esetén  $\eta > 1$ , tehát nem tekinthetők stabilnak. A bozon tömegére és a szóráshosszra  $m = 10^{-6} eV$  és  $a = 10^{-29} m$  értékeket választva  $\eta < 1$ , a numerikus számítások is azt mutatják, hogy ez a konfiguráció stabil.



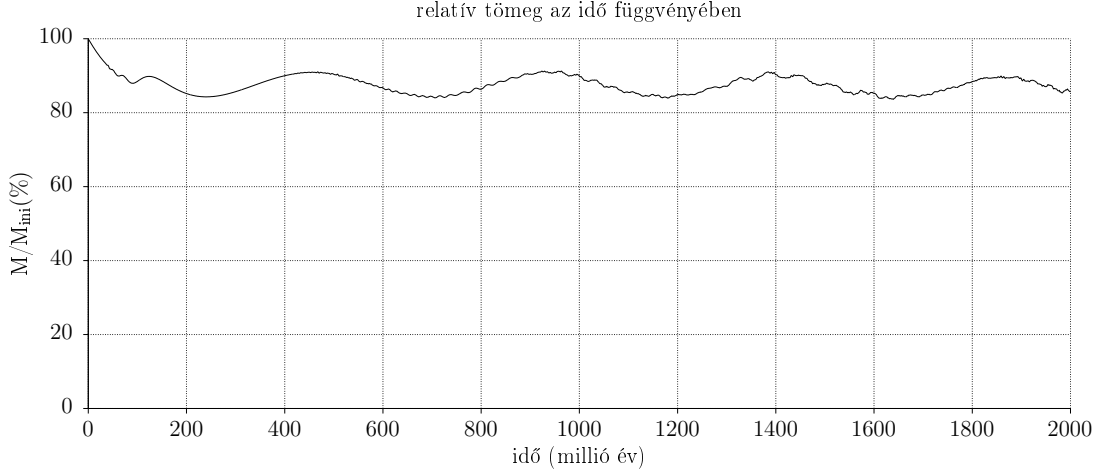
3.4. ábra. A numerikus számítások eredménye az ESO1870510 galaxis esetén. Az ábrákon az eredeti haló sugarán belüli tömeg- és energiaarány időbeli változása látható a kezdeti állapothoz képest, valamint a potenciál és kerületi sebesség alakulása a centrumtól való távolság függvényében, 3 időpontban. A grafikonokról megállapítható, hogy a kezdeti konfiguráció időben nem stabil.

További számításokat végeztem olyan galaxisokra, amelyeknek a központi anyagsűrűsége megegyezik a Tejútrendszerével:  $\rho_{BEC}^{(c)} = 0,47 GeV/cm^3$  [8]. Az eredményeket a 3.5, 3.6, 3.7, 3.8 és 3.9 ábrák valamint a 3.1 és 3.2 táblázatok tartalmazzák. Jól látható, hogy  $\eta < 1$  esetén az energia negatív előjelű, ekkor a haló összömege az eredeti sugarán belül ugyan csökken valamennyit, de egy bizonyos határon túl további tömegvesztés már nem tapasztalható. A 3.6 grafikonon az eredeti haló sugarán belüli tömegarány változása látható 2 milliárd évre vonatkozóan a kezdeti állapothoz képest. A 3.6 ábra azt mutatja, hogy a csökkenés egy idő után növekedésbe vált át, majd hosszú periódusú oszcilláció jön létre [9]. A (2.40) összefüggés szerint  $R$ ,  $a$  és  $m$  függenek egymástól, ezért a táblázatokban feltüntettem a különböző  $a - m$  párokhoz tartozó  $R$  haló sugarat is.

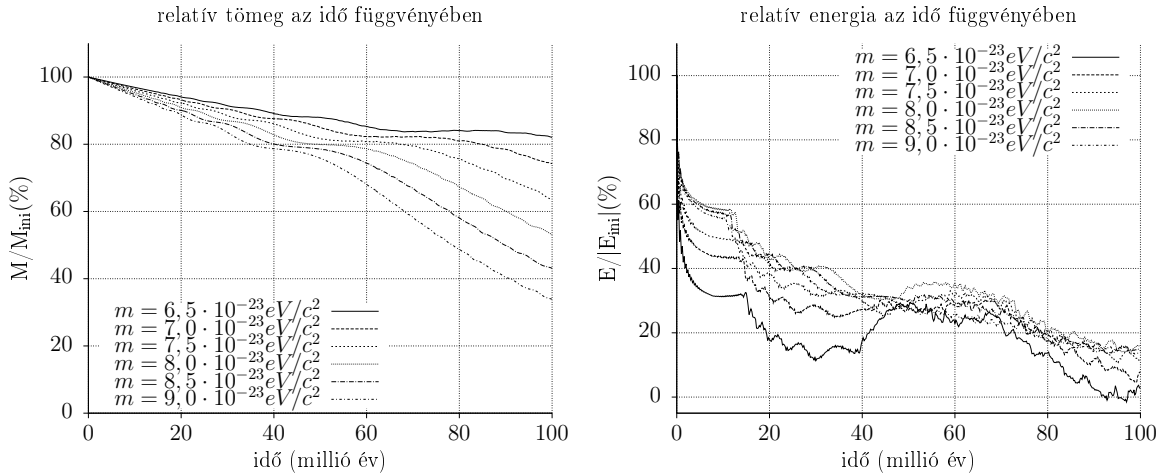
A paraméterek kiválasztásához felhasználtam a 3.1 ábrát. A bozon tömegére az  $m = 6 \cdot 10^{-23} eV/c^2$  és a szóráshosszra az  $a = 10^{-77} m$  nagyságrendű értékeket választottam. A táblázatokban  $E$  a BEC haló  $t = 0$  időpontban kiszámított összenergiáját jelöli,  $R$  a haló kezdeti sugarát,  $\eta$  a (3.11) egyenlettel kiszámítható kezdeti energiaviszony.



3.5. ábra. A numerikus számítások eredménye  $\rho_{BEC}^{(c)} = 0,47 GeV/cm^3$  esetén, a szóráshossz  $a = 10^{-77} m$ ,  $\eta < 1$ . Az ábrákon az eredeti haló sugarán belüli tömeg- és energiaarány időbeli változása látható a kezdeti állapothoz képest.



