

Spin-dominált gravitációs hullámformák Fisher-mátrix analízise

TDK DOLGOZAT

Kövér Krisztina
Fizika BSc szakos hallgató

Témavezetők:

Dr. Gergely Árpád László, egyetemi tanár
Dr. Mikóczy Balázs, tudományos munkatárs

SZEGEDI TUDOMÁNYEGYETEM
ELMÉLETI ÉS KÍSÉRLETI FIZIKAI TANSZÉK

Szeged
2017

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés	3
2. Fisher-mátrix analízis	7
2.1. Metódus, elméleti háttér	7
2.2. Analízis egyszerű hullámformákon	8
3. Spines fekete lyuk kettősök dinamikája körpálya közelítésben	11
3.1. Bázisok meghatározása, azok időfejlődése	11
3.2. Euler-szögek időfejlődése	15
3.2.1. Az α inklináció	15
3.2.2. A ϕ_n felszálló csomó hossza	16
3.2.3. A ψ_c szög	17
3.3. Spin-szögek időfejlődése	17
3.3.1. A κ_i spin polár szög	17
3.3.2. A ψ_i spin azimutális szög	19
3.3.3. A gyorsulásvektorok meghatározása	20
4. Frekvenciafüggő spin-dominált hullámforma	23
4.1. Időfüggő spin-dominált hullámforma, vezető rendben	23
4.1.1. A vezető rendű spin-dominált hullámforma	23
4.1.2. Dinamikai egyenletek spin-dominált esetben	25
4.1.3. Időátlagolt egyenletek	26
4.2. Transzformáció frekvenciatérbe	27
4.3. Antennafüggvények	30
5. Spin-dominált hullámforma Fisher-analízise	33
6. Összefoglalás, további tervek	37
7. Köszönetnyilvánítás	39

8. Függelék	41
8.1. Kutatási feladatok bemutatása	41
8.2. Dinamika - kiegészítés	42

1. fejezet

Bevezetés

Az első gravitációelmélet Newton nevéhez köthető. A Newton-féle gravitációs potenciál Poisson-egyenletet teljesít, azaz a gravitáció terjedési sebességére végtelent ad. Gyenge gravitáció leírására alkalmas ugyan, ám a bolygók, például a Merkúr perihélium precessziójára már nem ad a megfigyelésekkel egyező értéket, és a GPS működtetésére is alkalmatlan.

A jelenleg érvényesnek elfogadott gravitációelmélet az Einstein féle általános relativitáselmélet. Ebben a gravitációs perturbációk hullámegyenletet teljesítenek, amelyből a gravitáció terjedési sebességére a fénysebességet kapjuk.

Einstein relativitáselmélete egy évszázada jósolta meg a gravitációs hullámok létezését. Az elmélet szerint a gravitációs hullámok a téridő görbületének h_{ab} perturbációi. Gyenge tér közelítés esetén a g_{ab} metrikájú téridő a η_{ab} metrikájú Minkowski téridő perturbációjaként tekinthető ($g_{ab} = \eta_{ab} + h_{ab}$, valamint $h_{ab} \ll 1$ és $\partial_c h_{ab} \ll 1$). A perturbáció a

$$\square h_{ab} = -16\pi G \left(T_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} T \right) \quad (1.1)$$

inhomogén hullámegyenletet teljesít, ahol $\square = \partial_a \partial^a$ a D'Alambert operátor, G a gravitációs állandó, T_{ab} az anyag és (gravitációtól különböző) energiaformák energia-impulzus tenzora, T pedig annak a spúrja. Földi megfigyelés esetén jogos a gyenge tér közelítés, ugyanis a földi tér jó közelítéssel Minkowski (azaz sík). A gravitációs hullámok sem okoznak ebben „nagy” változást, ugyanis a Földig megtett hosszú út alatt, az amplitúdójuk jelentős mértékben lecsökken. Például a 2015 szeptemberében detektált GW150914 első gravitációs hullám [1] mintegy 400 Mpc távoli forrástól érkezett, ott mintegy 3 naptömegnyi energia felszabadulással járt, azonban a földi detektorokban csak a proton méretének ezredrésznyi változását okozta.

A gravitációs hullámok legfőbb forrásai kompakt kettős rendszerek, azaz neutron csillag - neutron csillag, neutron csillag - fekete lyuk, fekete lyuk - fekete lyuk kettősök. Ennek oka az hogy a gravitációs sugárzás kvadrupól jellegű sugárzás, azaz létrejöttéhez a kvadrupól momentum jelentős változása szükséges rövid idő alatt, mint a kompakt

kettős rendszerekben. De forrás lehet akár egy aszimmetrikus szupernóva robbanás, vagy egy egyenetlen felszínű gyorsan forgó neutroncsillag (körülbelül 1mm-es felszíni magasságváltozás a neutroncsillag esetében már hegynek számít).

Közvetett igazolást a gravitációs hullámok létezésére a Hulse-Taylor kettős pulzár [2] pályaperiódusa csökkenésének mérése adott, ami összhangban volt azzal, hogy a számítások szerint a gravitációs hullámok mennyi energiát vinnének el a rendszerből, és így mennyivel kell csökkennie a pályaperiódusnak.

Fizikusok és mérnökök több mint 30 éves munkájának köszönhetően a gravitációs hullámok közvetlen detektálására is sor került az Advanced LIGO detektorokkal 2015. szeptember 14-én [1], majd ezt követően decemberben is detektáltak egy újabb hullámot [3].

A detektálási módszer [4] az úgynevezett „*matched filtering*” technikán alapszik. Először a kettős rendszerek dinamikájából elméleti úton számítják a gravitációs hullámok mérendő alakját. Ezt követően a zajjal terhelt jelben illesztéssel keresik a már korábban előállított hullámformákat. Detektálásról akkor beszélünk, ha mind a két jelenleg működő LIGO detektorban megjelenik ugyanaz a jel.

A detektálásnak nem csak az az igazán nagy jelentősége, hogy igazolja a gravitációs hullámok létezését. Hanem az is, hogy amikor majd a jelenlegi kettőnél több detektorral észleljük őket, a források paramétereinek meghatározása lehetőséget teremt egyéb észlelésekkel való összevetésre. Várhatóan a felszabaduló nagyenergiájú gravitációs hullámok a környezetükkel való kölcsönhatás során létrehoznak nagyenergiájú részecskéket és elektromágneses sugárzást (mely rádió-, infra-, látható-, ultraibolya-, röntgen- vagy gamma-tartományban észlelhető). Szintén érdekes, hogy gravitációs hullámokkal az első csillagok megszületése előtti időkben is szerezhető információ, mely az Univerzum struktúráinak kialakulása szempontjából érdekes.

A detektált jel alakja a kibocsájtó rendszer tulajdonságainak a függvénye. Azaz megfelelő fizikai és matematikai eszközökkel a kettős rendszer fizikai paraméterei meghatározhatóak. Viszont mint minden mérés, ez is hibával terhelt. Ezt a hibát nem tudjuk a mérés többszöri reprodukciójából származtatni, ugyanis a detektálás, még ha több detektorral történik is, egyszeri. Így más statisztikai eszközöket kell alkalmaznunk a paraméterek hibáinak a becslésére, és ez a Fisher-mátrix analízis [5].

A dolgozat célja a Fisher-mátrix analízis elsajátítása és alkalmazása az SZTE Gravitációs csoport által bevezetett spin-dominált hullámforma (SDW) [6] vezető rendű alakjára.

A dolgozat szerkezete a következő. A második fejezetben áttekintjük a Fisher-analízis elméleti hátterét és annak metódusát [7] alapján, és elvégezzük néhány eredményének reprodukcióját.

Ezt követően a spin-dominált hullámforma analíziséhez szükséges eszközöket dolgozzuk ki. A harmadik fejezetben előállítjuk [8], [9], [10] és [11] módszereit követve a

spin-dominált kompakt kettősök dinamikáját körpálya közelítésben, felírjuk a hullámforma paramétereinek fejlődési egyenleteit, és ezeknek kiszámoljuk a szekulárisan (egy pályaperiódusra vett) átlagolt alakját. Az így kapott explicit hullámformát a negyedik fejezetben a stacionárius fázis közelítés segítségével frekvenciatérbe transzformáljuk [12], [13] és [14] alapján. Megadjuk a detektor, a hullám polarizációjának és forrásnak relatív helyzetét megadó antennafüggvényeket [15], [16].

Miután minden szükséges eszközt előállítottunk, az ötödik fejezetben elvégezzük az SDW plusz és keresztirányú polarizációjára a Fisher-mátrix analízist. Megvizsgáljuk, hogy a paraméterek relatív hibái hogyan változnak az össztömeg, a tömegarány, a látóirány szögének illetve a domináns spin nagyságának változására. Az analízist egy detektoros mérésre végezzük.

2. fejezet

Fisher-mátrix analízis

2.1. Metódus, elméleti háttér

A Fisher-mátrix analízis egy Bayes-statisztikai módszer, paraméterek hibáinak és a paraméterek közötti korrelációk becslésére. Az analízis használata széles körben elterjedt azon problémák esetén, ahol paraméterbecslés szükséges, azaz nem speciálisan gravitációs hullámok analíziséhez fejlesztett matematikai eljárás.

Az analízis feltétele, hogy a vizsgálandó jelalakot frekvenciafüggő alakban adjuk meg, melyet jelöljünk $h(f)$ -fel. Amennyiben a kezdeti jelalak időfüggő, és nem frekvenciafüggő, Fourier-transzformáció segítségével a jelalakot frekvenciatérbe transzformáljuk.

Ezt követően az analízis első lépéseként elő kell állítanunk a $\mathbf{\Gamma}_{ab}$ Fisher-információs mátrixot, mely definíció szerint

$$\mathbf{\Gamma}_{ab} = 2 \int_0^\infty \frac{\mathbf{H}_{ab}}{S(f)} df. \quad (2.1)$$

Itt $\mathbf{H}_{ab} = \frac{\partial h}{\partial \lambda^a} \frac{\partial h^*}{\partial \lambda^b} + \frac{\partial h}{\partial \lambda^b} \frac{\partial h^*}{\partial \lambda^a}$, ahol λ_a a jelalakban megjelenő valamely paraméter, h^* a jelalak komplex konjugáltja, $S(f)$ pedig a detektor zajfüggvénye.

A számunkra szükséges információkat a $\mathbf{\Sigma}_{ab}$ kovariancia-mátrix hordozza, mely a Fisher-mátrix inverzeként áll elő:

$$\mathbf{\Sigma}_{ab} = (\mathbf{\Gamma}_{ab})^{-1}. \quad (2.2)$$

A kovariancia-mátrix diagonális elemei megadják az egyes paraméterek négyzetes középértékeit

$$\Delta \lambda_a = \sqrt{\mathbf{\Sigma}_{aa}}, \quad (2.3)$$

a paraméterek közötti korrelációkról pedig az off-diagonális elemek adnak informáci-

ót:

$$c_{\lambda_a \lambda_b} = \frac{\Sigma_{ab}}{(\Sigma_{aa} \cdot \Sigma_{bb})^{1/2}}. \quad (2.4)$$

A korrelciók a $[-1,1]$ tartományon értelmezettek, és akkor beszélünk erős korrelációról ha $|c_{\lambda_a \lambda_b}| \rightarrow 1$. Az egyes paraméterek közötti esetleges erős korreláció azt vonja maga után, hogy a paramétereknek létezik olyan lineárkombinációja, amely pontosabban meghatározható, mint az egyes paraméterek önmagukban (korrelációs ellipszis).

A jel/zaj viszonyt (SNR = signal to noise ratio) az

$$(SNR)^2 = 4 \int_0^\infty \frac{|h(f)|^2}{S(f)} df \quad (2.5)$$

integrállal számíthatjuk.

2.2. Analízis egyszerű hullámformákon

Az analízis módszerének elsajátítása érdekében, elvégezzük a [7] cikkben található három egyszerűbb hullámforma Fisher-analízisének reprodukcióját. A reprodukció során a G gravitációs állandót és a c fénysebességet egynek vesszük, és minden más paramétert másodperc egységekben adunk meg, melyre a váltószám naptömegre például $1M_\odot = 4,962 \cdot 10^{-6}s$.

A hullámformákat mindhárom esetben a

$$h(f) = \mathcal{A} f^{-7/6} e^{i\Psi} \quad (2.6)$$

alakban adjuk meg, ahol \mathcal{A} a gravitációs hullám amplitúdója, Ψ a fázisa. Az amplitúdót a következő modellekben függetlennek tekintjük a többi paramétertől, így az a jel/zaj viszony és a detektor zajfüggvényének ismeretében (2.5) alapján az amplitúdó az

$$\mathcal{A} = \left(\frac{(SNR)^2}{4 \int_0^\infty \frac{f^{-7/3}}{S(f)} df} \right)^{1/2} \quad (2.7)$$

összefüggéssel számítható.

Zajfüggvényként használjuk az [7] irodalom (2.1) összefüggése által a LIGO detektorra megadott

$$S(f) = S_0 \left\{ \left(\frac{f_0}{f} \right)^4 + 2 \left[1 + \left(\frac{f}{f_0} \right)^2 \right] \right\} \quad (2.8)$$

empirikus zajfüggvényt, ahol $S_0 = 3 \cdot 10^{-48} Hz^{-1}$ és $f_0 = 70 Hz$.

Az analízis során az integrálok határait közelítést alkalmazunk, így az alsó integrálási határ esetén 0-ról áttérünk f_{\min} -re, a felső integrálási határként pedig ∞ -ről

pedig f_{\max} -ra a következő módon. A zajfüggvény érvényessége $10Hz$ fölött van, ugyanis ez alatt a szeizmikus rezgésekből fakadó zaj végtelennek tekinthető ($S(f) \rightarrow \infty$ ha $f < 10Hz$), így $f_{\min} = 10Hz$. A felső határt a kettős összeolvadás előtti körfrekvenciájából származtatva adhatjuk meg, amely a legbelső stabil körpálya (ISCO = *innermost stabil circle orbit*) definíciójából $f_{\max} = (6^{3/2}G\pi m/c^3)^{-1}$, ahol $m = m_1 + m_2$ az össztömeg.

Elsőként tekintsünk egy hullámformát newtoni (N) közelítésben, mely esetben a fázis

$$\Psi_N = 2\pi ft_c - \phi_c - \frac{\pi}{4} + \frac{3}{8} (8\pi\mathcal{M}f)^{-5/3}, \quad (2.9)$$

ahol \mathcal{M} a chirp-tömeg, mely definíció szerint $\mathcal{M} = (m_1 m_2)^{3/5} (m_1 + m_2)^{-1/5}$, t_c az "összeolvadás" időpontja, ϕ_c pedig integrálási konstans. Az analízis paramétertere legyen $\mathcal{P}_N = \{\ln \mathcal{A}, \ln \mathcal{M}, t_c, \phi_c\}$. Az amplitúdónak és a chirp-tömegnek a logaritmusát vesszük, így ezen paramétereknek az abszolút hibáit kapjuk. Az SNR=10 választás esetén, a hibákra és korrelációkra kapott eredményeket az 2.1 táblázat tartalmazza.

