

# Tartalomjegyzék

<b>1. Bevezetés</b>	<b>1</b>
1.1. Szuperhúrok és a bránok . . . . .	2
1.2. A bránok és az Univerzum . . . . .	3
<b>2. A gravitáció elmélete öt dimenzióban</b>	<b>6</b>
2.1. Az ötdimenziós Einstein-egyenlet projekciói a bránra . . . . .	6
2.2. A Lánczos-egyenlet . . . . .	9
2.3. Az effektív Einstein-egyenletek származtatása . . . . .	9
2.4. Tükrözési szimmetria nélküli bulk téridő általános esetben . . . . .	12
<b>3. Kozmológiai alkalmazások</b>	<b>13</b>
3.1. A brán időfejlődése . . . . .	14
3.1.1. A Schwarzschild-Anti de Sitter bulk . . . . .	16
3.2. Kozmológiai brán beágyazása különböző típusú bulk téridőkbe . . . . .	17
3.2.1. A kozmológiai brán szerkezete és tulajdonságai . . . . .	17
3.3. Tükörszimmetrikus beágyazás általános vákuum bulk téridőbe . . . . .	18
3.4. Luminozitási távolság-vöröseltolódás reláció kozmológiai állandóval rendelkező sík Friedmann brán esetén . . . . .	21
<b>4. Fekete lyukak a bránon</b>	<b>24</b>
4.1. Általános gömbszimmetrikus vákuum brán . . . . .	24
4.2. "Árapály töltésű" Reissner-Nordström típusú megoldás . . . . .	25
4.3. Fekete húr megoldás . . . . .	28
4.4. Kozmológiai háttérbe ágyazott fekete lyukak a bránon . . . . .	29
<b>5. Galaktikus forgásgörbék a bránon</b>	<b>31</b>
5.1. A vákuum brán gravitációs egyenletek nemsztatikus, konformisan szimmetrikus általános megoldásai . . . . .	32
5.2. Stabil körpályák keresése a brán konformisan szimmetrikus téridejében	34
<b>6. Gravitációs lencsehatás a bránon</b>	<b>39</b>
6.1. A gravitációs lencsézés elmélete . . . . .	40
6.2. Erős lencsézés árapály töltésű brán fekete lyuk esetén . . . . .	44
6.3. A fény eltérülése "galaktikus potenciálokban" . . . . .	45

<b>7. Összefoglalás</b>	<b>46</b>
<b>8. Köszönetnyilvánítás</b>	<b>49</b>
<b>9. Irodalom</b>	<b>50</b>

SZEGEDI TUDOMÁNYEGYETEM  
Természettudományi Kar  
Kísérleti Fizikai Tanszék

DIPLOMAMUNKA

# Kozmológiai és fekete lyuk brán világok

Nagy Botond

Témavezető:  
Dr. Gergely Árpád László

2006

# 1. Bevezetés

A huszadik század a természettudományok a robbanásszerű növekedésének az évszázada. Ez a fizikára is vonatkozik. A tudományos szemlélet nagymértékben átalakult, bonyolulttá vált, bel- és külterjesen gyarapodott. Ezáltal egyre nehezebbé vált az átjárás a különböző tudományágak közt. Azonban ezzel párhuzamosan az egységes szemléletre és tárgyalásra való törekvés is egyre nagyobb hangsúlyt kapott. Így fogalmazódott meg fizikában az ismert kölcsönhatások egyesítésére való törekvés. Ennek adott lendületet az elektromos és mágneses kölcsönhatások sikeres egyesítése. Ez Maxwell érdeme, aki Faraday kísérleti eredményinek ismeretében, de egy bonyolultabb formalizmus használata árán érte el ezt a célt. Az elmélet jóslatait Franck és Hertz kísérletei igazolták a tizenkilencedik század végén. Az éter-elméletek igazolásának kísérleti kudarcra készítette Einsteint a newtoni abszolút vonatkoztatási rendszer feladására és vezetett a speciális relativitás elméletéhez. Ekkorra tehető az alapvető elméletek geometrizálásának igénye is.