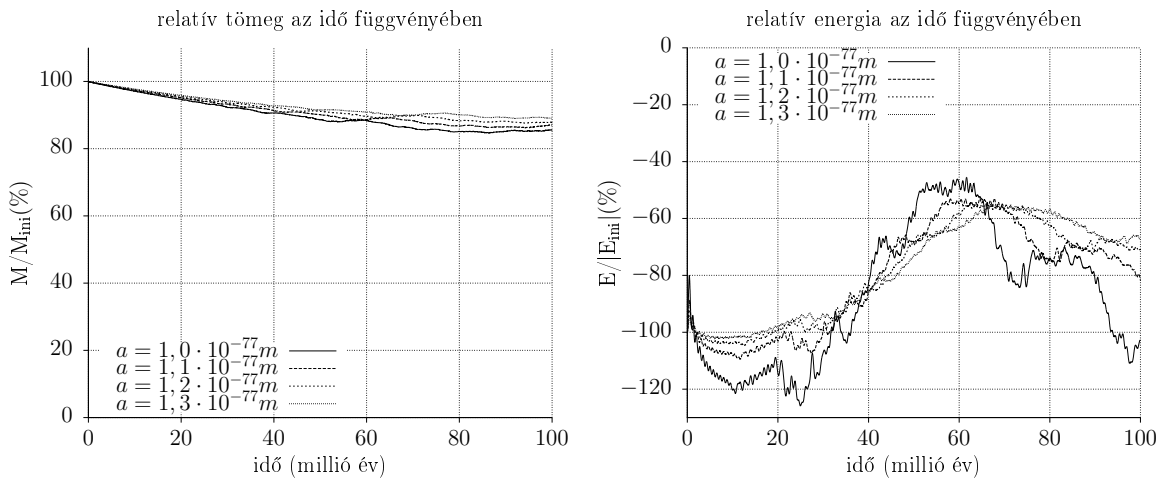
3.6. ábra. A numerikus számítások eredménye  $\rho_{BEC}^{(c)} = 0,47 GeV/cm^3$  esetén, a szóráshossz  $a = 10^{-77} m$ , a bozon tömege  $m = 5,5 \cdot 10^{-23} eV/c^2$ ,  $\eta < 1$ . Az ábrán az eredeti haló sugáron belüli tömegarány időbeli változása látható a kezdeti állapothoz képest. Megfigyelhető, hogy 250 millió év után a tömegarány csökkenése növekedésbe vált át, majd hosszú periódusú oszcilláció jön létre.



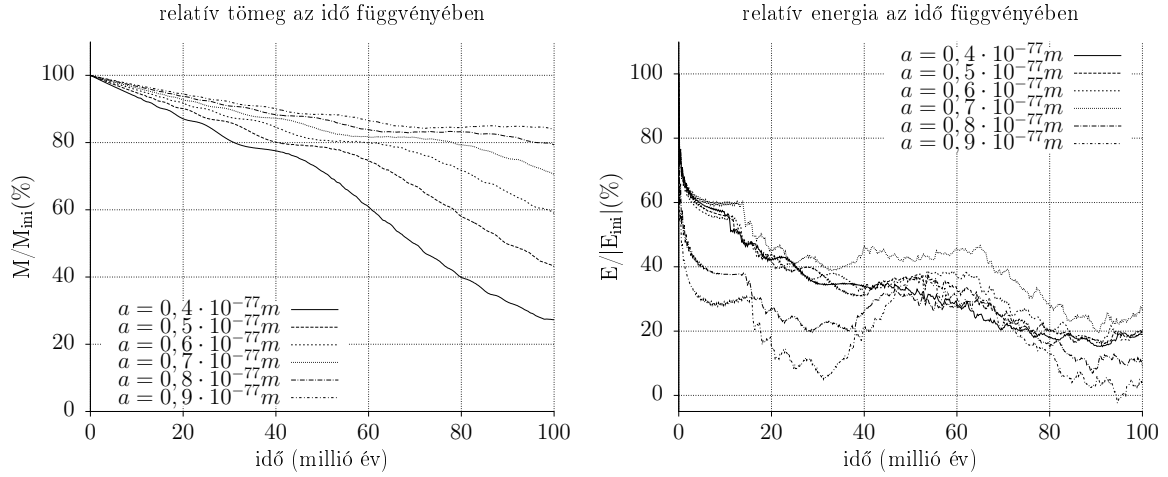
3.7. ábra. A numerikus számítások eredménye  $\rho_{BEC}^{(c)} = 0,47 GeV/cm^3$  esetén, a szóráshossz  $a = 10^{-77} m$ ,  $\eta > 1$ . Az ábrákon az eredeti haló sugáron belüli tömeg- és energiaarány időbeli változása látható a kezdeti állapothoz képest. A grafikonokról megállapítható, hogy a kezdeti konfiguráció időben nem stabil.

$m(10^{-23}eV/c^2)$	4,5	5,0	5,5	6,0	6,5	7,0	7,5	8,0	8,5	9,0
$E(10^{46}J)$	-39,52	-14,31	-4,611	-0,769	0,729	1,250	1,359	1,300	1,179	1,043
$R(kpc)$	5,784	4,939	4,281	3,757	3,332	2,981	2,688	2,440	2,228	2,045
$\eta$	0,305	0,458	0,671	0,950	1,308	1,760	2,319	3,002	3,826	4,809

3.1. táblázat. A különböző bozon tömegekhez tartozó paraméterek a numerikus számítások alapján, a szóráshossz  $a = 10^{-77}m$ . A kezdeti energia a (3.5), a haló kezdeti sugara a (2.40) és  $t = 0$  időpontban  $\eta$  meghatározása a (3.11) összefüggés felhasználásával történt.



3.8. ábra. A numerikus számítások eredménye  $\varrho_{BEC}^{(c)} = 0,47GeV/cm^3$  és  $m = 6 \cdot 10^{-23}eV/c^2$  bozon tömeg esetén, ekkor  $\eta < 1$ . Az ábrákon az eredeti haló sugáron belüli tömeg- és energiaarány időbeli változása látható a kezdeti állapothoz képest.