$M_1 [M_\odot]$	$M_2 [M_\odot]$	$\Delta\mathcal{M}/\mathcal{M} [\%]$	Δt_c	$\Delta\phi_c$	$c_{\mathcal{M}t_c}$	$c_{\mathcal{M}\phi_c}$	$c_{t_c\phi_c}$
1,4	1,4	0,00125	0,42	0,25	-0,501	-0,719	0,856
1,4	10	0,00129	0,49	0,29	-0,553	-0,740	0,887
1	15	0,00132	0,55	0,31	-0,581	-0,752	0,903
5	15	0,00135	0,60	0,33	-0,605	-0,763	0,915
10	15	0,00139	0,69	0,36	-0,633	-0,776	0,928

2.1. táblázat. A kapott eredményeken látjuk, hogy a chirp-tömeg egy kifejezetten jól mérhető mennyiség, hibája nagyobb tömegek esetén is csak alig néhány ezred százalék. A tömegek növekedésével a hibák növekvő tendenciát mutatnak, a korrelációk pedig erősödnek az egyes paraméterek között. Az amplitúdó hibája, melyet nem tartalmaz a táblázat, minden esetben 0,1 értéket vesz fel, illetve korrelációja a többi paraméterrel nulla. Ez összhangban van a várakozásainkkal, ugyanis a problémát úgy fogalmaztuk meg, hogy az amplitúdó nem függ a többi paramétertől.

A második vizsgált hullámforma az első kiegészítése az első rendű posztnewtoni (PN) járulékokkal illetve a vezető rendű uszálytaggal. Ekkor a fázis

$$\Psi_{PN} = 2\pi ft_c - \phi_c - \frac{\pi}{4} + \frac{3}{8} (8\pi\mathcal{M}f)^{-5/3} \times \left[1 + \frac{20}{9} \left(\frac{743}{336} + \frac{11\mu}{4m} \right) x - 16\pi x^{3/2} \right], \quad (2.10)$$

ahol új változók a $\mu = m_1 m_2 / m$ redukált tömeg és az $x = (\pi m f)^{2/3}$. A paraméterter kiegészül a redukált tömeggel, így $\mathcal{P}_{PN} = \{\ln \mathcal{A}, \ln \mathcal{M}, \ln \mu, t_c, \phi_c\}$. Az amplitúdót továbbra is független paraméternek tekintjük. Az analízis eredményét a (2.2) tartalmazza.

$M_1 [M_\odot]$	$M_2 [M_\odot]$	$\Delta\mathcal{M}/\mathcal{M} [\%]$	$\Delta\mu/\mu [\%]$	Δt_c	$\Delta\phi_c$	$c_{\mathcal{M}\mu}$	$c_{\phi_c\mu}$
1,4	1,4	0,0040	0,41	0,71	1,28	0,906	0,979
1,4	10	0,0204	0,54	1,01	1,64	0,927	0,983
1	15	0,0207	0,42	1,24	1,88	0,934	0,985
5	15	0,114	1,52	1,44	2,02	0,954	0,984
10	15	0,235	2,44	1,77	2,30	0,964	0,985

2.2. táblázat. Az eredményeken látjuk, hogy a tömegparaméterek hibái az össztömeg növekedésével nagyságrendekkel nőnek. A hibák mellett a tömegparaméterek korrelációja is erős, amiből az következik, hogy a két tömegparaméter, az \mathcal{M} és μ egymás lineárkombinációjaként határozhatók meg.

Harmadik jelalakként kiegészítjük a második jelalakot a vezető rendű spin-pálya (SO = *spin-orbit*) kölcsönhatási taggal. A fázis így

$$\Psi_{SO} = 2\pi f t_c - \phi_c - \frac{\pi}{4} + \frac{3}{8} (8\pi \mathcal{M} f)^{-5/3} \times \left[1 + \frac{20}{9} \left(\frac{743}{336} + \frac{11\mu}{4m} \right) x - (4\beta - 16\pi) x^{3/2} \right], \quad (2.11)$$

ahol új paraméter a β dimenziómentes spin paraméter. A paramétertér, amelyre az analízist végezzük $\mathcal{P}_{SO} = \{\ln \mathcal{A}, \ln \mathcal{M}, \ln \mu, \beta, t_c, \phi_c\}$. Az analízis eredményét a (2.2) tartalmazza.

$M_1 [M_\odot]$	$M_2 [M_\odot]$	$\Delta\mathcal{M}/\mathcal{M} [\%]$	$\Delta\mu/\mu [\%]$	$\Delta\beta$	Δt_c	$\Delta\phi_c$	$c_{\mathcal{M}\mu}$	$c_{\mathcal{M}\beta}$	$c_{\mu\beta}$
1,4	1,4	0,034	9,68	1,24	1,13	4,09	-0,988	0,993	-0,9991
1,4	10	0,191	15,27	1,99	2,04	6,25	-0,990	0,994	-0,9993
1	15	0,207	12,18	1,58	2,76	7,75	-0,991	0,995	-0,9994
5	15	1,069	76,65	11,41	3,53	9,27	-0,992	0,994	-0,9998
10	15	2,255	169,9	26,69	4,74	11,50	-0,956	0,995	-0,9999

2.3. táblázat. Az eredményeken látjuk, hogy a vezető rendű spin-pálya kölcsönhatási tag bevezetésével a becsült hibák már nem túl nagy össztömeg esetén is drasztikusan romlanak. A spin megjelenése a jelalakban tehát az egyes paraméterek jól meghatározhatóságát lerontja.

Mindhárom hullámforma analíziséhez a szükséges programot a „*Mathematica*” szimbolikus programnyelv segítségével írtuk meg.

3. fejezet

Spines fekete lyuk kettősök dinamikája körpálya közelítésben

Ahhoz, hogy a kompakt kettősök által keltett gravitációs hullámokra konkrét összefüggéseket tudjunk megadni, azaz hogy eljussunk arra a pontra, hogy a fenti $h(f)$ jelalakokhoz hasonló formulákat kaphassunk, először az adott kettős dinamikai egyenleteinek fejlődését kell meghatároznunk. Ehhez bázisokat kell megadnunk, amelyekben a rendszert vizsgáljuk, és meg kell határoznunk ezek fejlődését az időben. Ezt követően meghatározzuk a szögegyenletek evolúcióját.

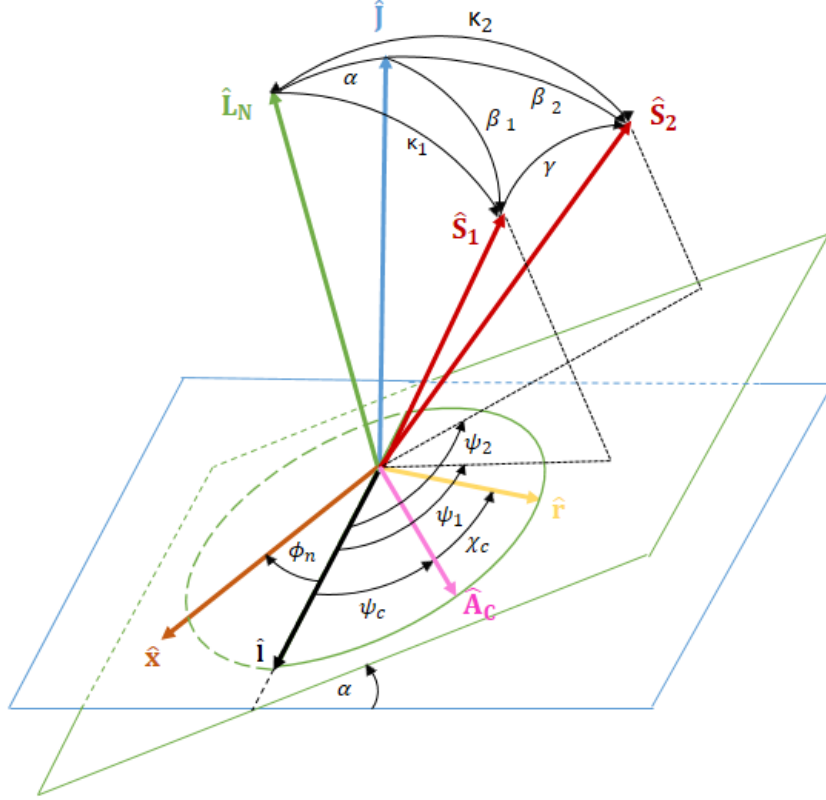
3.1. Bázisok meghatározása, azok időfejlődése

A rendszer vizsgálatához két síkot kell először meghatároznunk: a $\hat{\mathbf{J}}$ teljes impulzusmomentum irányára merőleges alapsíkot, és az $\hat{\mathbf{L}}_{\mathbf{N}}$ pálya-impulzusmomentum irányára merőleges pályasíkot. A két sík metszéspontja az $\hat{\mathbf{I}}$ irány, amit felszálló csomónak nevezünk. Az $\hat{\mathbf{I}}$ definíció szerint $\hat{\mathbf{I}} = (\hat{\mathbf{J}} \times \hat{\mathbf{L}}_{\mathbf{N}}) / \sin \alpha$, ahol α a két sík által bezárt szög. A $\hat{\mathbf{J}}$ teljes impulzusmomentum iránya 2PN rendig állandónak tekinthető [8]. Az $\hat{\mathbf{L}}_{\mathbf{N}}$ iránya időben változik, így az $\hat{\mathbf{I}}$ iránya sem állandó. A síkokat, és az elkövetkezőkben definiált bázisokat a (3.1) ábra szemlélteti.

Első bázisként tekintjük azt az esetet, amikor a $\hat{\mathbf{z}}$ -tengely irányának a $\hat{\mathbf{J}}$ irányát választjuk. Ekkor a megszokott $\hat{\mathbf{x}}$ és $\hat{\mathbf{y}}$ irányokat meghagyva inerciális bázist kapunk melyet jelöljünk $\mathcal{K}_i = (\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{J}})$ -vel.

A következőkben az $\hat{\mathbf{x}}$ -tengely irányának válasszuk az $\hat{\mathbf{I}}$ felszálló csomó irányát, a $\hat{\mathbf{z}}$ -tengelyét pedig először a $\hat{\mathbf{J}}$ -nek, másodszer az $\hat{\mathbf{L}}_{\mathbf{N}}$ -nek. Az első esetben a harmadik bázisvektor $\hat{\mathbf{k}} = \hat{\mathbf{J}} \times \hat{\mathbf{I}}$, és a bázis $\mathcal{K}_J = (\hat{\mathbf{I}}, \hat{\mathbf{k}}, \hat{\mathbf{J}})$. A második esetben a harmadik bázisvektor $\hat{\mathbf{m}} = \hat{\mathbf{L}}_{\mathbf{N}} \times \hat{\mathbf{I}}$, a bázis pedig $\mathcal{K}_L = (\hat{\mathbf{I}}, \hat{\mathbf{m}}, \hat{\mathbf{L}}_{\mathbf{N}})$.

A negyedik bázis meghatározásánál viszont problémákba ütközünk. Általános esetben a kettősök egymás körül excentrikus pályán keringenek. Ekkor a rendszerhez



3.1. ábra. A kettős rendszert jellemző paraméterek a K_J és K_L bázisokban: \hat{J} a teljes impulzusmomentum iránya, \hat{L}_N a pálya-impulzusmomentum iránya, \hat{S}_1 és \hat{S}_2 az egyes spinek irányát jelölik, \hat{l} a felszálló csomó iránya. A felszálló csomótól mérve a \hat{J} -re merőleges síkban ϕ_n szögre az \hat{x} irány, az \hat{L}_N -re merőleges síkban ψ_c szögre az \hat{A}_C irány található. χ_c az \hat{A}_C és az \hat{r} irányok által bezárt szög. κ_i -k és ψ_i -k ($i = 1, 2$) a spin polár- és azimutális szögek.

egy plusz jól definiált bázist rendelhetünk, ugyanis az \hat{x} -tengely irányának kijelölhetjük az \hat{A}_N Laplace-Runge-Lenz vektor irányát, amit a periasztronhoz rögzítünk, azaz $\chi_p = \arcsin(\mathbf{A}_N \cdot \mathbf{r})$, ahol χ_p a valódi anomália. Így a koordinátarendszerünk $\mathcal{K}_A = (\hat{A}_N, \hat{Q}_N, \hat{L}_N)$ lenne, ahol $\hat{Q}_N = \hat{L}_N \times \hat{A}_N$. Az összeolvadás előtti gravitációs hullámok születésekor azonban a kettős egymás körül már közel körpályán kering, $\dot{r} = \ddot{r} = 0$. Ekkor az így választott bázis jól-definiáltsága elromlik, körpálya esetén nem tudunk periasztront definiálni.

Megoldásként új bázist adunk meg, amelyben a Laplace-Runge-Lenz vektort mi rögzítjük, és a továbbiakban \hat{A}_C -vel jelöljük. A választásunk a következő: \hat{L}_N továbbra is a \hat{z} -tengely irányába mutasson és \hat{L}_N és \hat{A}_C teljesítse az alábbi feltételeket:

$$\mathbf{L}_N \cdot \mathbf{A}_C = 0, \quad (3.1)$$

$$\mathbf{L}_N \cdot \dot{\mathbf{A}}_C = 0. \quad (3.2)$$

A bázis harmadik vektora $\hat{\mathbf{Q}}_C = \hat{\mathbf{L}}_N \times \hat{\mathbf{A}}_C$. Így az összeolvadáskori állapotok leírására a bázisunk $\mathcal{K}_C = (\hat{\mathbf{A}}_C, \hat{\mathbf{Q}}_C, \hat{\mathbf{L}}_N)$. A feltételekből látszik, hogy amennyiben $\hat{\mathbf{L}}_N$ elmozdul $\hat{\mathbf{A}}_C$ irányába, úgy $\hat{\mathbf{A}}_C$ ugyanolyan mértékben elmozdul az $\hat{\mathbf{L}}_N$ -el ellentétes irányba. Az $\hat{\mathbf{L}}_N$ -nek a $\hat{\mathbf{Q}}_C$ irányú elmozdulása $\hat{\mathbf{A}}_C$ -t változatlanul hagyja.

Összegzésként: kaptunk egy inerciális és három neminerciális bázist, és most meghatározzuk a továbbiakban szükséges bázisvektorok evolúciós egyenleteit.

Tekintsük a \mathcal{K}_C bázist. Az \mathbf{r} vektort ebben a bázisban

$$\mathbf{r} = r \left(\cos \chi_c \hat{\mathbf{A}}_C + \sin \chi_c \hat{\mathbf{Q}}_C \right) \quad (3.3)$$

összefüggéssel adhatjuk meg, általánosan $\mathbf{r} = x^i \mathbf{f}_i$, ahol \mathbf{f}_i az i -edik bázisvektor.

Az $\hat{\mathbf{L}}_N$ pálya-impulzusmomentum definíciója [8] cikk alapján

$$\mathbf{L}_N = \mu \mathbf{r} \times \mathbf{v}, \quad (3.4)$$

ahol μ a redukált tömeg.