3.9. ábra. A numerikus számítások eredménye  $\varrho_{BEC}^{(c)} = 0,47 GeV/cm^3$  és  $m = 6 \cdot 10^{-23} eV/c^2$  bozon tömeg esetén, ekkor  $\eta > 1$ . Az ábrákon az eredeti haló sugáron belüli tömeg- és energiaarány időbeli változása látható a kezdeti állapothoz képest. A grafikonokról megállapítható, hogy a kezdeti konfiguráció időben nem stabil.

$a(10^{-77}m)$	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	1,1	1,2	1,3
$E(10^{46}J)$	2,875	2,811	2,543	2,059	1,352	0,413	-0,769	-2,197	-3,889	-5,852
$R(kpc)$	2,376	2,657	2,910	3,143	3,360	3,564	3,757	3,940	4,116	4,284
$\eta$	5,937	3,800	2,639	1,939	1,484	1,173	0,950	0,785	0,660	0,562

3.2. táblázat. A különböző szóráshosszakhoz tartozó paraméterek a numerikus számítások alapján, a bozon tömege  $m = 6 \cdot 10^{-23} eV/c^2$ . A kezdeti energia a (3.5), a haló kezdeti sugara a (2.40) és  $t = 0$  időpontban  $\eta$  meghatározása a (3.11) összefüggés felhasználásával történt.



## 4. fejezet

# Összefoglalás

A dolgozatban galaktikus méretű Bose-Einstein kondenzátumokat vizsgáltam. Bose-Einstein kondenzátumok megfelelően alacsony hőmérsékleten, híg gázokban alakulhatnak ki. Az átlagtér közelítés segítségével kiszámítható a valószínűség sűrűségfüggvény, a Heisenberg egyenletből pedig levezethető a Gross-Pitaevskii egyenlet, amely leírja a Bose-Einstein kondenzátumot átlagtér közelítésben.

A Gross-Pitaevskii egyenlet megoldásához a komplex hullámfüggvény Madelung reprezentációját alkalmaztam, amelynek felhasználásával hozzájutottam a Madelung hidrodinamikai egyenletekhez. Ezután stacioner állapotban vizsgáltam a Bose-Einstein kondenzátumot. A Thomas-Fermi-közelítés szerint a kvantum korrekciós potenciál elhanyagolható, megadtam ennek szükséges feltételét. Gömbszimmetrikus tömegeloszlás feltételezésével meghatároztam a BEC haló sztatikus sűrűségeloszlását.

Ezt követően a haló stabilitását vizsgáltam. Az irodalom alapján felírtam a kinetikus, potenciális és kölcsönhatási energiák kiszámításához szükséges összefüggéseket, majd ezeket felhasználva sztatikus esetre származtattam az értéküket. A kinetikus és kölcsönhatási energiák viszonyából meghatározható a BEC haló időbeli stabilitása a [8] cikk szerint, ami alapján felírtam az ehhez szükséges összefüggést.

A 3.1 ábrán jól látható a várható időbeli stabilitás a bozon tömegének és a szóráshossznak függvényében. A szaggatott vonalak közötti sáv az ismert galaxisok radiális méretét jelöli ( $0, 1 - 10 \text{ kpc}$ ). Az ebben a sávban található galaxisok esetén az ábra alapján egyértelmű időbeli stabilitás akkor várható, ha  $a > 10^{-74} m$ , vagy  $m > 10^{-20} eV/c^2$ . Időben nem stabil a rendszer, ha  $a < 10^{-78} m$  vagy  $m < 10^{-23} eV/c^2$ . Egyéb esetekben a bozon tömegének és a szóráshossznak függvényében határozható meg az időfejlődés.

A továbbiakban a sztatikus anyageloszlás stabilitását vizsgáltam, visszatérve az eredeti Gross-Pitaevskii-Poisson csatolt egyenletrendszerre, melynek az irodalom alapján megadtam gömbszimmetrikus tömegeloszlásra vonatkozó formáját. A Gross-Pitaevskii egyenlet numerikus megoldásához Crank-Nicolson-féle véges differencia módszert hasz-

náltam, míg a Poisson egyenlethez a Numerov módszert. Az egyenletek megoldásához peremfeltételek szükségesek, valamint a kezdeti állapot megadása. Kezdeti állapotként olyat választottam, ami összhangban áll a stacioner feltevessel, Thomas-Fermi közelítéssel kapott tömegeloszlással. Ezt követően a numerikus számítások elvégzéséhez szükséges mértékegységrendszer átskálázást ismerttettem.

Az önálló eredményeket a 3.4 fejezet tartalmazza. A vizsgálatokhoz két ismert galaxist, az ESO30050090-et és az ESO1870510-et használtam fel. Ezen galaxisok halójának sugara és központi tömegsűrűsége ismert, segítségükkel kiszámoltam a szóráshosszat, a halóban lévő részecskék számát és a haló össztömegét, valamint felrajzoltam a kezdeti tömegeloszlást. A numerikus számítások eredményeit a 3.3 és 3.4 ábrák tartalmazzák. Ezeken a kezdeti haló sugáron belüli össztömeghez képest ábrázoltam az össztömeg idővel való változását a kezdeti haló sugáron belül. A tömegarány folyamatosan csökken, ez azt mutatja, hogy a rendszer időben nem stabil. Másik grafikon ábrázolja a kezdeti haló sugáron belüli energia arányát a  $t = 0$  időpontbelihez képest, ez is megerősíti azt, hogy ezek a halók időben nem stabilak. További grafikonokon ábrázoltam a potenciál és a kerületi sebesség idővel való változását, ezek is jelzik az időbeli stabilitás hiányát.

További számításokat végeztem a Tejútrendszer központi anyagsűrűségével megegyező galaxisok esetére. A bozon tömegét és a szóráshosszat úgy választottam meg, hogy a 3.1 ábrán olyan tartományba essenek, ahová az ismert galaxisok átmérője található, illetve az összenergia 4 esetben negatív, 6 esetben pozitív legyen. Ezen számítások eredményeit a 3.5, 3.6, 3.7, 3.8 és 3.9 ábrák valamint a 3.1 és 3.2 táblázatok tartalmazzák. Abban az esetben, ha a kezdeti energia pozitív, a számítások egyértelműen jelzik, hogy a rendszer időben nem stabil. Negatív kezdeti összenergia esetén azonban nem látható egyértelmű időbeli stabilitás, a kezdeti haló sugarán belüli össztömeg csökken, bár sokkal lassabban, mint  $E > 0$  esetén. A 3.6 ábrán az látható, hogy a kezdeti haló sugáron belüli össztömeg 250 millió év után növekedésbe vált át, majd hosszú periódusú oszcilláció jön létre.

## 5. fejezet

# Függelék

A programkódot C-ben kezdtem el fejleszteni, azonban Python-ban folytattam két okból kifolyólag:

- az eredmények grafikus ábrázolása egyszerűbben megoldható Python-ban, ami a fejlesztést elősegíti, mivel a program futása során vizuálisan ellenőrizhetők az aktuális eredmények,
- C-ben a leghosszabb adattípus a *long double*, mely 80 bitet használ fel, ebből 63 bit áll rendelkezésre a tizedesjegyek kijelzésére, ami 19 darab értékes tizedesjegyet jelent, viszont Pythonban ez paraméterezhető (én 50-et állítottam be).

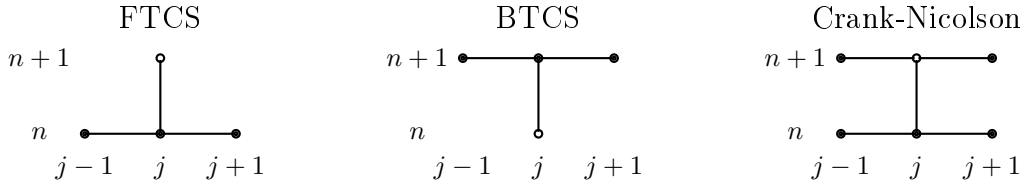
Az általam használt módszereket (a Crank-Nicolson módszert leszámítva) leteszteltem ismert megoldással rendelkező függvényekre, minden esetben megkaptam a pontos megoldást az értékes tizedesjegyek utolsó 2-3 értékétől eltekintve.

### 5.1. A Crank-Nicolson-féle véges differenciák módszere

Parciális differenciálegyenletek numerikus megoldására sokféle módszer létezik. Az FTCS (Forward Time, Centered Space) és BTCS (Backward Time, Centered Space) módszerek átlagolásával kapjuk meg a Crank-Nicolson módszert [15], mely másodrendű pontossággal rendelkezik időben, és általában stabil eljárásnak tekinthető. Előnye egydimenziós esetben az, hogy a keletkező lineáris egyenletrendszer tridiagonális, ezért hatékonyan megoldható. Hátrányaként az időbeli és térbeli lépésköz nem megfelelő megválasztása esetén tapasztalható oszcillációt lehet megemlíteni. A Neumann-féle stabilitás analízis szerint oszcilláció akkor nem lép fel, ha  $\frac{\Delta t}{\Delta x^2} < \frac{1}{2}$ . Ekkor azonban megfelelő pontosság eléréséhez igen hosszú számítási idő társul, ami a módszer

hátrányaként jelentkezik.

A 5.1 ábrán látható a parciális differenciálegyenletek megoldására felhasználható numerikus módszerek közül az FTCS, BTCS és Crank-Nicolson módszer. Az FTCS esetén a  $t_n = n dt$  időpontban, az  $r_{j-1} = (j-1) dr$ ,  $r_j = j dr$  és  $r_{j+1} = (j+1) dr$  térbeli pozíciókban kiszámított függvényértékek alapján tudjuk meghatározni a  $t_{n+1} = (n+1) dt$  időpontbeli  $r_j = j dr$  térbeli pozícióhoz tartozó függvényértéket. BTCS esetén a  $t_{n+1} = (n+1) dt$  időpontbeli valamint  $r_{j-1} = (j-1) dr$ ,  $r_j = j dr$  és  $r_{j+1} = (j+1) dr$  térbeli pozíciókban lévő függvényértékekből határozzuk meg a  $t_n = n dt$  időpontbeli  $r_j = j dr$  térbeli pozícióhoz tartozó függvényértéket. A Crank-Nicolson módszer esetén a  $t_n = n dt$  időpontban, az  $r_{j-1} = (j-1) dr$ ,  $r_j = j dr$ ,  $r_{j+1} = (j+1) dr$  térbeli pozíciókban, valamint a  $t_{n+1} = (n+1) dt$  időpontban, az  $r_{j-1} = (j-1) dr$  és  $r_{j+1} = (j+1) dr$  térbeli pozíciókban kiszámított függvényértékek alapján határozható meg a  $t_{n+1} = (n+1) dt$  időpontbeli és  $r_j = j dr$  térbeli pozícióhoz tartozó függvényérték.



5.1. ábra. Az FTCS, BTCS és Crank-Nicolson módszer.

A Gross-Pitaevskii egyenletet az FTCS módszer segítségével az alábbi formában írhatjuk le:

$$i\hbar \frac{\psi_j^{n+1} - \psi_j^n}{\delta t} = -\frac{\hbar^2}{2m^2} \left( \frac{\psi_{j+1}^n - 2\psi_j^n + \psi_{j-1}^n}{(\delta r)^2} + 4 \frac{\psi_{j+1}^n - \psi_{j-1}^n}{2 \delta (r^2)} \right) + V_j \psi_j^n + \frac{2\pi\hbar^2 a}{m^3} |\psi_j^n|^2 \psi_j^n, \quad (5.1)$$

a BTCS módszer pedig a következő:

$$i\hbar \frac{\psi_j^{n+1} - \psi_j^n}{\delta t} = -\frac{\hbar^2}{2m^2} \left( \frac{\psi_{j+1}^{n+1} - 2\psi_j^{n+1} + \psi_{j-1}^{n+1}}{(\delta r)^2} + 4 \frac{\psi_{j+1}^{n+1} - \psi_{j-1}^{n+1}}{2 \delta (r^2)} \right) + V_j \psi_j^{n+1} + \frac{2\pi\hbar^2 a}{m^3} |\psi_j^{n+1}|^2 \psi_j^{n+1}, \quad (5.2)$$

ahol  $j$  a térbeli,  $n$  az időbeli pozíció sorszámát jelöli. Ha az általunk vizsgált térbeli tartományt egyforma nagyságú  $dr$ , az időfejlődés hosszát  $dt$  hosszúságú intervallumokra osztjuk, akkor például  $\psi_j^{n+1}$  a  $j dr$  helyen és  $(n+1) dt$  időpillanatban jelöli a