Deriváljuk idő szerint (3.4)-t, így kapjuk, hogy

$$\dot{\mathbf{L}}_N = \mu \mathbf{r} \times \Delta \mathbf{a} = \left(\frac{d}{dt} L_N \right) \hat{\mathbf{L}}_N + L_N \frac{d}{dt} \hat{\mathbf{L}}_N, \quad (3.5)$$

ahol $\Delta \mathbf{a} = \sum_{i=1}^3 a_i \mathbf{f}_i$, ahol a_i a relatív gyorsulásvektor komponensei. Ebből átrendezéssel és a megfelelő tagok kifejezésével megkapjuk a \mathcal{K}_C bázis fejlődési egyenleteit, amelyek a következők:

$$\frac{d}{dt} \hat{\mathbf{L}}_N = a_3 \frac{\mu r}{L_N} \left(\sin \chi_c \hat{\mathbf{A}}_C - \cos \chi_c \hat{\mathbf{Q}}_C \right), \quad (3.6)$$

$$\frac{d}{dt} \hat{\mathbf{A}}_C = -a_3 \frac{\mu r}{L_N} \sin \chi_c \hat{\mathbf{L}}_N, \quad (3.7)$$

$$\frac{d}{dt} \hat{\mathbf{Q}}_C = a_3 \frac{\mu r}{L_N} \cos \chi_c \hat{\mathbf{L}}_N. \quad (3.8)$$

A három egyenlet egy egyenlettel is helyettesíthető az

$$\dot{\mathbf{f}}_{(i)} = \boldsymbol{\Omega}_{\mathbf{A}, \text{circ}} \times \mathbf{f}_{(i)} \quad (3.9)$$

alakban, ahol

$$\boldsymbol{\Omega}_{\mathbf{A}, \text{circ}} = a_3 \frac{\mu r}{L_N} \cos \chi_c \hat{\mathbf{A}}_C + a_3 \frac{\mu r}{L_N} \sin \chi_c \hat{\mathbf{Q}}_C. \quad (3.10)$$

Az $\hat{\mathbf{A}}_C$ és az \mathbf{r} vektor iránya által bezárt χ_c szög fejlődési egyenletéhez való eljutáshoz deriváljuk az \mathbf{r} vektort, amelyre kapjuk egyszer, hogy $\dot{\mathbf{r}} = \dot{x}^i \mathbf{f}_i + x^i \dot{\mathbf{f}}_i$, másszor a

(3.3) alak deriváltjait. Felhasználva (3.4) és (3.9) egyenleteket felírhatjuk, hogy

$$\frac{\mathbf{L}_N}{\mu r} = \dot{x}^i \mathbf{f}_{(i)} + x^i \boldsymbol{\Omega}_{\mathbf{A},\text{circ}} \times \mathbf{f}_{(i)}, \quad (3.11)$$

amelybe behelyettesítve a (3.10) és a [9] cikk (15) összefüggéseket, átrendezés után a χ_c szög fejlődésére a

$$\dot{\chi}_c = \frac{L_N}{\mu r^2} \quad (3.12)$$

összefüggést kapjuk.

Amire még szükségünk lesz, a \mathcal{K}_L bázis $\hat{\mathbf{I}}$ és $\hat{\mathbf{m}}$ bázisvektorainak időfejlődése a \mathcal{K}_C rendszerhez viszonyítva. A \mathcal{K}_L bázisból a \mathcal{K}_C bázist az $\hat{\mathbf{L}}_N$ irány körüli ψ_c szöggel való forgatással kapjuk, így a két bázisvektor a \mathcal{K}_C bázisban felírva

$$\hat{\mathbf{I}} = \cos \psi_c \hat{\mathbf{A}}_C - \sin \psi_c \hat{\mathbf{Q}}_C \quad (3.13)$$

és

$$\hat{\mathbf{m}} = \sin \psi_c \hat{\mathbf{A}}_C + \cos \psi_c \hat{\mathbf{Q}}_C. \quad (3.14)$$

Az $\hat{\mathbf{I}}$ és $\hat{\mathbf{m}}$ bázisvektorok időfejlődéséhez deriváljuk (3.13) és (3.14) egyenleteket idő szerint, így kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \hat{\mathbf{I}} &= -\dot{\psi}_c \left(\sin \psi_c \hat{\mathbf{A}}_C + \cos \psi_c \hat{\mathbf{Q}}_C \right) + \cos \psi_c \left(\frac{d}{dt} \hat{\mathbf{A}}_C \right) - \sin \psi_c \left(\frac{d}{dt} \hat{\mathbf{Q}}_C \right) \quad (3.15) \\ &= \cos \psi_c \left(\boldsymbol{\Omega}_{\mathbf{A},\text{circ}} - \dot{\psi}_c \hat{\mathbf{L}}_N \right) \times \hat{\mathbf{A}}_C - \sin \psi_c \left(\boldsymbol{\Omega}_{\mathbf{A},\text{circ}} - \dot{\psi}_c \hat{\mathbf{L}}_N \right) \times \hat{\mathbf{Q}}_C \\ &= \left(\boldsymbol{\Omega}_{\mathbf{A},\text{circ}} - \dot{\psi}_c \hat{\mathbf{L}}_N \right) \times \hat{\mathbf{I}} \end{aligned}$$

és

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \hat{\mathbf{m}} &= \dot{\psi}_c \left(\cos \psi_c \hat{\mathbf{A}}_C - \sin \psi_c \hat{\mathbf{Q}}_C \right) + \sin \psi_c \left(\frac{d}{dt} \hat{\mathbf{A}}_C \right) + \cos \psi_c \left(\frac{d}{dt} \hat{\mathbf{Q}}_C \right) \quad (3.16) \\ &= \cos \psi_c \left(\boldsymbol{\Omega}_{\mathbf{A},\text{circ}} - \dot{\psi}_c \hat{\mathbf{L}}_N \right) \times \hat{\mathbf{Q}}_C + \sin \psi_c \left(\boldsymbol{\Omega}_{\mathbf{A},\text{circ}} - \dot{\psi}_c \hat{\mathbf{L}}_N \right) \times \hat{\mathbf{A}}_C \\ &= \left(\boldsymbol{\Omega}_{\mathbf{A},\text{circ}} - \dot{\psi}_c \hat{\mathbf{L}}_N \right) \times \hat{\mathbf{m}}. \end{aligned}$$

Bevezetve az

$$\boldsymbol{\Omega}_L = \boldsymbol{\Omega}_{\mathbf{A},\text{circ}} - \dot{\psi}_c \hat{\mathbf{L}}_N \quad (3.17)$$

jelölést (3.15) és (3.16) a

$$\frac{d}{dt} \hat{\mathbf{I}} = \boldsymbol{\Omega}_L \times \hat{\mathbf{I}} \quad (3.18)$$

és

$$\frac{d}{dt} \hat{\mathbf{m}} = \boldsymbol{\Omega}_L \times \hat{\mathbf{m}} \quad (3.19)$$

alakban adhatóak meg.

A $\mathcal{K}_i \rightarrow \mathcal{K}_J \rightarrow \mathcal{K}_L \rightarrow \mathcal{K}_C$ koordináta bázisok közötti transzformációt a $-\phi_n$, α és ψ_c Euler-szögek teszik lehetővé sorrendben z-, x- és z-tengely körüli forgatások segítségével, ahol az egyes \mathcal{R} forgatásmátrixok a következők:

$$\mathcal{R}_z(-\phi_n) = \begin{pmatrix} \cos \phi_n & -\sin \phi_n & 0 \\ \sin \phi_n & \cos \phi_n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (3.20)$$

$$\mathcal{R}_x(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}, \quad (3.21)$$

$$\text{és } \mathcal{R}_z(\psi_c) = \begin{pmatrix} \cos \psi_c & \sin \psi_c & 0 \\ -\sin \psi_c & \cos \psi_c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.22)$$

Ezek segítségével felírva az $\mathcal{R}(-\phi_n, \alpha, \psi_c)$ teljes transzformáció mátrixát, egyszerű mátrixszorzással kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(-\phi_n, \alpha, \psi_c) &= \mathcal{R}(\psi_c) \mathcal{R}(\alpha) \mathcal{R}(-\phi_n) \quad (3.23) \\ &= \begin{pmatrix} \cos \psi_c \cos \phi_n + \sin \psi_c \cos \alpha \sin \phi_n & -\cos \psi_c \sin \phi_n + \sin \psi_c \cos \alpha \cos \phi_n & \sin \psi_c \sin \alpha \\ -\sin \psi_c \cos \phi_n + \cos \psi_c \cos \alpha \sin \phi_n & \sin \psi_c \sin \phi_n + \cos \psi_c \cos \alpha \cos \phi_n & \cos \psi_c \sin \alpha \\ -\sin \alpha \sin \phi_n & -\sin \alpha \cos \phi_n & \cos \alpha \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

amely összhangban van a [8] irodalommal.

3.2. Euler-szögek időfejlődése

3.2.1. Az α inklináció

Az inklináció szöge definíció szerint $\cos \alpha = \hat{\mathbf{J}} \cdot \hat{\mathbf{L}}_N$, melyet idő szerint deriválva kapjuk, hogy

$$-\sin \alpha \cdot \dot{\alpha} = \hat{\mathbf{J}} \frac{d}{dt} \hat{\mathbf{L}}_N, \quad (3.24)$$

ahol felhasználtuk azt, hogy $\hat{\mathbf{J}}$ megmaradó mennyiség 2PN-ig. Felhasználva (3.10)-et a (3.24) egyenletben

$$-\sin \alpha \cdot \dot{\alpha} = \boldsymbol{\Omega}_{\mathbf{A}, \text{circ}} \left(\hat{\mathbf{L}}_N \times \hat{\mathbf{J}} \right) = -\sin \alpha \cdot \boldsymbol{\Omega}_{\mathbf{A}, \text{circ}} \hat{\mathbf{I}}. \quad (3.25)$$

Az inklináció időfejlődése a (3.25) és (3.13) egyenletek alapján a következő:

$$\dot{\alpha} = a_3 \frac{\mu r \cos(\chi_c + \psi_c)}{L_N}. \quad (3.26)$$

3.2.2. A ϕ_n felszálló csomó hossza

A ϕ_n szög időfejlődését [8] C. fejezete alapján eljárva határozzuk meg, azaz az $\mathbf{r} = r(1, 0, 0)$ vektor $\mathcal{K}_i \rightarrow \mathcal{K}_J \rightarrow \mathcal{K}_L \rightarrow \mathcal{K}_C$ koordináta transzformációját használjuk fel. (3.23) alapján az \mathbf{r} transzformációjára kapjuk, hogy

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} \cos(\psi_c + \chi_c) \cos \phi_n + \sin(\psi_c + \chi_c) \cos \alpha \sin \phi_n \\ -\cos(\psi_c + \chi_c) \sin \phi_n + \sin(\psi_c + \chi_c) \cos \alpha \cos \phi_n \\ \sin(\psi_c + \chi_c) \sin \alpha \end{pmatrix}. \quad (3.27)$$

Magához az időfejlődéshez a χ_c szögnél látottak alapján indulunk el, azaz felhasználjuk a pálya-impulzusmomentum (3.4) definícióját, melyet osztunk μr^2 -tel, így

$$\frac{\mathbf{L}_N}{\mu r^2} = \frac{1}{r^2} \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}. \quad (3.28)$$

A (3.28) összefüggéshez felhasználva (3.27) egyenletet és időderiváltját, és bevezetve a $\psi_c + \chi_c = \psi$ jelölést, a következő összefüggéshez jutunk:

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{L}_N}{\mu r^2} &= \dot{\psi} \begin{pmatrix} -\sin \alpha \sin \phi_n \\ -\sin \alpha \cos \phi_n \\ \cos \alpha \end{pmatrix} + \dot{\alpha} \begin{pmatrix} -\cos \psi \sin \phi_n \sin \psi \cos \alpha + \sin^2 \psi \cos \phi_n \\ -\cos \psi \cos \phi_n \sin \psi \cos \alpha - \sin^2 \psi \sin \phi_n \\ -\sin \psi \cos \psi \sin \alpha \end{pmatrix} \\ &+ \dot{\phi}_n \begin{pmatrix} \sin \alpha \sin \psi (\cos \psi \cos \phi_n + \sin \psi \cos \alpha \sin \phi_n) \\ \sin \alpha \sin \psi (-\cos \psi \sin \phi_n + \sin \psi \cos \alpha \cos \phi_n) \\ \sin^2 \alpha \sin^2 \psi - 1 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (3.29)$$

melyből annak érdekében, hogy ne vektoregyenleteink legyenek, négyzetreemeléssel kapjuk, hogy

$$\frac{L_N^2}{\mu^2 r^4} = \left(\dot{\psi} - \dot{\phi}_n \cos \alpha \right)^2 + \left(\dot{\phi}_n \sin \alpha \cos \alpha + \dot{\alpha} \sin \psi \right)^2. \quad (3.30)$$

Felhasználva, hogy $(\mathbf{L}_N)_z = L_N \cos \alpha$, trigonometrikus átalakításokkal kapjuk, hogy

$$\frac{L_N}{\mu r^2} = \dot{\psi} - \dot{\phi}_n \cos \alpha - \left(\dot{\phi}_n \sin \alpha \cos \psi + \dot{\alpha} \sin \psi \right) \tan \alpha \cos \psi. \quad (3.31)$$

Az (3.31) összefüggést négyzetre emelve és így egyenlővé téve a (3.30) összefüggéssel

kapjuk, hogy

$$0 = \left[\left(\dot{\phi}_n \sin \alpha \cos \psi + \dot{\alpha} \sin \psi \right) (1 + \tan^2 \alpha \cos^2 \psi) + 2 \tan \alpha \cos \psi \left(\dot{\psi} - \dot{\phi}_n \cos \alpha \right) \right] \times \left(\dot{\phi}_n \sin \alpha \cos \psi + \dot{\alpha} \sin \psi \right). \quad (3.32)$$

Mivel $2 \tan \alpha \cos \psi \left(\dot{\psi} - \dot{\phi}_n \cos \alpha \right) \neq 0$, a (3.26) összefüggést és a korábbi $\psi_c + \chi_c = \psi$ helyettesítésünket felhasználva, a ϕ_n időfejlődésére a

$$\dot{\phi}_n = -a_3 \frac{\mu r \sin(\psi_c + \chi_c)}{L_N \sin \alpha} \quad (3.33)$$

összefüggés áll elő.