hullámfüggvény értékét. A kettő átlagolásával és némi egyszerűsítéssel megkapjuk a Crank-Nicolson-féle összefüggést:

$$i\hbar \frac{\psi_j^{n+1} - \psi_j^n}{\delta t} = \frac{1}{2} \left[ \left( -\frac{\hbar^2}{2m^2} \frac{\psi_{j+1}^{n+1} - 2\psi_j^{n+1} + \psi_{j-1}^{n+1}}{(\delta r)^2} - \frac{\hbar^2}{2m^2} 4 \frac{\psi_{j+1}^{n+1} - \psi_{j-1}^{n+1}}{2 \delta (r^2)} + V_j \psi_j^{n+1} + \frac{2\pi\hbar^2 a}{m^3} |\psi_j^n|^2 \psi_j^{n+1} \right) + \left( -\frac{\hbar^2}{2m^2} \frac{\psi_{j+1}^n - 2\psi_j^n + \psi_{j-1}^n}{(\delta r)^2} - \frac{\hbar^2}{2m^2} 4 \frac{\psi_{j+1}^n - \psi_{j-1}^n}{2 \delta (r^2)} + V_j \psi_j^n + \frac{2\pi\hbar^2 a}{m^3} |\psi_j^n|^2 \psi_j^n \right) \right]. \quad (5.3)$$

Ez láthatóan az első és utolsó pozícióban nem számolható ki, ezért szükségünk van egy olyan módszerre, melyhez a rendelkezésre álló adatok elegendőek. A megoldást az egyenesek módszerének alkalmazásával találtam meg.

## 5.2. Egyenesek módszere

Deriváltak numerikus kiszámítására a következő másodrendben pontos formulát használtam:

$$\frac{du(x_i)}{dx} = \frac{u(x_{i+1}) - u(x_{i-1}))}{2\Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x^2), \quad (5.4)$$

ahol  $u(x)$  a deriválandó függvény,  $i$  a térbeli pozíció sorszáma és  $\Delta x$  a térbeli lépésköz. Az  $i$ . pozícióban szükség van az  $i+1$ . és  $i-1$ . pozícióbeli függvényértékekre, amik az első és utolsó pozícióban nem állnak rendelkezésre. A függvény Taylor-sorba való fejtésével kiküszöbölhetjük az általunk megadott határokon kívüli pozíciókban lévő függvényértékek szükségességét.

Az első pozícióban legyen  $i=1$ , az utolsóban  $i=N$ . Vegyük a második és harmadik függvényértékek Taylor-sorát:

$$u(x_2) = u(x_1) + \frac{du(x_1)}{dx} \Delta x + \frac{1}{2} \frac{d^2u(x_1)}{dx^2} (\Delta x)^2 + \dots \quad (5.5)$$

$$u(x_3) = u(x_1) + \frac{du(x_1)}{dx} (2\Delta x) + \frac{1}{2} \frac{d^2u(x_1)}{dx^2} (2\Delta x)^2 + \dots \quad (5.6)$$

Ha a (5.5) egyenletet beszorozzuk négygel és kivonjuk a (5.6) egyenletből, akkor a másodrendű derivált kiesik, így a következőt kapjuk:

$$4u(x_2) - u(x_3) = 3u(x_1) + \frac{du(x_1)}{dx} (2\Delta x) + \dots \quad (5.7)$$

Az egyenletet átrendezve megkapjuk az első pozícióban való deriváltat:

$$\frac{du(x_1)}{dx} = \frac{4u(x_2) - 3u(x_1) - u(x_3)}{2\Delta x}. \quad (5.8)$$

Hasonlóan vezethetjük le az utolsó pozícióban való deriváltat:

$$\frac{du(x_N)}{dx} = \frac{3u(x_N) - 4u(x_{N-1}) + u(x_{N-2})}{2\Delta x}. \quad (5.9)$$

A második deriváltat is meghatározhatjuk az első deriváltakból, például az első pozícióban a következőképpen:

$$\begin{aligned} \frac{d^2u(x_1)}{dx^2} &= \frac{d}{dx} \frac{du(x_1)}{dx} = \frac{d}{dx} \frac{4u(x_2)}{2\Delta x} - \frac{d}{dx} \frac{3u(x_1)}{2\Delta x} - \frac{d}{dx} \frac{u(x_3)}{2\Delta x} \\ &= \frac{4u(x_3) - 4u(x_1)}{4\Delta x^2} - \frac{3(4u(x_2) - 3u(x_1) - u(x_3))}{4\Delta x^2} - \frac{u(x_4) - u(x_2)}{4\Delta x^2} \\ &= \frac{4u(x_3) - 4u(x_1) - 12u(x_2) + 9u(x_1) + 3u(x_3) - u(x_4) + u(x_2)}{4\Delta x^2} \\ &= \frac{5u(x_1) - 11u(x_2) + 7u(x_3) - u(x_4)}{4\Delta x^2}, \end{aligned} \quad (5.10)$$

illetve az utolsó pozícióban az eredmény:

$$\frac{d^2u(x_N)}{dx^2} = \frac{5u(x_N) - 11u(x_{N-1}) + 7u(x_{N-2}) - u(x_{N-3})}{4\Delta x^2}. \quad (5.11)$$

### 5.3. Tridiagonális egyenletrendszer megoldása

A (5.3) összefüggés segítségével, az együtthatók átrendezése után egy tridiagonális egyenletrendszert kapunk, mely hatékonyan megoldható numerikus módszerrel [16]. Tridiagonálisnak azért nevezzük, mert a mátrix alakban felírt egyenletrendszer együtthatóit tartalmazó mátrixának csak a főátlójában és csak közvetlenül az alatt illetve felett találhatóak nullától különböző elemek.