3.2.3. A ψ_c szög

A ψ_c szög időfejlődéséhez felhasználjuk a ϕ_n szögre kapott eredményeket. Visszaírva a (3.33) összefüggést a (3.31) egyenletbe, és felhasználva a (3.12) egyenletet, kapjuk, hogy

$$\dot{\psi}_c = -a_3 \frac{\mu r \sin(\psi_c + \chi_c)}{L_N \tan \alpha}. \quad (3.34)$$

3.3. Spin-szögek időfejlődése

3.3.1. A κ_i spin polár szög

Definíció szerint $\kappa_i = \arccos \left(\hat{\mathbf{S}}_i \cdot \hat{\mathbf{L}}_N \right)$. Ezt differenciálva és felhasználva [9] cikk (B33) összefüggését, miszerint $\frac{d}{dt} \hat{\mathbf{S}}_i = \boldsymbol{\Omega}_i \times \hat{\mathbf{S}}_i$, illetve a már fentebb látott $\frac{d}{dt} \hat{\mathbf{L}}_N = \boldsymbol{\Omega}_{\mathbf{A}, \text{circ}} \times \hat{\mathbf{L}}_N$ összefüggést, kapjuk, hogy

$$-\sin \kappa_i \cdot \dot{\kappa}_i = \left(\boldsymbol{\Omega}_{\mathbf{A}, \text{circ}} - \boldsymbol{\Omega}_i \right) \left(\hat{\mathbf{L}}_N \times \hat{\mathbf{S}}_i \right). \quad (3.35)$$

Ennek az összefüggésnek a konkrét kiszámításához szükségünk van még arra, hogy meghatározzuk az $\boldsymbol{\Omega}_i$ -t, mely [8] - (56) alapján

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Omega}_i &= \boldsymbol{\Omega}_i^{SO} + \boldsymbol{\Omega}_i^{SS} + \boldsymbol{\Omega}_i^{QM} \\ \boldsymbol{\Omega}_i^{SO} &= \frac{G(4 + 3\nu^{3-2i})}{2c^2 r^3} L_N \hat{\mathbf{L}}_N, \\ \boldsymbol{\Omega}_i^{SS} &= \frac{GS_j}{c^2 r^3} \left[3 \left(\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{S}}_j \right) \hat{\mathbf{r}} - \hat{\mathbf{S}}_j \right], \\ \boldsymbol{\Omega}_i^{QM} &= -\frac{3Gm_j Q_i}{r^3 S_i} \left(\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{S}}_i \right) \hat{\mathbf{r}}. \end{aligned} \quad (3.36)$$

ahol, SO a spin-pálya, SS a spin-spin, QM pedig a kvadrupól-monopól kölcsönhatásból származó tagot jelöli. Továbbá a kifejezésekben $\nu = m_2/m_1 \leq 1$ a tömegarány,

$$S_i = \frac{G}{c} m_i^2 \chi_i = \frac{G}{c} m^2 \eta \nu^{2i-3} \chi_i \quad (3.37)$$

az i -edik spin nagysága, χ_i az i -edik tagjának $[0,1]$ intervallumon értelmezett dimenziómentes spinparamétere, $\eta = \mu/m$ a szimmetrikus tömegarány,

$$Q_i = -\frac{G^2}{c^4} w \chi_i^2 m_i^3 \quad (3.38)$$

a kvadrupól-monopól skalár, amelyben $w = 1$ forgó feketelyukak esetén. Fel kell írunk még az $\hat{\mathbf{S}}_i$ vektort, amely a \mathcal{K}_L rendszerben $\hat{\mathbf{S}}_i = \sin \kappa_i \cos \psi_i \hat{\mathbf{l}} + \sin \kappa_i \sin \psi_i \hat{\mathbf{m}} + \cos \kappa_i \hat{\mathbf{L}}_N$ a [8] cikk (30) összefüggése alapján. $\hat{\mathbf{S}}_i$ a \mathcal{K}_C rendszerben (3.13) és (3.14) felhasználásával

$$\hat{\mathbf{S}}_i = \sin \kappa_i \left[\cos(\psi_c - \psi_i) \hat{\mathbf{A}}_C - \sin(\psi_c - \psi_i) \hat{\mathbf{Q}}_C \right] + \cos \kappa_i \hat{\mathbf{L}}_N. \quad (3.39)$$

Az $\hat{\mathbf{r}}$ és az $\hat{\mathbf{S}}_i$ vektorok skaláris szorzata:

$$\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{S}}_i = \sin \kappa_i \cos(\chi_c + \psi_c - \psi_i). \quad (3.40)$$

Mindezek felhasználásával az Ω_i -kre kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \Omega_i^{SO} &= \frac{G(4 + 3\nu^{3-2i})}{2c^2 r^3} L_N \hat{\mathbf{L}}_N, \\ \Omega_i^{SS} &= \frac{G^2 m^2 \eta}{c^3 r^3} \nu^{2j-3} \chi_j \left\{ \sin \kappa_j \left[(3 \cos \chi_c \cos(\chi_c + \psi_c - \psi_j) - \cos(\psi_c - \psi_j)) \hat{\mathbf{A}}_C + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + (3 \sin \chi_c \cos(\chi_c + \psi_c - \psi_j) + \sin(\psi_c - \psi_j)) \hat{\mathbf{Q}}_C \right] - \cos \kappa_j \hat{\mathbf{L}}_N \right\} \\ \Omega_i^{QM} &= \frac{3G^2 \eta m^2}{r^3 c^3} w \chi_i \sin \kappa_i \cos(\chi_c + \psi_c - \psi_i) \left(\cos \chi_c \hat{\mathbf{A}}_C + \sin \chi_c \hat{\mathbf{Q}}_C \right). \end{aligned} \quad (3.41)$$

(Megjegyzés: A [9] cikk (B34) Ω_i^{SS} és Ω_i^{QM} összefüggései egy 1/2-es szorzóban eltérnek a helyes összefüggésektől [17].)

Az Ω_i -k meghatározása után (3.35) összefüggéshez szükségünk van még az $\hat{\mathbf{L}}_N$ és $\hat{\mathbf{S}}_i$ vektorok keresztszorzataira, mely

$$\hat{\mathbf{L}}_N \times \hat{\mathbf{S}}_i = \sin \kappa_i \left[\sin(\psi_c - \psi_i) \hat{\mathbf{A}}_C + \cos(\psi_c - \psi_i) \hat{\mathbf{Q}}_C \right]. \quad (3.42)$$

Ezt követően a $\dot{\kappa}_i$ -okra kapjuk, hogy:

$$\begin{aligned} \dot{\kappa}_i &= \left(\Omega_i \cdot \hat{\mathbf{A}}_C \right) \sin(\psi_c - \psi_i) + \left(\Omega_i \cdot \hat{\mathbf{Q}}_C \right) \cos(\psi_c - \psi_i) - \\ &\quad - a_3 \frac{\mu r}{L_N} \sin(\chi_c + \psi_c - \psi_i) \end{aligned} \quad (3.43)$$

amely az (3.41) összefüggéseket felhasználva a különböző kölcsönhatási tagokra lebontva:

$$\dot{\kappa}_i^{SO} = -a_3 \frac{\mu r}{L_N} \sin(\chi_c + \psi_c - \psi_i), \quad (3.44)$$

$$\begin{aligned} \dot{\kappa}_i^{SS} &= \frac{G^2 m^2 \eta}{c^3 r^3} \nu^{2j-3} \chi_j \sin \kappa_j [3 \cos(\chi_c + \psi_c - \psi_j) \sin(\chi_c + \psi_c - \psi_i) + \\ &\quad + \sin(\psi_i - \psi_j)] - a_3 \frac{\mu r}{L_N} \sin(\chi_c + \psi_c - \psi_i), \end{aligned} \quad (3.45)$$

$$\begin{aligned} \dot{\kappa}_i^{QM} &= \frac{3G^2 \eta m^2}{r^3 c^3} w \chi_i \sin \kappa_i \cos(\chi_c + \psi_c - \psi_i) \sin(\chi_c + \psi_c - \psi_i) - \\ &\quad - a_3 \frac{\mu r}{L_N} \sin(\chi_c + \psi_c - \psi_i). \end{aligned} \quad (3.46)$$

3.3.2. A ψ_i spin azimutális szög

Definíció szerint $\psi_i = \arctan\left(\frac{\hat{\mathbf{m}} \cdot \hat{\mathbf{S}}_i}{\hat{\mathbf{l}} \cdot \hat{\mathbf{S}}_i}\right)$. A kifejezésnek a tangensét véve, majd idő szerint differenciálva kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dt} \hat{\mathbf{m}}\right) \hat{\mathbf{S}}_i + \hat{\mathbf{m}} \left(\frac{d}{dt} \hat{\mathbf{S}}_i\right) &= (1 + \tan^2 \psi_i) \dot{\psi}_i (\hat{\mathbf{l}} \cdot \hat{\mathbf{S}}_i) + \tan \psi_i \left(\frac{d}{dt} \hat{\mathbf{l}}\right) \hat{\mathbf{S}}_i \\ &\quad + \tan \psi_i \hat{\mathbf{l}} \left(\frac{d}{dt} \hat{\mathbf{S}}_i\right), \end{aligned} \quad (3.47)$$

$$\begin{aligned} (1 + \tan^2 \psi_i) \dot{\psi}_i (\hat{\mathbf{l}} \cdot \hat{\mathbf{S}}_i) &= \left(\hat{\mathbf{m}} - \tan \psi_i \hat{\mathbf{l}}\right) \frac{d}{dt} \hat{\mathbf{S}}_i \\ &\quad + \left(\frac{d}{dt} \hat{\mathbf{m}} - \tan \psi_i \frac{d}{dt} \hat{\mathbf{l}}\right) \hat{\mathbf{S}}_i. \end{aligned} \quad (3.48)$$

Felhasználva (3.18), (3.19) és $\frac{d}{dt} \hat{\mathbf{S}}_i = \boldsymbol{\Omega}_i \times \hat{\mathbf{S}}_i$ összefüggéseket, kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} (1 + \tan^2 \psi_i) \dot{\psi}_i (\hat{\mathbf{l}} \cdot \hat{\mathbf{S}}_i) &= \left(\hat{\mathbf{m}} - \tan \psi_i \hat{\mathbf{l}}\right) \left(\boldsymbol{\Omega}_i \times \hat{\mathbf{S}}_i\right) \\ &\quad + \left[\left(\boldsymbol{\Omega}_L \times \hat{\mathbf{m}}\right) - \tan \psi_i \left(\boldsymbol{\Omega}_L \times \hat{\mathbf{l}}\right)\right] \cdot \hat{\mathbf{S}}_i, \end{aligned} \quad (3.49)$$

ahol $\hat{\mathbf{l}} \cdot \hat{\mathbf{S}}_i = \sin \kappa_i \cos \psi_i$, így

$$\sin \kappa_i \dot{\psi}_i = \left[\sin(\psi_c - \psi_i) \hat{\mathbf{A}}_C + \cos(\psi_c - \psi_i) \hat{\mathbf{Q}}_C\right] (\boldsymbol{\Omega}_i - \boldsymbol{\Omega}_L) \times \hat{\mathbf{S}}_i. \quad (3.50)$$

A kifejezés explicit felírásához szükségünk van $\boldsymbol{\Omega}_L$ keresztszorzásnál alkalmazandó alakjára, mely [9] cikk (30) összefüggése alapján

$$\boldsymbol{\Omega}_L = a_3 \frac{\mu r}{L_N} \left[\cos \chi_c \hat{\mathbf{A}}_N + \sin \chi_c \hat{\mathbf{Q}}_N + \frac{\sin(\chi_c + \psi_c)}{\tan \alpha} \hat{\mathbf{L}}_N \right], \quad (3.51)$$

illetve a következő két vektori szorzatra:

$$\boldsymbol{\Omega}_i \times \hat{\mathbf{S}}_i = \left[\left(\boldsymbol{\Omega}_i \cdot \hat{\mathbf{Q}}_N \right) \cos \kappa_i + \left(\boldsymbol{\Omega}_i \cdot \hat{\mathbf{L}}_N \right) \sin \kappa_i \sin (\psi_c - \psi_i) \right] \hat{\mathbf{A}}_N + \quad (3.52)$$

$$+ \left[\left(\boldsymbol{\Omega}_i \cdot \hat{\mathbf{L}}_N \right) \sin \kappa_i \cos (\psi_c - \psi_i) - \left(\boldsymbol{\Omega}_i \cdot \hat{\mathbf{A}}_N \right) \cos \kappa_i \right] \hat{\mathbf{Q}}_N -$$

$$- \sin \kappa_i \left[\left(\boldsymbol{\Omega}_i \cdot \hat{\mathbf{A}}_N \right) \sin (\psi_c - \psi_i) + \left(\boldsymbol{\Omega}_i \cdot \hat{\mathbf{Q}}_N \right) \cos (\psi_c - \psi_i) \right] \hat{\mathbf{L}}_N,$$

$$\boldsymbol{\Omega}_L \times \hat{\mathbf{S}}_i = a_3 \frac{\mu r}{L_N} \left\{ \left[\sin \chi_c \cos \kappa_i + \sin \kappa_i \sin (\psi_c - \psi_i) \frac{\sin (\psi_c + \chi_c)}{\tan \alpha} \right] \hat{\mathbf{A}}_N + \quad (3.53)$$

$$+ \left[\sin \kappa_i \cos (\psi_c - \psi_i) \frac{\sin (\psi_c + \chi_c)}{\tan \alpha} - \cos \chi_c \cos \kappa_i \right] \hat{\mathbf{Q}}_N -$$

$$- \sin \kappa_i \sin (\chi_c + \psi_c - \psi_i) \hat{\mathbf{L}}_N \}.$$

Az így kapott (3.52) és (3.53) kifejezéseket visszaírva az (3.50) egyenletbe, $\sin \kappa_i$ -vel való leosztás és trigonometrikus átalakítások után

$$\dot{\psi}_i = \left(\boldsymbol{\Omega}_i \cdot \hat{\mathbf{L}}_N \right) + \left[\left(\boldsymbol{\Omega}_i \cdot \hat{\mathbf{Q}}_C \right) \sin (\psi_c - \psi_i) - \left(\boldsymbol{\Omega}_i \cdot \hat{\mathbf{A}}_C \right) \cos (\psi_c - \psi_i) \right] \quad (3.54)$$

$$\times \cot \kappa_i - a_3 \frac{\mu r}{L_N} \left[\cot \alpha \sin (\psi_c + \chi_c) - \cot \kappa_i \cos (\chi_c + \psi_c - \psi_i) \right],$$

amelyből a (3.41) egyenlet segítségével kapjuk, hogy

$$\dot{\psi}_i^{SO} = \frac{G(4 + 3\nu^{3-2i})}{2c^2 r^3} L_N - a_3 \frac{\mu r}{L_N} \left[\cot \alpha \sin (\psi_c + \chi_c) - \cot \kappa_i \cos (\chi_c + \psi_c - \psi_i) \right], \quad (3.55)$$

$$\dot{\psi}_i^{SS} = \frac{G^2 m^2 \eta}{c^3 r^3} \nu^{2j-3} \chi_j \left\{ -\cos \kappa_j - \sin \kappa_j \cot \kappa_i [3 \cos (\chi_c + \psi_c - \psi_j) \right. \quad (3.56)$$

$$\times \cos (\chi_c + \psi_c - \psi_i) - \cos (\psi_j - \psi_i)] \} -$$

$$- a_3 \frac{\mu r}{L_N} \left[\cot \alpha \sin (\psi_c + \chi_c) - \cot \kappa_i \cos (\chi_c + \psi_c - \psi_i) \right],$$

$$\dot{\psi}_i^{QM} = -\frac{3G^2 \eta m^2}{c^3 r^3} w \chi_i \sin \kappa_i \cot \kappa_i \cos^2 (\chi_c + \psi_c - \psi_i) \quad (3.57)$$

$$- a_3 \frac{\mu r}{L_N} \left[\cot \alpha \sin (\psi_c + \chi_c) - \cot \kappa_i \cos (\chi_c + \psi_c - \psi_i) \right].$$

3.3.3. A gyorsulásvektorok meghatározása

Az relatív gyorsulásvektor a különböző járulékokból adódó gyorsulások összegeként áll elő, amely vezető rendben (a 2PN-es járulékokat elhanyagolhatjuk) [9] (B9) alapján

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_{PN} + \mathbf{a}_{SO} + \mathbf{a}_{SS} + \mathbf{a}_{QM}. \quad (3.58)$$

Körpályaközelítésben a gyorsulásvektorok z-komponensét kell meghatároznunk, ugyanis fent láttuk, hogy ebben az esetben ez az egyetlen komponens játszik szerepet az összefüggéseinkben.

Első lépésként az (3.3) helyvektort idő szerint differenciálva meghatározzuk a \mathbf{v} sebességvektort, amely

$$\begin{aligned} \mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} &= \dot{r} \left(\cos \chi_c \hat{\mathbf{A}}_{\mathbf{C}} + \sin \chi_c \hat{\mathbf{Q}}_{\mathbf{C}} \right) + \\ &+ r \left(-\sin \chi_c \dot{\chi}_c \hat{\mathbf{A}}_{\mathbf{C}} + \cos \chi_c \left(\frac{d}{dt} \hat{\mathbf{A}}_{\mathbf{C}} \right) + \right. \\ &\left. + \cos \chi_c \dot{\chi}_c \hat{\mathbf{Q}}_{\mathbf{C}} + \sin \chi_c \left(\frac{d}{dt} \hat{\mathbf{Q}}_{\mathbf{C}} \right) \right). \end{aligned} \quad (3.59)$$

Mivel körpályaközelítésben $\dot{r} = 0$, felhasználva (3.7) és (3.8) összefüggéseket, a sebességvektor jelen alakja

$$\mathbf{v} = r \dot{\chi}_c \left(\cos \chi_c \hat{\mathbf{Q}}_{\mathbf{C}} - \sin \chi_c \hat{\mathbf{A}}_{\mathbf{C}} \right). \quad (3.60)$$

Szükségünk lesz még a sebességvektor hossz négyzetére, amely (3.12) felhasználásával:

$$v^2 = r^2 \dot{\chi}_c^2 = \frac{L_N^2}{\mu^2 r^2}. \quad (3.61)$$

A továbbiakban meghatározzuk a gyorsulásokra vonatkozó összefüggéseket a különböző járulékok esetén.

1PN rendben a gyorsulásokra felírható összefüggés [9] cikk (B10) összefüggés alapján

$$a_{PN} = \frac{Gm}{c^2 r^2} \left[2(2 + \eta) \frac{Gm}{r} - (1 + 3\eta) v^2 \right] \hat{\mathbf{r}}, \quad (3.62)$$

melyből látjuk, hogy

$$a_3^{PN} = 0, \quad (3.63)$$

tekintve, hogy az $\hat{\mathbf{r}}$ vektor z-irányú komponense zérus.

A spin-pálya kölcsönhatásból származó gyorsulási tag [9] cikk (B12) összefüggése alapján

$$a_{SO} = \frac{G^2 m^2 \eta}{c^3 r^3} \sum_{k=1}^2 (4\nu^{2k-3} + 3) \chi_k \left\{ \frac{3L_N}{2\mu r} \left(\hat{\mathbf{L}}_{\mathbf{N}} \cdot \hat{\mathbf{S}}_{\mathbf{k}} \right) \hat{\mathbf{r}} - \left(\mathbf{v} \times \hat{\mathbf{S}}_{\mathbf{k}} \right) \right\}. \quad (3.64)$$

Az explicit felíráshoz szükséges

$$\hat{\mathbf{L}}_{\mathbf{N}} \cdot \hat{\mathbf{S}}_{\mathbf{k}} = \cos \kappa_k \quad (3.65)$$

$$\begin{aligned} \text{és } \mathbf{v} \times \hat{\mathbf{S}}_{\mathbf{k}} &= \frac{L_N}{\mu r} \left[\cos \kappa_k \left(\cos \chi_c \hat{\mathbf{A}}_{\mathbf{C}} + \sin \chi_c \hat{\mathbf{Q}}_{\mathbf{C}} \right) \right. \\ &\left. - \sin \kappa_k \cos (\chi_c + \psi_c - \psi_k) \hat{\mathbf{L}}_{\mathbf{N}} \right] \end{aligned} \quad (3.66)$$

összefüggések felhasználásával az SO rendű gyorsulás z-irányú komponense

$$a_3^{SO} = \frac{G^2 m^2 \eta}{c^3 r^3} \sum_{k=1}^2 (4\nu^{2k-3} + 3) \chi_k r \dot{\chi}_c \sin \kappa_k \cos(\chi_c + \psi_c - \psi_k). \quad (3.67)$$

Spin-spin kölcsönhatásból származó gyorsulási tag [9] cikk (B13) összefüggése alapján

$$a_{SS} = -\frac{3G^3 m^3 \eta}{c^4 r^4} \chi_1 \chi_2 \left\{ \left[(\hat{\mathbf{S}}_1 \cdot \hat{\mathbf{S}}_2) - 5 (\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{S}}_1) (\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{S}}_2) \right] \hat{\mathbf{r}} + (\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{S}}_2) \hat{\mathbf{S}}_1 + (\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{S}}_1) \hat{\mathbf{S}}_2 \right\}, \quad (3.68)$$

amely a felhasználandó (3.40) és

$$\hat{\mathbf{S}}_1 \cdot \hat{\mathbf{S}}_2 = \sin \kappa_1 \sin \kappa_2 \cos(\psi_2 - \psi_1) + \cos \kappa_1 \cos \kappa_2 \quad (3.69)$$

kifejezésekkel explicit alakban felírva

$$a_3^{SS} = -\frac{3G^3 m^3 \eta}{c^4 r^4} \chi_1 \chi_2 \left[\sin \kappa_2 \cos(\chi_c + \psi_c - \psi_2) \cos \kappa_1 + \sin \kappa_1 \cos(\chi_c + \psi_c - \psi_1) \cos \kappa_2 \right] \quad (3.70)$$

a z-irányban.

A kvadrupól-monopól kölcsönhatási tagból származó gyorsulási tag [9] cikk (B13) összefüggése alapján

$$a_{QM} = -\frac{3G^3 m^3 \eta}{2c^4 r^4} \sum_{k=1}^2 w_k \nu^{2k-3} \chi_k^2 \left\{ \left[1 - 5 (\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{S}}_k)^2 \right] \hat{\mathbf{r}} + 2 (\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{S}}_k) \hat{\mathbf{S}}_k \right\} \quad (3.71)$$

melyhez felhasználva az (3.40) összefüggést, a z-irányú komponens

$$a_3^{QM} = -\frac{3G^3 m^3 \eta}{2c^4 r^4} \sum_{k=1}^2 w_k \nu^{2k-3} \chi_k^2 \sin 2\kappa_k \cos(\chi_c + \psi_c - \psi_k). \quad (3.72)$$

Ezzel meghatároztuk a spines feketelyuk kettősök dinamikáját körpálya közelítésben.

4. fejezet

Frekvenciafüggő spin-dominált hullámforma

4.1. Időfüggő spin-dominált hullámforma, vezető rendben

4.1.1. A vezető rendű spin-dominált hullámforma

A spin-dominált hullámforma [6] azon esetekre került bevezetésre, ahol a kompakt kettőt alkotó objektumok tömegaránya kicsi ($\nu \leq 1 : 30$). Általános esetben a kettősök bespiralizáskori dinamikai egyenleteit egy kis $\varepsilon = Gm/c^2r$ paraméter körüli posztnewtoni sorfejtés segítségével kaphatjuk. Spin-dominált esetben viszont be tudunk vezetni egy újabb kis paramétert a következő módon.

Tekintsük spinnagyságok arányát, mely [6] irodalom (1) egyenlete alapján

$$\frac{S_2}{S_1} \approx \frac{\chi_2}{\chi_1} \nu^2, \quad (4.1)$$

mely összefüggésből láthatjuk, hogy amennyiben $m_2 \ll m_1$, a második spin elhanyagolható. Ezt követően felírható még az egyes spin és a pálya-impulzusmomentum aránya, [6] cikk (2) összefüggése:

$$\frac{S_1}{L_N} \approx \varepsilon^{1/2} \nu^{-1} \chi_1, \quad (4.2)$$

amelyen látszik, hogy kis tömegarány esetén a spin dominál a pálya-impulzusmomentum felett - innen kapta a hullámforma a nevét -, és bevezetésre kerül a $\xi = \varepsilon^{-1/2} \nu$ második kis paraméter.

A hullámformában az első PN rendig, csak az SO járulékok jelennek meg, az SS és QM járulékok nem. A hullámforma alakja ebben az esetben a h_+ és h_\times polarizációkat

tekintve a

$$h_{\times} = \mathcal{A} \left(h_{\times}^0 + \beta_1 h_{\times}^{0\beta} \right) \quad (4.3)$$

alakban adható meg, ahol $\mathcal{A} = 2Gm\nu\varepsilon/(c^2 D_L)$, D_L a luminozítás távolság, a különböző járulékok pedig

$$4h_{+}^0 = \sum_{+,-} \left[c_1^{(\pm 0)} (\sin^2 \theta - 2) \cos \Phi_{2\pm} - 2k^{(\pm)} \sin \kappa_1 \sin 2\theta \sin \Phi_{1\pm} \right] + 6 \sin^2 \kappa_1 \sin^2 \theta \cos \Phi, \quad (4.4)$$

$$2h_{\times}^0 = \sum_{+,-} \left[c_1^{(\pm 0)} \cos \theta \sin \Phi_{2\pm} - 2k^{(\pm)} \sin \theta \sin \kappa_1 \cos \Phi_{1\pm} \right], \quad (4.5)$$

$$2h_{+}^{0\beta} = \sum_{+,-} \left[c_2^{(\pm 0)} \sin 2\theta \sin \Phi_{1\pm} + k^{(\pm)} \sin \kappa_1 (\sin^2 \theta - 2) \cos \Phi_{2\pm} \right] - 3 \sin 2\kappa_1 \sin^2 \theta \cos \Phi, \quad (4.6)$$

$$h_{\times}^{0\beta} = \sum_{+,-} \left[k^{(\pm)} \cos \theta \sin \kappa_1 \sin \Phi_{2\pm} + c_2^{(\pm 0)} \sin \theta \cos \Phi_{1\pm} \right], \quad (4.7)$$

ahol $\Phi = 2\psi$, $\Phi_{1\pm} = \phi_n \pm 2\psi$ és $\Phi_{2\pm} = 2\phi_n \pm 2\psi$ jelöléseket a fázisokra, illetve

$$\begin{aligned} k^{(\pm)} &= \cos \kappa_1 \mp 1, \\ c_1^{(\pm 0)} &= \mp 2k^{(\pm)} - \sin^2 \kappa_1, \\ c_2^{(\pm 0)} &= \mp k^{(\pm)} - 2 \sin^2 \kappa_1. \end{aligned} \quad (4.8)$$

A fentiek alapján a h_{+} és h_{\times} polarizációk a következő alakban írhatók fel

$$h_{+} = \frac{\mathcal{A}}{4} \sum_{+,-} \left[A^{\pm} \cos \Phi_{2\pm} + B^{\pm} \sin \Phi_{1\pm} + C \cos \Phi \right], \quad (4.9)$$

$$h_{\times} = \frac{\mathcal{A}}{2} \sum_{+,-} \left[A_{\times}^{\pm} \sin \Phi_{2\pm} + B_{\times}^{\pm} \cos \Phi_{1\pm} \right], \quad (4.10)$$

ahol az egyes mennyiségek:

$$\begin{aligned}
A^\pm &= c_1^{(\pm 0)} (\sin^2 \theta - 2) + 2c_2^{(\pm 0)} \sin 2\theta, \\
B^\pm &= 2k^{(\pm)} \sin \kappa_1 (-\sin 2\theta + \sin^2 \theta - 2), \\
C &= \frac{3}{2} (\sin^2 \kappa_1 - \sin 2\kappa_1) \sin^2 \theta, \\
A_\times^\pm &= \left(c_1^{(\pm 0)} \cos \theta + 2k^{(\pm)} \cos \theta \sin \kappa_1 \right), \\
B_\times^\pm &= 2 \left(-k^{(\pm)} \sin \kappa_1 + c_2^{(\pm 0)} \right) \sin \theta.
\end{aligned} \tag{4.11}$$

4.1.2. Dinamikai egyenletek spin-dominált esetben

Mint ahogy azt fentebb láttuk, vezető rendű spin-dominált esetben a dinamikát a nagyobbik spin uralja ($k=1$), ebből következően csak az SO járulékok jelennek meg az egyenletekben, illetve $\psi_1 = \pi/2$. Így a gyorsulás:

$$a_3 = a_3^{SO} = \frac{G^2 m^2 \eta}{c^3 r^3} (4\nu^{-1} + 3) \chi_1 \frac{L_N}{\mu r} \sin \kappa_1 \cos \left(\chi_c + \psi_c - \frac{\pi}{2} \right). \tag{4.12}$$

Ennek segítségével megadhatjuk a spin-dominált rendszer dinamikai fejlődési egyenleteit, melyekhez ha felhasználjuk, hogy $\cos(x - \pi/2) = \sin(x)$, $\sin(x - \pi/2) = -\cos(x)$ és $\beta_1 = \kappa_1 - \alpha \longrightarrow \dot{\beta}_1 = \dot{\kappa}_1 - \dot{\alpha}$, az egyes paraméterekre vonatkozó összefüggések:

- α inklináció:

$$\dot{\alpha}^{SO} = \frac{G^2 m^2 \eta}{c^3 r^3} (4\nu^{-1} + 3) \chi_1 \sin \kappa_1 \sin(\chi_c + \psi_c) \cos(\chi_c + \psi_c), \tag{4.13}$$

- ϕ_n felszálló csomó hossza:

$$\dot{\phi}_n^{SO} = -\frac{G^2 m^2 \eta}{c^3 r^3} (4\nu^{-1} + 3) \chi_1 \sin \kappa_1 \frac{\sin^2(\psi_c + \chi_c)}{\sin \alpha}, \tag{4.14}$$

- ψ_c szög:

$$\dot{\psi}_c^{SO} = -\frac{G^2 m^2 \eta}{c^3 r^3} (4\nu^{-1} + 3) \chi_1 \sin \kappa_1 \frac{\sin^2(\psi_c + \chi_c)}{\tan \alpha}, \tag{4.15}$$

- κ_1 spin polárszög:

$$\dot{\kappa}_1^{SO} = \frac{G^2 m^2 \eta}{c^3 r^3} (4\nu^{-1} + 3) \chi_1 \sin \kappa_1 \sin(\chi_c + \psi_c) \cos(\chi_c + \psi_c),$$

- β_1 az egyes spin és a teljes impulzusmomentum által bezárt szög:

$$\dot{\beta}_1^{SO} = 0. \tag{4.16}$$

A kapott összefüggésből látjuk, hogy vezető rendben, amíg csak az SO járulékokat kell figyelembe vennünk $\dot{\kappa}_1^{SO} = \dot{\alpha}_1^{SO}$, ami alapján vezető rendben alkalmazhatjuk a $\kappa_1 = \alpha$ szöghelyettesítést.