Tekintsük például az alábbi lineáris egyenletrendszert:

$$\begin{bmatrix} b_1 & c_1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_2 & b_2 & c_2 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & a_3 & b_3 & c_3 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_{N-2} & b_{N-2} & c_{N-2} & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & a_{N-1} & b_{N-1} & c_{N-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & a_N & b_N \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \cdot \\ x_{N-2} \\ x_{N-1} \\ x_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ \cdot \\ d_{N-2} \\ d_{N-1} \\ d_N \end{bmatrix},$$

ahol  $x_i$ -k ismeretlenek. Vezessünk be segédváltozókat úgy, hogy

$$x_{i+1} = g_i x_i + h_i \quad (5.12)$$

legyen. A segédváltozókat felhasználva az alábbi írhatjuk:

$$d_i = a_i x_{i-1} + b_i x_i + c_i x_{i+1} = a_i x_{i-1} + b_i x_i + c_i (g_i x_i + h_i)$$

$$\begin{aligned}
 &= a_i x_{i-1} + (b_i + c_i g_i) x_i + c_i h_i = a_i x_{i-1} + (b_i + c_i g_i) (g_{i-1} x_{i-1} + h_{i-1}) + c_i h_i \\
 &= [a_i + g_{i-1} (b_i + c_i g_i)] x_{i-1} + (b_i + c_i g_i) h_{i-1} + c_i h_i .
 \end{aligned} \tag{5.13}$$

Ez az egyenlet akkor teljesíthető, ha

$$0 = a_i + g_{i-1} (b_i + c_i g_i) , \tag{5.14}$$

$$d_i = (b_i + c_i g_i) h_{i-1} + c_i h_i , \tag{5.15}$$

azaz

$$g_{i-1} = -\frac{a_i}{b_i + c_i g_i} , \tag{5.16}$$

$$h_{i-1} = \frac{d_i - c_i h_i}{b_i + c_i g_i} . \tag{5.17}$$

A segédváltozókat elő tudjuk állítani index szerint visszafelé haladva. A kezdő érték  $c_N = 0$  miatt

$$g_{N-1} = -\frac{a_N}{b_N} , \tag{5.18}$$

$$h_{N-1} = \frac{d_N}{b_N} . \tag{5.19}$$

Az első egyenlet ezért a következőképpen írható fel:

$$b_1 x_1 + c_1 x_2 = d_1 , \tag{5.20}$$

amiben  $x_2$  kifejezhető a (5.12) összefüggés segítségével:

$$b_1 x_1 + c_1 (g_1 x_1 + h_1) = d_1 , \tag{5.21}$$

ebből pedig meg tudjuk határozni  $x_1$ -et:

$$x_1 = \frac{d_1 - c_1 h_1}{b_1 + c_1 g_1} . \tag{5.22}$$

Miután a  $g_i$  és  $h_i$  értékek rendelkezésre állnak, indexben előre haladva a (5.12) formula segítségével kiszámolhatjuk a keresett  $x_i$  értékeket.

### 5.3.1. A Woodbury-Sherman-Morrison formula

Az egyenesek módszerének alkalmazása miatt az egyenletrendszer nem teljesen tridiagonális, az együttható mátrixban a  $c_1$ -hez képest jobbra lévő két elem, illetve az  $a_N$ -hez képest balra lévő két elem különbözik nullától. Ebben az esetben az egyenletrendszer megoldására a Woodbury-Sherman-Morrison formula használható.

Ha a tridiagonális rendszerhez képest a mátrixban a főátlón és a közvetlenül alatta és felette található pozíciókon kívül is található nullától különböző elem, például a  $c_1$ -hez képest jobbra lévő elem, illetve az  $a_N$ -hez képest balra lévő elem nem nulla, akkor

az egyenletrendszer megoldása a következő. Legyen  $\mathbf{A}$  tridiagonális mátrix,  $\mathbf{u}$  és  $\mathbf{v}$  egy olyan oszlop- és sorvektor, melyek szorzata előállítja a tridiagonális mátrixhoz képesti különbséget. Az általunk vizsgált mátrix inverzét megadhatjuk az alábbi módon [12]:

$$\begin{aligned} (\mathbf{A} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}^T)^{-1} &= (\mathbf{1} + \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}^T)^{-1} \cdot \mathbf{A}^{-1} \\ &= (\mathbf{1} - \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}^T + \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}^T \cdot \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}^T - \dots)^{-1} \cdot \mathbf{A}^{-1} \\ &= \mathbf{A}^{-1} - \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}^T \cdot \mathbf{A}^{-1} (1 - \lambda + \lambda^2 - \dots) \\ &= \mathbf{A}^{-1} - \frac{(\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{u}) (\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}^{-1})^T}{1 + \lambda}, \end{aligned} \quad (5.23)$$

ahol

$$\lambda \equiv \mathbf{v} \cdot \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{u}. \quad (5.24)$$

A (5.23) összefüggést Sherman-Morrison formulának hívjuk.

Ha az inverz mátrix kiszámítása időigényes vagy a tárolása problematikus, akkor az alábbi egyenletre:

$$(\mathbf{A} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}^T) \cdot \mathbf{x} = \mathbf{d}, \quad (5.25)$$

a következő algoritmust használhatjuk. A tridiagonális egyenletrendszerhez használható módszer segítségével meghatározzuk  $\mathbf{y}$ -t és  $\mathbf{z}$  a következő egyenletekből:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{d}, \quad \mathbf{A} \cdot \mathbf{z} = \mathbf{u}, \quad (5.26)$$

majd ezek segítségével kiszámolhatjuk a keresett  $\mathbf{x}$ -et:

$$\mathbf{x} = \mathbf{y} - \left[ \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{y}}{\mathbf{1} + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{z})} \right] \mathbf{z}. \quad (5.27)$$

Ha a tridiagonális mátrixhoz viszonyítva az előző esethez képest több eltérés is található az együttható mátrixban, akkor a Sherman-Morrison formula blokkmátrix verzióját használhatjuk:

$$(\mathbf{A} + \mathbf{U} \cdot \mathbf{V}^T)^{-1} = \mathbf{A}^{-1} - \left[ \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{U} \cdot (\mathbf{1} + \mathbf{V}^T \cdot \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{U})^{-1} \cdot \mathbf{V}^T \cdot \mathbf{A}^{-1} \right], \quad (5.28)$$

melyet Woodbury, vagy Woodbury-Sherman-Morrison formulának hívnak. Ebben az esetben a megoldandó egyenletrendszer a következő:

$$\left( \mathbf{A} + \sum_{k=0}^{P-1} \mathbf{u}_k \cdot \mathbf{v}_k^T \right) \cdot \mathbf{x} = \mathbf{d}, \quad (5.29)$$

ahol  $P$  a korrekciók száma. Először az alábbi egyenletrendszereket kell megoldani a  $\mathbf{z}_i$  vektorokra:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \cdot \mathbf{z}_1 &= \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{A} \cdot \mathbf{z}_2 &= \mathbf{u}_2 \\ &\vdots \\ \mathbf{A} \cdot \mathbf{z}_P &= \mathbf{u}_P \end{aligned}, \quad (5.30)$$



majd a  $\mathbf{z}_i$  vektorokból oszloponként össze kell rakni a  $\mathbf{Z}$  vektort:

$$\mathbf{Z} \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{z}_1 & \dots & \mathbf{z}_P \end{bmatrix} . \quad (5.31)$$