4.1.3. Időátlagolt egyenletek

A fenti pillanatnyi egyenletekre még el kell végeznünk az egy periódusra való átlagolást ahhoz, hogy a számunkra szükséges fejlődési egyenleteket kapjuk. Az átlagolást definíció szerint a következő összefüggés adja meg:

$$\bar{f} = \frac{1}{T} \int_0^{2\pi} \frac{f(\chi_c)}{\dot{\chi}_c} d\chi_c \quad (4.17)$$

ahol a T radiális periódus, felhasználva a (3.12) összefüggést

$$T = \int_0^{2\pi} \frac{1}{\dot{\chi}_c} d\chi_c = 2\pi \frac{\mu r^2}{L_N}. \quad (4.18)$$

Felhasználva, hogy $\int_0^{2\pi} \sin(x+c) \cos(x+c) dx = 0$, $\dot{\kappa}_1$ és $\dot{\beta}_1$ átlagaira 0-át kapunk. A $\int_0^{2\pi} \sin^2(x+c) dx = \pi$ összefüggés felhasználásával:

$$\frac{d}{dt} \bar{\phi}_n^{SO} = -\frac{1}{2} \frac{G^2 m^2 \eta}{c^3 r^3} (4\nu^{-1} + 3) \chi_1 \frac{\sin \kappa_1}{\sin \alpha}, \quad (4.19)$$

$$\frac{d}{dt} \bar{\psi}_c^{SO} = -\frac{G^2 m^2 \eta}{2c^3 r^3} (4\nu^{-1} + 3) \chi_1 \frac{\sin \kappa_1}{\tan \alpha}. \quad (4.20)$$

Felhasználva, hogy $\varepsilon = Gm/c^2 r \approx v^2/c^2$ és $L_N \approx \mu r v$, kapjuk, hogy

$$\frac{d}{dt} \bar{\phi}_n^{SO} = -\frac{\eta}{2} \frac{c^3}{Gm} \varepsilon^3 (4\nu^{-1} + 3) \chi_1 \frac{\sin \kappa_1}{\sin \alpha}, \quad (4.21)$$

$$\frac{d}{dt} \bar{\psi}_c^{SO} = -\frac{\eta}{2} \frac{c^3}{Gm} \varepsilon^3 (4\nu^{-1} + 3) \chi_1 \frac{\sin \kappa_1}{\tan \alpha}, \quad (4.22)$$

illetve

$$\dot{\varepsilon} = -\left(\frac{Gm}{c^2 r^2}\right) \dot{r}. \quad (4.23)$$

\dot{r} -hoz felhasználva [16] cikk (4.12) összefüggését, illetve bevezetve a ξ kis paramétert és akörül a kifejezéseket sorba fejtvé:

$$\dot{\varepsilon} = \frac{4}{105} \frac{\xi c^3 \varepsilon^{11/2}}{Gm} (336 - 1751\varepsilon - 3724\chi_1 \varepsilon^{3/2} \sin \kappa_1), \quad (4.24)$$

$$\frac{d}{dt} \bar{\phi}_n^{SO} = -\frac{1}{2} \frac{c^3}{Gm} \varepsilon^3 \chi_1 \frac{\sin \kappa_1}{\sin \alpha} (4 - 5\xi \varepsilon^{1/2}), \quad (4.25)$$

$$\dot{\psi} = \dot{\chi}_c + \frac{d}{dt} \bar{\psi}_c^{SO} = \frac{c^3}{Gm} \varepsilon^{3/2} + \dot{\phi}_n \cos \alpha. \quad (4.26)$$

Felhasználva a már fentebb említett $\kappa = \alpha$ relációt, a spin-dominált hullámformára

vezető rendben a következő szekuláris fejlődési egyenleteket kapjuk:

$$\dot{\varepsilon} = \frac{64 \nu c^3 \varepsilon^5}{5 Gm}, \quad (4.27)$$

$$\dot{\phi}_n = -\frac{1}{2} \frac{c^3}{Gm} \varepsilon^3 \chi_1 (4 - 5\nu), \quad (4.28)$$

$$\dot{\psi} = \frac{c^3}{Gm} \varepsilon^{3/2} + \dot{\phi}_n \cos \kappa_1. \quad (4.29)$$

4.2. Transzformáció frekvenciátérbe

A frekvenciátérbe való transzformációhoz elsőként vegyük az [6] cikk (7) és (5) összefüggéseit, felhasználva azt a közelítést, hogy kis tömegarány esetén $\mu \rightarrow \nu m$. Ekkor egyszerű $(t_c - t)$ alakra való átrendezéssel kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} t_c - t &= \frac{5Gm}{256c^3\nu} \frac{1}{\varepsilon^4} \\ &= \frac{5c^5(Gm)^{-5/3}}{256\nu} \omega^{-8/3}, \end{aligned} \quad (4.30)$$

ahol $\omega = \pi f$ a pálya körfrekvencia, ahol az f a gravitációs hullám frekvenciája körpályára. A fenti egyenletből ε -t kifejezve és azt visszahelyettesítve (4.28) és (4.29) összefüggésekbe, majd ezeket idő szerint integrálva kapjuk $\phi_n(t)$ -re és $\psi(t)$ -re, hogy

$$\begin{aligned} \phi_n(t) &= \phi_{nc} + \frac{5^{3/4}}{32} \left(\frac{c^3}{Gm\nu^3} \right)^{1/4} \\ &\quad \times (t_c - t)^{1/4} \chi_1 (4 - 5\nu), \end{aligned} \quad (4.31)$$

$$\begin{aligned} \psi(t) &= \psi_c - 5^{-5/8} \left(\frac{c^3}{mG} \right)^{5/8} \nu^{-3/8} (t_c - t)^{5/8} \\ &\quad + \phi_n \cos \kappa_1. \end{aligned} \quad (4.32)$$

ahol ϕ_{nc} és ψ_c integrálási konstansok. Ezt követően a (4.30) összefüggést visszaírva a $\phi_n(t)$ és $\psi(t)$ -re kapott összefüggésekbe, megkapjuk azok fázistól függő alakját:

$$\phi_n(f) = \phi_{nc} + \frac{5c^2(4\nu^{-1} - 5)\chi_1}{128(\pi Gmf)^{2/3}}, \quad (4.33)$$

$$\begin{aligned} \psi(f) &= \psi_c - \frac{c^5\nu^{-1}}{32(\pi Gmf)^{5/3}} \\ &\quad \times \left(1 + \frac{5(4\nu^{-1} - 5)\chi_1 \cos \kappa_1}{4c^3(\pi Gmf)^{-7/3}} \right). \end{aligned} \quad (4.34)$$

Miután megadtuk a fázisok frekvenciafüggő alakját, meg kell határoznunk a hullámforma alakját is frekvenciátérben, melyhez a [7] és [13] cikkekben látottak alapján

járunk el.

Tekintsük a $\mathcal{A} \sin \Phi$, $\mathcal{A} \cos \Phi$ harmonikus függvényeket, melyekre feltesszük, hogy $\dot{\mathcal{A}}/\mathcal{A} \ll \dot{\Phi}$ és $\ddot{\Phi} \ll \dot{\Phi}^2$ (itt eltekintünk \mathcal{A} és Φ időfüggésétől). Ekkor a $\dot{\Psi}(\mathcal{T}) = 0$ stacionárius fázis közelítés (SPA = *stationary phase approximation*) ezeknek a függvényeknek a Fourier transzformáltjaira alkalmazva:

$$\mathcal{F}[\mathcal{A} \sin \Phi] \simeq \frac{\mathcal{A}[f(\mathcal{T})]}{2} \sqrt{\frac{2\pi}{|\dot{\Psi}[f(\mathcal{T})]|}} e^{i(\Psi[f(\mathcal{T})] + \frac{\pi}{4})}, \quad (4.35)$$

$$\mathcal{F}[\mathcal{A} \cos \Phi] \simeq \frac{\mathcal{A}[f(\mathcal{T})]}{2} \sqrt{\frac{2\pi}{|\dot{\Psi}[f(\mathcal{T})]|}} e^{i(\Psi[f(\mathcal{T})] - \frac{\pi}{4})}, \quad (4.36)$$

ahol a \mathcal{T} nyeregpont teljesíti a stacionárius fázis közelítés feltételét.

Az (4.3) hullámforma vezető rendű alakjában megjelennek a

$$\begin{aligned} \Psi(t) &= 2\pi t f - \Phi(t), \\ \Psi_{1\pm}(t) &= 2\pi t f - \Phi_{1\pm}(t), \\ \Psi_{2\pm}(t) &= 2\pi t f - \Phi_{2\pm}(t). \end{aligned} \quad (4.37)$$

fázisok, így jelen esetben öt feltételünk van: $\dot{\Psi}(\mathcal{T}) = 0$ és $\dot{\Psi}_{1,2\pm}(\mathcal{T}_{1,2\pm}) = 0$, melyek alapján $f = \dot{\Phi}_{1,2\pm}(\mathcal{T})/(2\pi)$. Így az (4.37) összefüggésekből az SPA feltételek felhasználásával kapjuk, hogy

$$2\dot{\psi}(\mathcal{T}) = 2\pi f, \quad (4.38)$$

$$\dot{\phi}_n(\mathcal{T}_{1\pm}) \pm 2\dot{\psi}(\mathcal{T}_{1\pm}) = 2\pi f, \quad (4.39)$$

$$2\dot{\phi}_n(\mathcal{T}_{2\pm}) \pm 2\dot{\psi}(\mathcal{T}_{2\pm}) = 2\pi f. \quad (4.40)$$

Ezek az összefüggések öt \mathcal{T} , $\mathcal{T}_{1\pm}$ és $\mathcal{T}_{2\pm}$ nyeregpontot szolgáltatnak, viszont mi a vezető \mathcal{T} nyeregpontot alkalmazzuk egyedül a továbbiakban, tekintve, hogy a $\mathcal{T}_{1\pm}$ és $\mathcal{T}_{2\pm}$ nyeregpontok \mathcal{T} -nek kis korrekciói. Így az egyetlen SPA feltételt az (4.38) összefüggés adja, amely egyenértékű a (4.30) összefüggéssel, tehát a vezető nyeregpont

$$\mathcal{T} = \frac{5c^5(Gm)^{-5/3}}{256\nu} (\pi f)^{-8/3}. \quad (4.41)$$

Szükségesek még a fázisok második deriváltjai a \mathcal{T} nyeregpontban, melyek

$$\begin{aligned} \ddot{\Psi}(\mathcal{T}) &= -2\ddot{\psi}(\mathcal{T}), \\ \ddot{\Psi}_{1\pm}(\mathcal{T}) &= -\ddot{\phi}_n(\mathcal{T}) \mp 2\ddot{\psi}(\mathcal{T}), \\ \ddot{\Psi}_{2\pm}(\mathcal{T}) &= -2\ddot{\phi}_n(\mathcal{T}) \mp 2\ddot{\psi}(\mathcal{T}), \end{aligned} \quad (4.42)$$

így a frekvenciafüggő fázisok a következők:

$$\begin{aligned}
\Psi &= \Psi_c - 2\psi(f), \\
\Psi_{1\pm} &= \Psi_c - \phi_n(f) \mp 2\psi(f), \\
\Psi_{2\pm} &= \Psi_c - 2\phi_n(f) \mp 2\psi(f),
\end{aligned} \tag{4.43}$$

ahol

$$\Psi_c = 2\pi ft_c - G^{-5/3} c^5 \frac{5m^{-5/3}}{128\nu} (\pi f)^{-5/3}. \tag{4.44}$$

A \tilde{h}_+ és \tilde{h}_\times frekvenciaterben felírt alakja a stacionárius fázis közelítéssel

$$\begin{aligned}
\tilde{h}_+ &= \frac{\bar{\mathcal{A}}}{8} \sum_{+,-} \left[A^\pm \sqrt{\frac{2\pi}{|\ddot{\Psi}_{2\pm}[f(\mathcal{T})]|}} e^{i(\Psi_{2\pm} - \frac{\pi}{4})} \right. \\
&\quad + B^\pm \sqrt{\frac{2\pi}{|\ddot{\Psi}_{1\pm}[f(\mathcal{T})]|}} e^{i(\Psi_{1\pm} + \frac{\pi}{4})} \\
&\quad \left. + C \sqrt{\frac{2\pi}{|\ddot{\Psi}[f(\mathcal{T})]|}} e^{i(\Psi - \frac{\pi}{4})} \right],
\end{aligned} \tag{4.45}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{h}_\times &= \frac{\bar{\mathcal{A}}}{4} \sum_{+,-} \left[A_\times^\pm \sqrt{\frac{2\pi}{|\ddot{\Psi}_{2\pm}[f(\mathcal{T})]|}} e^{i(\Psi_{2\pm} + \frac{\pi}{4})} \right. \\
&\quad \left. + B_\times^\pm \sqrt{\frac{2\pi}{|\ddot{\Psi}_{1\pm}[f(\mathcal{T})]|}} e^{i(\Psi_{1\pm} - \frac{\pi}{4})} \right],
\end{aligned} \tag{4.46}$$

ahol most már minden korábban időfüggő függvény illetve változó az f Fourier frekvencia függvénye. Az $\bar{\mathcal{A}} = 2Gm\nu\varepsilon(f)/(c^2 D_L)$ a frekvenciafüggő amplitúdó, melyben D_L a luminozítás távolság, $\varepsilon(f)$ -et pedig (4.27) integrálásával kapjuk felhasználva a (4.30) összefüggést

$$\varepsilon(f) = \frac{G^{2/3} m^{2/3} (f\pi)^{2/3}}{c^2}, \tag{4.47}$$

melyből

$$\bar{\mathcal{A}} = 2 \frac{G^{5/3} m^{5/3} \nu}{c^4 D_L} (f\pi)^{2/3}. \tag{4.48}$$

A hullámforma egyszerűbb alakra való hozásának érdekében a fázisok explicit alakjainak beírásával átalakítjuk a gyökös kiejezéseket, így a \tilde{h}_+ és \tilde{h}_\times új alakjai:

$$\begin{aligned} \tilde{h}'_+ = & \frac{\mathcal{A}'}{8} \sum_{+,-} \left[A^\pm (|\pm 1 - \delta (1 \pm \cos \kappa_1)|)^{-1/2} e^{i(\Psi_{2\pm} - \frac{\pi}{4})} \right. \\ & + B^\pm \left(\left| \pm 1 - \delta \left(\frac{1}{2} \pm \cos \kappa_1 \right) \right| \right)^{-1/2} e^{i(\Psi_{1\pm} + \frac{\pi}{4})} \\ & \left. + C (|1 - \delta \cos \kappa_1|)^{-1/2} e^{i(\Psi - \frac{\pi}{4})} \right], \end{aligned} \quad (4.49)$$

$$\begin{aligned} \tilde{h}'_\times = & \frac{\mathcal{A}'}{4} \sum_{+,-} \left[A^\pm_\times (|\pm 1 - \delta (1 \pm \cos \kappa_1)|)^{-1/2} e^{i(\Psi_{2\pm} + \frac{\pi}{4})} \right. \\ & \left. + B^\pm_\times \left(\left| \pm 1 - \delta \left(\frac{1}{2} \pm \cos \kappa_1 \right) \right| \right)^{-1/2} e^{i(\Psi_{1\pm} - \frac{\pi}{4})} \right], \end{aligned} \quad (4.50)$$

$$\text{ahol } \mathcal{A}' = 2 \left(\frac{5}{96} \right)^{1/2} \frac{G^{5/6} \nu^{1/2}}{c^{3/2} D_L \pi^{2/3}} m^{5/6} f^{-7/6}, \quad (4.51)$$

valamint bevezetjük a következő jelölést:

$$\delta = c^{-3} G m \pi f \chi_1 (4 - 5\nu). \quad (4.52)$$

4.3. Antennafüggvények

Miután meghatároztuk a gravitációs hullám \tilde{h}_+ és \tilde{h}_\times polarizációs állapotait frekvencia térben, meg kell határoznunk a h , detektor által érzékelt jel alakját, amely

$$h = F_+ \tilde{h}_+ + F_\times \tilde{h}_\times \quad (4.53)$$

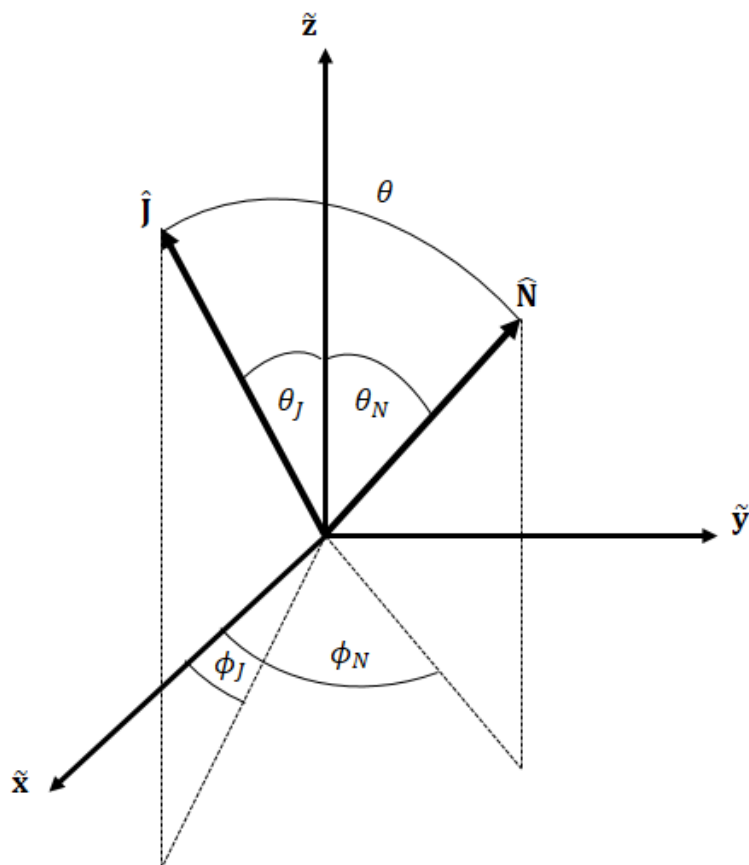
alakban adható meg, ahol az F_+ és F_\times úgynevezett antennafüggvények. Ezek a [16] cikk (4.25) összefüggései alapján a következő alakúak:

$$F_+ = \frac{1}{2} (1 + \cos^2 \theta_N) \cos 2\phi_N \cos 2\iota - \cos \theta_N \sin 2\phi_N \sin 2\iota, \quad (4.54)$$

$$F_\times = \frac{1}{2} (1 + \cos^2 \theta_N) \cos 2\phi_N \sin 2\iota + \cos \theta_N \sin 2\phi_N \cos 2\iota. \quad (4.55)$$

Az (4.54) és (4.55) összefüggésekben θ_N és ϕ_N a kompakt kettős elhelyezkedését rögzítő szögek a detektor rendszeréből nézve, azaz az $\hat{\mathbf{N}}$ látóirányt kijelölő szögek, ι pedig a polarizációs szög, amelyet a gravitációs hullám polarizációs tengelye és a (gömbi polár koordinátarendszerben vett) $\hat{\theta}$ konstans azimut zár be.

Az antennafüggvények explicit megadásához, mint látjuk, ki kell fejeznünk a ι polarizációs szöget. Ehhez az (4.1) ábrán láttott módon vegyünk fel egy a detektorhoz rendelt $\mathcal{K}_D = (\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{y}}, \tilde{\mathbf{z}})$ koordináta bázist, ahol a detektor karjai az $\tilde{\mathbf{x}}$ - és az $\tilde{\mathbf{y}}$ -irányokban



4.1. ábra. Az ábrán láthatjuk a detektor rendszerében a \hat{J} teljes impulzusmomentum irányát, melyet a θ_J és ϕ_J , illetve a forrás pozícióját megadó \hat{N} látóirányt, amelyet a θ_N és ϕ_N szögek jelölnek ki. A \hat{J} és \hat{N} irányok θ szöget zárnak be (ez a szög szerepel hullámformában).

állnak. Vegyünk fel még két irányt a detektor rendszerében: az \hat{N} látóirányt, és a \hat{J} teljes impulzusmomentum vektor irányát, mely 2PN rendig állandónak tekinthető. E két irányról tudjuk a fentiek alapján, hogy $\cos \theta = \hat{J} \cdot \hat{N}$. A két irány a detektor rendszerében gömbi polár koordinátákat használva

$$\hat{N} = \begin{pmatrix} \sin \theta_N \cos \phi_N \\ \sin \theta_N \sin \phi_N \\ \cos \theta_N \end{pmatrix}, \quad (4.56)$$

$$\hat{J} = \begin{pmatrix} \sin \theta_J \cos \phi_J \\ \sin \theta_J \sin \phi_J \\ \cos \theta_J \end{pmatrix}. \quad (4.57)$$

Így a \hat{N} és \hat{J} skaláris szorzatából összefüggést nyerünk a θ szögre a detektor rendszerében, mely

$$\cos \theta = \cos \theta_J \cos \theta_N + \sin \theta_J \sin \theta_N \cos (\phi_J - \phi_N). \quad (4.58)$$

Másfelől tekintsünk egy, a gravitációs sugárzáshoz rendelt \mathcal{K}_R rendszert, melyben a gravitációs hullámok terjedési iránya az $\hat{\mathbf{N}}$ látóiránnyal párhuzamosan történik. Ennek a rendszernek a bázisvektorai a [16] cikk (4.22)-es összefüggései alapján

$$\mathbf{e}_{\tilde{x}}^R = \frac{\hat{\mathbf{N}} \cdot \cos \theta - \hat{\mathbf{J}}}{\sin \theta}, \quad (4.59)$$

$$\mathbf{e}_{\tilde{y}}^R = \frac{\hat{\mathbf{J}} \times \hat{\mathbf{N}}}{\sin \theta}, \quad (4.60)$$

$$\mathbf{e}_{\tilde{z}}^R = \hat{\mathbf{N}}. \quad (4.61)$$

A ι polarizációs szögre a [16] cikk a következő két definíciót adja:

$$\cos \iota = \hat{\theta} \cdot \mathbf{e}_{\tilde{x}}^R \quad (4.62)$$

és

$$\tan \iota = \frac{\hat{\mathbf{N}} \cdot (\hat{\mathbf{J}} \times \tilde{\mathbf{z}})}{(\hat{\mathbf{J}} \cdot \tilde{\mathbf{z}}) - (\hat{\mathbf{J}} \cdot \hat{\mathbf{N}})(\hat{\mathbf{N}} \cdot \tilde{\mathbf{z}})}, \quad (4.63)$$

melyek segítségével meg tudjuk adni a ι szög explicit alakját. Amennyiben a (4.62) összefüggésből indulunk ki, akkor a gömbi polárkoordinátarendszer $\hat{\theta}$ azimutuszögét fel kell írunk a detektor bázisvektoraival, amely definíció szerint

$$\hat{\theta} = \cos \theta_N \cos \phi_N \tilde{\mathbf{x}} + \cos \theta_N \sin \phi_N \tilde{\mathbf{y}} - \sin \theta_N \tilde{\mathbf{z}}. \quad (4.64)$$

Az $\mathbf{e}_{\tilde{x}}^R$ irány kifejtése

$$\mathbf{e}_{\tilde{x}}^R = \frac{1}{\sin \theta} \begin{pmatrix} \sin \theta_N \cos \phi_N \cos \theta - \sin \theta_J \cos \phi_J \\ \sin \theta_N \sin \phi_N \cos \theta - \sin \theta_J \sin \phi_N \\ \cos \theta_N \cos \theta - \cos \theta_J \end{pmatrix}, \quad (4.65)$$

melyhez felhasználva az (4.58) összefüggést, trigonometrikus átalakításokkal megkapjuk a ι szög koszinuszát:

$$\cos \iota = \frac{\cos \theta_J \sin \theta_N - \cos \theta_N \sin \theta_J \cos(\phi_J - \phi_N)}{\sin \theta}, \quad (4.66)$$

mely segítségével az antennafüggvények expliciten megadhatóak.

5. fejezet

Spin-dominált hullámforma Fisher-analízise

Az analízishez a [18] által az 1. táblázatban megadott Advanced LIGO zajfüggvényt használjuk, amely

$$S(f) = S_0 \cdot \left[\left(\frac{f}{f_0} \right)^{-4,14} - 5 \cdot \left(\frac{f}{f_0} \right)^{-2} + \frac{111 \cdot \left(1 - \left(\frac{f}{f_0} \right)^2 + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{f}{f_0} \right)^4 \right)}{1 + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{f}{f_0} \right)^2} \right], \quad (5.1)$$

ahol $S_0 = 10^{-49} \frac{1}{Hz}$, $f_0 = 215 Hz$, a zajfüggvény alsó érvényességi határa pedig $f_{\min} = 20 Hz$.

A hullámforma tisztán h_{\times} polarizációs állapotát vizsgáljuk, melyet azzal a feltétellel tehetünk meg, hogy az antennafüggvényekre fennáll, hogy $F_{\times} = 1$ és $F_{+} = 0$. Ez az állapot a látóiránynak a detektor rendszerében vett megfelelő megválasztásával érhető el. Az analízis paramétertere legyen $\mathcal{P}_{\times} = (\ln D_L, \ln m, \ln \nu, \chi_1, \cos \kappa_1, \cos \theta)$. Négy típusú beállítást vizsgálunk meg, ahol valamely kiválasztott paramétert változtatjuk egy bizonyos intervallumon, míg a többi változatlanul hagyjuk.

Elsőként két különböző m_1 tömeg esetén nézzük meg a hibákat és a korrelációkat, ahol a látóirány szögét változtatjuk. Az $m_1 = 45 M_{\odot}$ választással a kapott eredményeinket a (5.1) tartalmazza.

Az $m_1 = 90 M_{\odot}$ esetén a (5.2) táblázatban találhatóak az eredményeink. Amit a két esetben látunk az, hogy az m , ν , χ_1 és $\cos \kappa_1$ viszonylag jól becsülhető mennyiségek, hibájuk a 10^{-2} nagyságrendű tartományba esik. A $\cos \theta$ hibájának mértéke függ attól, hogy milyen alapértéket választottunk, hibája $1 - 10^{-1}$ nagyságrendek között változik. Minnél közelebb esik a látóirány a teljes impulzusmomentum irányához, annál jobban becsülhető a látóirány szöge. A D_L mennyiség hibája viszonylag nagy, 1 nagyságrendbe eső. Az össztömeg növelésével a hibák kis mértékben romlanak, mint a bevezető modellekben is. A két tömegparaméter közötti korreláció erős, egyhez tart,

$\cos \theta$	$\Delta D_L/D_L$	$\Delta m/m$	$\Delta \nu/\nu$	$\Delta \chi_1$	$\Delta \cos \kappa_1$	$\Delta \cos \theta$	$c_{m\nu}$	$c_{m\chi_1}$	$c_{\nu\chi_1}$
0	1.131	0.0067	0.0112	0.0491	0.0229	1.077	-0.977	-0.099	0.185
0.35	1.106	0.0294	0.0490	0.0452	0.0218	1.117	-0.999	-0.654	0.666
0.6	1.084	0.0105	0.0174	0.0270	0.0221	0.907	-0.991	-0.131	0.182
0.8	1.083	0.0253	0.0418	0.0344	0.0226	0.683	-0.999	-0.745	0.758
0.99	1.109	0.0288	0.0480	0.0349	0.0215	0.163	-0.999	-0.764	0.779

5.1. táblázat. Az első analízis során az $m_1 = 45M_\odot$, $m_2 = 1M_\odot$, $\chi_1 = 1$, $\cos \kappa_1 = \frac{1}{4}$ beállítást vettük, mialatt a $\cos \theta$ -át változtatjuk.

míg a tömegparaméterek más paraméterekkel nem mutatnak erős korrelációt.

$\cos \theta$	$\Delta D_L/D_L$	$\Delta m/m$	$\Delta \nu/\nu$	$\Delta \chi_1$	$\Delta \cos \kappa_1$	$\Delta \cos \theta$	$c_{m\nu}$	$c_{m\chi_1}$	$c_{\nu\chi_1}$
0	2.128	0.0218	0.0364	0.0620	0.0352	2.042	-0.988	-0.316	0.405
0.3	2.123	0.0127	0.0220	0.0455	0.0354	1.953	-0.967	-0.259	0.340
0.45	2.114	0.0162	0.0260	0.0366	0.0343	1.838	-0.980	-0.262	0.367
0.65	2.095	0.0589	0.0985	0.0662	0.0347	1.609	-0.999	-0.890	0.904
0.99	2.045	0.0322	0.0526	0.0366	0.0310	0.302	-0.995	0.658	0.709

5.2. táblázat. Az első analízisünkhöz hasonlóan jelen esetben is a $\cos \theta$ paramétert változtattuk. A további paraméterek értéke a beállítás során: $m_1 = 90M_\odot$, $m_2 = 1M_\odot$, $\chi_1 = 1$, $\cos \kappa_1 = \frac{1}{4}$.

Másodszor azt az esetet vetük, hogy az m_1 értékét változtattuk, a kapott értékeket az (5.3) táblázat foglalja össze.

$m_1[M_\odot]$	$\Delta D_L/D_L$	$\Delta m/m$	$\Delta \nu/\nu$	$\Delta \chi_1$	$\Delta \cos \kappa_1$	$\Delta \cos \theta$	$c_{m\nu}$	$c_{m\chi_1}$	$c_{\nu\chi_1}$
30	0.960	0.0241	0.0402	0.0403	0.0227	0.761	-0.999	-0.695	0.705
45	1.084	0.0105	0.0174	0.0270	0.0221	0.907	-0.991	-0.131	0.182
50	1.190	0.0156	0.0238	0.0267	0.0292	0.946	-0.995	-0.126	0.170
75	1.752	0.0197	0.0340	0.0316	0.0307	1.318	-0.993	-0.500	0.554
85	1.920	0.0126	0.0209	0.0315	0.0322	1.586	-0.972	-0.267	0.392

5.3. táblázat. Második típusú analízisként az m_1 tömegparamétert változtatjuk. Az állandó paraméterek kezdeti értéke: $m_2 = 1M_\odot$, $\chi_1 = 1$, $\cos \kappa_1 = \frac{1}{4}$, $\cos \theta = 0, 6$.

Harmadik esetben a dimenziómentes spinparaméter hibákra gyakorolt hatását vizsgáltuk - (5.4). A χ_1 növelésével a paraméterek becslhetősége javul, a tömegparaméterek hibái két nagyságrenddel csökkennek, mialatt χ_1 értékét szinte a teljes értelmezési tartományán változtatjuk.