Következő lépésként ki kell számolni a  $P \times P$  mátrix inverzét:

$$\mathbf{H} \equiv (\mathbf{1} + \mathbf{V}^T \cdot \mathbf{Z})^{-1} , \quad (5.32)$$

majd egy újabb  $\mathbf{y}$  változóra az alábbi egyenletrendszert megoldani:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{d} , \quad (5.33)$$

végül a keresett  $\mathbf{x}$  vektor így határozható meg:

$$\mathbf{x} = \mathbf{y} - \mathbf{Z} \cdot [\mathbf{H} \cdot (\mathbf{V}^T \cdot \mathbf{y})] . \quad (5.34)$$

## 5.4. A Numerov-módszer

A Poisson-egyenlet megoldására gömbszimmetrikus esetben jól használható ez a módszer. Ahhoz, hogy használni tudjuk ebben az esetben, az alábbi helyettesítést kell alkalmazni:

$$V(r) = \frac{1}{r}\phi(r) . \quad (5.35)$$

A Poisson-egyenlet így egyszerűbb alakba írható át:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial r^2} \left( \frac{1}{r}\phi \right) + 4 \frac{\partial}{\partial (r^2)} \left( \frac{1}{r}\phi \right) &= \frac{\partial}{\partial r} \left( \phi \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \phi \right) + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r}\phi \right) \\ &= \frac{-1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \phi + \phi \frac{\partial}{\partial r} \frac{-1}{r^2} + \frac{\partial}{\partial r} \phi \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} \phi + \frac{2}{r} \left( \phi \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \phi \right) \\ &= \frac{-1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \phi + \phi \frac{2}{r^3} + \frac{-1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \phi + \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} \phi + \frac{2}{r} \phi \frac{-1}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \phi \\ &= \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} \phi = m |\psi|^2 , \end{aligned}$$

azaz

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} = rm |\psi|^2 = S(r) . \quad (5.36)$$

A Numerov-módszer [13] a következőképpen származtatható. Vegyük a második derivált hárompontos formuláját [13]:

$$\frac{\phi_{n+1} - 2\phi_n + \phi_{n-1}}{h^2} = \phi_n'' + \frac{h^2}{12} \phi_n'''' + \mathcal{O}(h^4) , \quad (5.37)$$

ahol  $\phi_n''$  második,  $\phi_n''''$  negyedik derivált az  $r_n$  pontban,  $h$  pedig a térbeli lépésköz. A negyedik deriváltat felírhatjuk a következőképpen is ( (5.36)-ból):

$$\phi_n'''' = \left. \frac{\partial^2}{\partial r^2} S(r) \right|_{r=r_n} . \quad (5.38)$$

$S(r_n)$ -t  $S_n$ -nel jelölve az alábbi formát kapjuk:

$$\phi_n'''' = \frac{S_{n+1} - 2S_n + S_{n-1}}{h^2} + \mathcal{O}(h^2) , \quad (5.39)$$

melyet behelyettesítve a (5.37) összefüggésbe a következőt kapjuk:

$$\frac{\phi_{n+1} - 2\phi_n + \phi_{n-1}}{h^2} = S_n + \frac{h^2}{12} \frac{S_{n+1} - 2S_n + S_{n-1}}{h^2} + \mathcal{O}(h^4) , \quad (5.40)$$

az egyszerűsítések elvégzése és az átrendezést követően megkapjuk a Numerov formulát:

$$\phi_{n+1} = 2\phi_n - \phi_{n-1} + \frac{h^2}{12} (S_{n+1} - 2S_n + S_{n-1}) + \mathcal{O}(h^6) , \quad (5.41)$$

mely hatodrendben pontos. Ez a módszer felhasználható növekvő vagy csökkenő  $n$  szerint is.

Növekvő  $n$  választással azt a problémát tapasztalhatjuk, hogy az  $r = 0$  pontban nem tudjuk kiszámítani a potenciált, ami a rekurzió elkezdéséhez szükséges. A megoldás numerikus kvadratúra alkalmazása lehet. Az  $r$  pontban a potenciált meg tudjuk határozni az alábbi integrál segítségével:

$$V(r) = -4\pi Gm \int_r^\infty \rho r dr . \quad (5.42)$$

Az integrál kiszámítására jól használható a Simpson formula.

Ha csökkenő  $n$  mellett döntünk, akkor a potenciálra határfeltételként azt választhatjuk, hogy a végtelenben zérus lesz. Így a potenciál egy gömb alakú testen kívül a következőképpen határozható meg:

$$V(r) = -\frac{GM}{r} , \quad (5.43)$$

ahol  $M$  a test tömege. Ezzel a módszerrel elkerülhető az  $r = 0$  helyen a potenciál előre való kiszámítása, azonban a nullával való osztás miatt itt is egyéb módszert kell alkalmazni.