Negyedik típusként olyan eseteket vizsgáltunk, ahol a ν redukált tömeget választottuk állandónak, (5.5) és (5.6) táblázat. A kapott értékeken azt látjuk, hogy a hibák az

χ_1	$\Delta D_L/D_L$	$\Delta m/m$	$\Delta \nu/\nu$	$\Delta \chi_1$	$\Delta \cos \kappa_1$	$\Delta \cos \theta$	$c_{m\nu}$	$c_{m\chi_1}$	$c_{\nu\chi_1}$
0.1	0.864	0.6016	1.0010	0.0649	0.3769	0.884	-0.999997	-0.875	0.875
0.2	0.993	0.1369	0.2280	0.0341	0.1216	0.456	-0.999974	-0.669	0.671
0.5	0.950	0.0361	0.0594	0.0314	0.0517	0.467	-0.9996	-0.599	0.607
0.6	0.897	0.0084	0.0140	0.0272	0.0386	0.496	-0.9926	-0.217	0.258
0.9	0.951	0.0113	0.0188	0.0289	0.0257	0.474	-0.9959	-0.370	0.403

5.4. táblázat. Harmadik típusként a χ_1 dimenziómentes spinpáraméter értékét módosítjuk. További paraméterek értéke: $m_1 = 30M_\odot$, $m_2 = 1M_\odot$, $\cos \kappa = \frac{1}{4}$, $\cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

össztömeg változtatásával számottevően nem változnak, egy adott paramétert tekintve azonos nagyságrendűek.

$m_1[M_\odot]$	$m_2[M_\odot]$	$\Delta D_L/D_L$	$\Delta m/m$	$\Delta \nu/\nu$	$\Delta \chi_1$	$\Delta \cos \kappa_1$	$\Delta \cos \theta$
30	1	0.960	0.0241	0.0402	0.0403	0.0227	0.761
40	4/3	0.901	0.0227	0.0381	0.0405	0.0249	0.724
42.5	17/12	0.905	0.0186	0.0311	0.0362	0.0265	0.750
55	11/6	0.939	0.0233	0.0388	0.0432	0.0333	0.759
60	2	0.969	0.0167	0.0280	0.0423	0.0355	0.786

5.5. táblázat. A negyedik típusban az m_1 és m_2 tömegeket változtatjuk úgy, hogy a tömegarányt a $\nu = \frac{1}{30}$ értéken tartjuk. A további paraméterek értékei: $\cos \kappa = \frac{1}{4}$, $\cos \theta = 0,6$, $\chi = 1$.

$m_1[M_\odot]$	$m_2[M_\odot]$	$c_{m\nu}$	$c_{m\chi_1}$	$c_{\nu\chi_1}$
30	1	-0.999	-0.695	0.705
40	4/3	-0.998	-0.639	0.654
42,5	17/12	-0.996	-0.495	0.523
55	11/6	-0.995	-0.539	0.575
60	2	-0.988	-0.428	0.488

5.6. táblázat. A negyedik típusú analízishez tartozó korrelációk értékei.

Az analízist a h_+ polarizációra végezve hasonló eredményeket kapunk.

6. fejezet

Összefoglalás, további tervek

A dolgozatban megismertük a Fisher-mátrix analízis eljárásának alapjait, hogy hogyan állítjuk elő a Γ_{ab} Fisher-információs mátrixot, mely inverzének, a Σ_{ab} kovarianciamátrixnak diagonális elemei megadják az egyes paraméterek relatív négyzetes középértékeit, az off-diagonális elemei pedig az egyes paraméterek közötti korrelációk mértékét.

Bemutattunk néhány példát egyszerű hullámformák analízisére. A példákból azt a következtetést vonhattuk le, hogy vannak a rendszernek a gravitációs jelalak alapján jól meghatározható mennyiségei, mint például a chirp tömeg és egy bizonyos össztömeghatárig a redukált tömeg. Viszont láttuk azt is, hogy a vezető rendű spin-pálya kölcsönhatási tag megjelenésével a hibák drasztikusan romlanak, a korrelációk pedig erősödnek, közel egyhez tartanak.

Célunk a spin-dominált hullámforma Fisher-mátrix analízise volt. Ez a hullámforma különböző tömegű fekete lyukak, vagy neutron csillag - fekete lyuk kettős rendszeréből származó gravitációs hullámot ír le. A spin dominált hullámformának kilenc paramétere van, ebből a jelenlegi dolgozatban hat paraméternek (a D_L luminozítás távolság, az m össztömeg, a ν tömegarány, az \mathbf{S}_1 -hez tartozó χ_1 dimenziómentes spinparaméter, $\cos \kappa_1$ a pálya-impulzuszórány és az \mathbf{S}_1 spin által bezárt szög koszinusza és $\cos \theta$ a látóirány szögének koszinusza) végeztük el a Fisher-mátrix analízisét. Elemzésünk azt mutatta, hogy az m és ν tömegparaméterek jól becsülhetők, hibájuk általánosan 10^{-2} nagyságrendbe esik. Hasonlóan jó becslést kaphatunk a χ_1 és $\cos \kappa_1$ paraméterekre is, a $\cos \theta$ mennyiség hibáira 10^{-1} nagyságrendű értékeket kapunk. A D_L luminozítás távolság az eredmények szerint tipikusan rosszul mérhető mennyiség, hibája ríkan esik 1 alá. A korrelációkat tekintve a két tömegparaméter között erős korrelációt tapasztalunk ($|c_{m\nu}| \rightarrow 1$). Az egyes tömegparaméterek más paraméterekkel nem mutatnak erős korrelációt, viszont értékük nagy skálán változik (ahhoz képest, hogy $c \in [-1, 1]$), így még további vizsgálatuk szükséges.

A hullámformát jellemző további 3 paraméter, a t_c , ϕ_{nc} , ψ_c integrálási konstansok vizsgálatának bevonása az analízis során elvégzendő integrálásban instabilitásokat okoz. Jelenleg ennek okát vizsgáljuk.

Az analízist egyetlen detektorra végeztük el, terveinkben szerepel kiterjesztése a jelenleg működő két LIGO detektor esetére.

A munkából a teljes paraméterterre való kiterjesztés után publikáció készül, a spin-dominált hullámforma magasabb rendű járulékainak fegyelembevételével.

7. fejezet

Köszönetnyilvánítás

Szeretném megköszönni Dr. Gergely Árpád Lászlónak a bizalmat és a lehetőséget, hogy elkezdhettem a gravitációs csoportban tevékenykedni. Köszönöm Dr. Mikóczy Balázsnak munkám során az útmutatást és a türelmet, hogy mikor kerestem mindig szakított időt a kérdéseimre. Köszönöm Tápai Mártonnak a sok hasznos technikai tanácsot és segítséget. És szeretném megköszönni a családomnak a támogatást és biztatást.

8. fejezet

Függelék

8.1. Kutatási feladatok bemutatása

A következőkben bemutatom a témavezetőimtől kapott kutatási feladatomat és az általam elvégzett munkát.

A dolgozat célja a vezető rendű spin-dominált hullámforma (SDW) Fisher analízise volt. Így elsőként el kellett sajátítanom ennek a statisztikai eljárásnak az elméleti hátterét és metódusát, aminek segítségével lehetőségünk van magából a hullámformából megbecsülni az egyes paraméterek relatív hibáit és az azok közötti korrelációkat. Ehhez a [7] irodalom már közölt eredményeit tanulmányoztam és reprodukáltam.

Ezt követően előkészítettük az implicit alakban ismert hullámformát az analízishez. Az időfüggő explicit hullámforma felírásához szükség volt a kompakt kettős rendszer dinamikájának *körpálya közelítésére*. Először az [8] és [9] irodalmakban megjelent excentrikus esetben vett dinamikát újraszámoltam, ezzel megismerve a származtatási módszert (ennek során kijavítottam egy elírást). A használt bázisban az excentrikus esetben rosszul definiált a körpálya határeset, így Tápai Mártonnal közösen új bázisban származtattuk az SDW dinamikát körpálya közelítésben. A hullámforma-paraméterek fejlődési egyenleteinek meghatározásához posztnewtoni sorfejtést használtunk.

A Fisher analízishez szükséges, hogy megadjuk a jelalak Fourier transzformáltját, hogy az *frekvenciafüggő* legyen. A Fourier transzformáció előállítását stacionárius fázis közelítés segítségével végeztem [13] alapján.

Ezután meghatároztam a detektor, a hullám polarizációjának és a forrásnak a relatív helyzetét megadó antennafüggvényeket [15] és [16] alapján, az általunk használt rendszerhez igazodva.

Végül egy „*Mathematica*” program megírásával elvégeztem az SDW két polarizációs állapotára (h_+ és h_\times) a Fisher analízist különböző tömegű kettősökre és szögbeállításokra. Az eredményeket elemezve arra jutottam, hogy az SDW a spin paraméterek nagyobb pontosságú meghatározására alkalmas.

8.2. Dinamika - kiegészítés

A vezető rendű hullámforma ugyan csak az SO járulékokat tartalmazza, viszont a későbbi munkánk során magasabb PN rendeket is figyelembe véve, szükség lesz a QM járulékokra is, így előzetesen ezeket is meghatároztuk:

$$\dot{\alpha}^{QM} = -\frac{3G^3 m^3 \eta}{2c^4 r^4} w_1 \nu^{-1} \chi_1^2 \sin 2\kappa_1 \frac{\mu r}{L_N} \sin(\chi_c + \psi_c) \cos(\psi_c + \chi_c) , \quad (8.1)$$

$$\dot{\phi}_n^{QM} = \frac{3G^3 m^3 \eta}{2c^4 r^4} w_1 \nu^{-1} \chi_1^2 \sin 2\kappa_1 \frac{\mu r \sin^2(\psi_c + \chi_c)}{L_N \sin \alpha} , \quad (8.2)$$

$$\dot{\psi}_c^{QM} = \frac{3G^3 m^3 \eta}{2c^4 r^4} w_1 \nu^{-1} \chi_1^2 \sin 2\kappa_1 \frac{\mu r \sin^2(\psi_c + \chi_c)}{L_N \tan \alpha} , \quad (8.3)$$

$$\begin{aligned} \dot{\kappa}_1^{QM} &= -\frac{3G^2 \eta m^2}{r^3 c^3} w_1 \chi_1 \sin \kappa_1 \sin(\chi_c + \psi_c) \cos(\chi_c + \psi_c) - \\ &\quad - \frac{3G^3 m^3 \eta}{2c^4 r^4} w_1 \nu^{-1} \chi_1^2 \sin 2\kappa_1 \sin(\chi_c + \psi_c) \frac{\mu r}{L_N} \cos(\chi_c + \psi_c) , \end{aligned} \quad (8.4)$$

$$\dot{\beta}_1^{QM} = -\frac{3G^2 \eta m^2}{r^3 c^3} w_1 \chi_1 \sin \kappa_1 \sin(\chi_c + \psi_c) \cos(\chi_c + \psi_c) . \quad (8.5)$$

Az pályaperiódusra átlagolt egyenletek:

$$\frac{d}{dt} \bar{\kappa}_1^{QM} = 0, \quad (8.6)$$

$$\frac{d}{dt} \bar{\beta}_1^{QM} = 0, \quad (8.7)$$

$$\frac{d}{dt} \bar{\phi}_n^{QM} = \frac{3G^3 m^3 \eta}{4c^4 r^4} w_1 \nu^{-1} \chi_1^2 \frac{\mu r \sin 2\kappa_1}{L_N \sin \alpha} , \quad (8.8)$$

$$\frac{d}{dt} \bar{\psi}_c^{QM} = \frac{3G^3 m^3 \eta}{4c^4 r^4} w_1 \nu^{-1} \chi_1^2 \frac{\mu r \sin 2\kappa_1}{L_N \tan \alpha} , \quad (8.9)$$

amelybe bevezetve az ε kis paramétert:

$$\frac{d}{dt} \bar{\phi}_n^{QM} = \frac{3\eta}{4} \frac{c^3}{Gm} \varepsilon^{7/2} w_1 \nu^{-1} \chi_1^2 \frac{\sin 2\kappa_1}{\sin \alpha} , \quad (8.10)$$

$$\frac{d}{dt} \bar{\psi}_c^{QM} = \frac{3\eta}{4} \frac{c^3}{Gm} \varepsilon^{7/2} w_1 \nu^{-1} \chi_1^2 \frac{\sin 2\kappa_1}{\tan \alpha} . \quad (8.11)$$

Bevezetve a ξ kis paramétert és akörül a kifejezéseket sorba fejtve:

$$\frac{d}{dt} \bar{\phi}_n^{QM} = \frac{3}{4} \frac{c^3}{Gm} \varepsilon^{7/2} w_1 \chi_1^2 \frac{\sin 2\kappa_1}{\sin \alpha} (1 - 2\xi \varepsilon^{1/2}) , \quad (8.12)$$

$$\frac{d}{dt} \bar{\psi}_c^{QM} = \frac{3}{4} \frac{c^3}{Gm} \varepsilon^{7/2} w_1 \chi_1^2 \frac{\sin 2\kappa_1}{\tan \alpha} (1 - 2\xi \varepsilon^{1/2}) . \quad (8.13)$$

Irodalomjegyzék

- [1] B. P. Abbott et al., *Phys. Rev. Lett.* **116**, 061102 (2016).
- [2] Hulse, R.A. & Taylor, J.H., *Ap. J.* 195 L51 (1975).
- [3] B. P. Abbott et al., *Phys. Rev. Lett.* **116**, 241103 (2016).
- [4] B. P. Abbott et al., *Phys. Rev. Lett.* **116**, 131103 (2016).
- [5] A. B. Nielsen, *Class.Quant.Grav.* 30, 075023 (2013).
- [6] M. Tápai, Z. Keresztes, L. Á. Gergely, *Phys. Rev. D* **86**, 104045 (2012).
- [7] C. Cutler, É. E. Flanagan *Phys. Rev. D* **49**, 2658 (1994).
- [8] L. Á. Gergely, *Phys. Rev. D* **81**, 084025 (2010).
- [9] L. Á. Gergely, *Phys. Rev. D* **82**, 104031 (2010).
- [10] L. Á. Gergely, Z. Keresztes, *Phys. Rev. D* **67**, 024020 (2003).
- [11] L. Á. Gergely, P. L. Biermann, *Astrophys. J.* **697**, 1621 (2009).
- [12] K. G. Arun, A. Buonanno, G. Faye, E. Ochsner, *Phys. Rev. D* **79**, 104023 (2009).
- [13] B. Mikóczi, B Kocsis, P. Forgács and M. Vasúth, *Phys. Rev. D* **86**, 104027 (2012).
- [14] B. Mikóczi, M. Vasúth, L. Á. Gergely, *Phys. Rev. D* **71**, 124043 (2005).
- [15] T. A. Apostolatos, C. Cutler, G. J. Sussman, K. S. Thorne, *Phys. Rev. D* **49**, 6274 (1994).
- [16] L. E. Kidder, *Phys. Rev. D* **52**, 821 (1995).
- [17] M. Tápai, Z. Keresztes, L. Á. Gergely, E-print: arXiv:1609.05915 (2016).
- [18] B.S. Sathyaprakash and B. F. Schutz.: *Physics, Astrophysics and Cosmology with Gravitational Waves. Living Reviews in Relativity* 12(2) (2009). url: <http://relativity.livingreviews.org/open?pubNo=lrr-2009-2&page=articlesu19.html>