Ha ismerjük a potenciált az  $r = dr$ ,  $r = 2dr$  és  $r = 3dr$  helyeken, akkor az egyenesek módszerét alkalmazva kiszámolhatjuk az  $r = 0$  pontban is:

$$\begin{aligned} 4\pi Gm^2 |\psi|^2 &= \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + 4 \frac{\partial V}{\partial r^2} \\ &= \frac{5V(0) - 11V(1) + 7V(2) - V(3)}{4(\Delta r)^2} + 4 \frac{4V(1) - 3V(0) - V(2)}{2\Delta(r)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \left( \frac{5}{4(\Delta r)^2} - \frac{12}{2\Delta(r)^2} \right) V(0) + \frac{-11V(1) + 7V(2) - V(3)}{4(\Delta r)^2} + \frac{16V(1) - 4V(2)}{2\Delta(r)^2} \\
 &= \left( \frac{5}{4(\Delta r)^2} - \frac{6}{\Delta(r)^2} \right) V(0) - \frac{11V(1) - 7V(2) + V(3)}{4(\Delta r)^2} + \frac{8V(1) - 2V(2)}{\Delta(r)^2} .
 \end{aligned}$$

Átrendezést követően:

$$\begin{aligned}
 &\left( \frac{5}{4(\Delta r)^2} - \frac{6}{\Delta(r)^2} \right) V(0) \\
 &= 4\pi Gm\rho(0) + \frac{11V(1) - 7V(2) + V(3)}{4(\Delta r)^2} - \frac{8V(1) - 2V(2)}{\Delta(r)^2} . \quad (5.44)
 \end{aligned}$$

Mivel az első pozícióban  $(\Delta r)^2 = \Delta(r)^2 = (dr)^2$ , ezért:

$$-19V(0) = 4\pi Gm\rho(0) \cdot 4(dr)^2 + 11V(1) - 7V(2) + V(3) - 32V(1) + 8V(2) ,$$

amit átrendezve az alábbi összefüggéshez jutunk:

$$V(0) = \frac{21V(1) - V(2) - V(3) - 16\pi Gm\rho(0)(dr)^2}{19} . \quad (5.45)$$

## 5.5. Integrálás Simpson módszerrel

A programkódban a különböző integrálok kiszámításához ezt a módszert alkalmaztam. Alapfeltétele, hogy az integrálandó tartományt páros számú, egyenlő hosszúságú részre kell osztani. Ez a módszer az integrálandó görbét egy parabolához próbálja illeszteni a megadott pontok alapján.

A Simpson-szabály [17] egy lépés esetén a következő:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{3} [f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)] , \quad (5.46)$$

ahol  $h = \frac{b-a}{2}$ . Az integrálandó tartományt  $2n$  részre osztva az integrál az alábbiak szerint számítható ki:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{3} [f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + \dots + 4f(x_{2n-1}) + f(x_{2n})] , \quad (5.47)$$

ahol  $h = \frac{b-a}{2n}$ . Ez megfelelő számú  $n$  esetén jó közelítést ad, továbbá akkor alkalmazható jó eredményességgel, ha a függvény elegendően sima.

# Irodalomjegyzék

- [1] Dwornik, M., Keresztes, Z., Gergely, L.Á., 2013, Rotation curves in Bose-Einstein Condensate Dark Matter Halos, a Kinjo, Niro, Nakajima, Akira, Recent Developments in Dark Matter Research, 2014, Nova Publishers, New York könyv 6. fejezete
- [2] Guzmán, F.S., Lora-Clavijo, F.D., González-Avilés, J.J., Rivera-Paleo, F.J., Stability of BEC galactic dark matter halos, JCAP **09**, 034 (2013)
- [3] Planck Collaboration, Planck 2013 results. XVI. Cosmological parameters, publikálásra elfogadva Astronomy & Astrophysics-ban, 2013, [http://planck.caltech.edu/pub/2013results/Planck\\_2013\\_results\\_16.pdf](http://planck.caltech.edu/pub/2013results/Planck_2013_results_16.pdf)
- [4] Navarro, J.F., Frenk, C.S., White, S.D.M., 1996, ApJ **462**, 563
- [5] Burkert, A., 1997, Aspects of Dark Matter in Astro-and Particle Physics
- [6] Ketterle, W., van Druten N.J., Bose-Einstein condensation of a finite number of particles trapped in one or three dimensions, 1996, Phys. Rev. A **54**, 656
- [7] Kristen, K., Toms, D.J., 1996, Bose-Einstein condensation of atomic gases in a general harmonic oscillator confining potential trap, Phys. Rev. A **54**, 4188 (1996)
- [8] de Souza, J. C. C., Pires, M. O. C., Discussion on the energy content of the galactic dark matter Bose-Einstein condensate halo in the Thomas-Fermi approximation, JCAP **03**, 010 (2013)
- [9] Chavanis, Pierre-Henri, Mass-radius relation of Newtonian self-gravitating Bose-Einstein condensates with short-range interactions: I. Analytical results, Phys. Rev. D **84**, 043531 (2011)
- [10] Mass-radius relation of Newtonian self-gravitating Bose-Einstein condensates with short-range interactions: II. Numerical results, Phys. Rev. D **84** 043532 (2011)
- [11] Toth, Viktor T., Self-gravitating Bose-Einstein condensates and the Thomas-Fermi approximation [arXiv: 1402.0600v2]

- [12] Press, William H., Teukolsky, Saul A., Vetterling, William T., Flannery, Brian P., Numerical Recipes in C, Third Edition, Cambridge University Press, 2007
- [13] Koonin, S. E., Meredith, D. C., Computational Physics, 1990, Addison-Wesley
- [14] Madarassy, Enikő J. M., Toth, Viktor T., Numerical simulation code for self-gravitating Bose-Einstein condensates, Computer Physics Communication **184**, 1339 (2013)
- [15] Crank, J., Nicolson, P., 1947, A practical method for numerical evaluation of solutions of partial differential equations of the heat conduction type; Proc. Camb. Phil. Soc. **43** (1): 50-67.
- [16] Bartha, Ferenc, Számítógépes Fizika, előadás jegyzet, <http://www.staff.u-szeged.hu/~barthaf/Publish/CompPhys.htm>
- [17] Heath, Michael T., Scientific Computing, An Introductory Survey, 1997, McGraw-Hill

# Köszönetnyilvánítás

Ezúton szeretnék köszönetet mondani témavezetőmnek, Keresztes Zoltánnak, hogy szakmai tanácsaival, észrevételeivel kitartóan segítette munkámat.

# Nyilatkozat

Alulírott Kivés Miklós, fizika BSc szakos hallgató, kijelentem, hogy a diplomadolgozatban foglaltak saját munkám eredményei, és csak a hivatkozott forrásokat (szakirodalom, eszközök, stb.) használtam fel.

Tudomásul veszem azt, hogy szakdolgozatomat a Szegedi Tudományegyetem könyvtárában, a kölcsönözhető könyvek között helyezik el.

2014. május 17.

.....  
Kivés Miklós