A gravitáció geometriai leírásához azonban szükség volt az ekvivalencia elvének megfogalmazására. Ez az elv szószerint a következőt mondja ki: *az Univerzum bármely pontján bármely lokális Lorentz-féle vonatkoztatási rendszerben a fizika törvényei ugyanazon speciális relativitásbeli alakjukat veszik fel* [10]. Azaz: két Lorentz-féle vonatkoztatási rendszer közt nem lehet különbséget tenni [9],[10]. Erre a kitételre alapul az általános relativitás elmélete (a későbbiekben ÁRE). Durván fogalmazva az ÁRE a gravitáció és a téridő görbülete közt teremt kapcsolatot. Az ÁRE igen pontosan visszaadta a bolygók (elsődlegesen a Merkúr) perihéliumvándorlásának mértékét. Ugyanakkor Eddington mérései az 1919-es napfogyatkozás alkalmával igazolták a Nap mellett elhaladó fénysugár elhajlását és kimérték az elhajlási szöveget [9],[10]. A mért érték hibahatáron belül egyezett az elméleti értékkel. Ezáltal a gravitáció einsteini elmélete is igazolást nyert. Jogosan merült fel az igény, hogy a(z akkor ismert) két alapvető kölcsönhatást egy közös matematikai formalizmus és tárgyalásmód keretei közt egyesítsék.

Ez a feladat azonban sokkal bonyolultabbá vált, mint ahogy elképzelték. Több konkurens elmélet csapott össze, amelyeket többek közt Einstein, Lorentz, Weyl, Kaluza, Klein és Eddington nevei fémjeleznek. A kiélezett viták nem maradtak el, ebbe enged betekintést nyerni a [6].

Ezen elméletek közül legtovább T. Kaluza elmélete merészkedett, amely azt mondta ki, hogy a két formalizmus akkor egyesíthető, ha a téridőt egy újabb térdimenzióval bővítjük. Ez a térdimenzió viszont kompakt, azaz önmagába záródó és véges kis

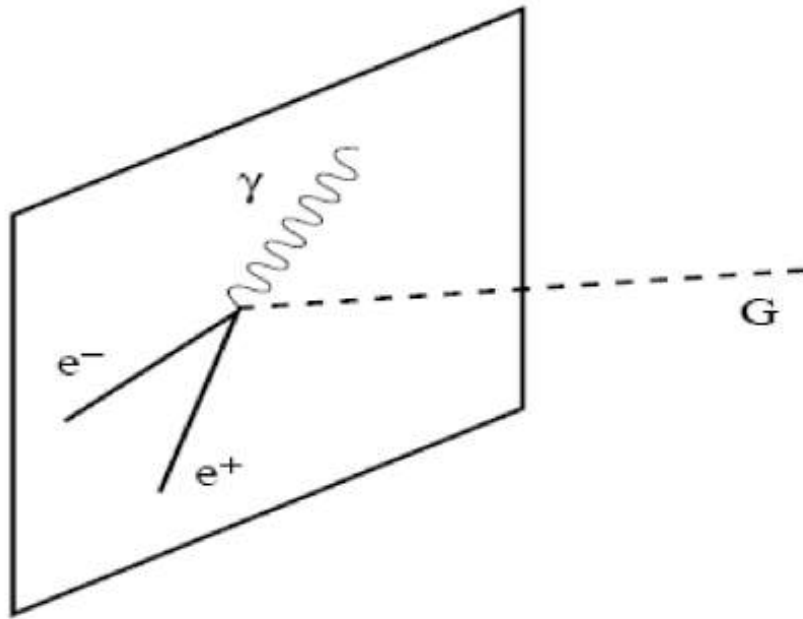
karakterisztikus hosszal jellemezhető. Ennek értéke az elméleti megfontolások miatt  $10^{-20} \text{ cm}$ . Később O. Klein, aki Einstein támogatását is élvezhette e munkájában, tovább fejlesztette Kaluza elméletét [6]. A későbbiekben ez Kaluza-Klein (K-K) elmélet néven lett ismert. A K-K elméletet azonban elvetették, ugyanis a csatolási állandók értékeire túl nagy értékek adódtak. Ez az extra dimenzió mikroszkopikus karakterisztikus mérete miatt volt így.

Az "új" kölcsönhatások kvantumterekkel írhatók le, a K-K modell pedig ezek leírására nem alkalmas eredeti alakjában. Az extra dimenziók bevezetése azonban hasonló kontextusban később mégis előkerült. Ezek a későbbi elméletek a szuperhúr-elméletek. Így a K-K elmélet a szuperhúr-elmélet nagyon korai és primitív elődjének tekinthető. Megkérdőjelezhetetlen erénye azonban az, hogy először vetette fel az extra dimenziók létének kérdését.

## 1.1. Szuperhúrok és a bránok

A múlt század 60-as éveiben sikerült egyesíteni az elektromágnesség és a gyenge kölcsönhatás elméletét. Ez utóbbi felelős a radioaktív bomlásért. Leírása egy kvantumtér segítségével történik, melynek kvantumai az ún. mértékbozonok. Nemsokkal ezután az erős kölcsönhatást (a nukleáris erők kvantumelméletét) is sikerült ebbe a formalizmusba beleolvasztani. A gravitáció leírására ez azonban ez az elmélet még mindig nem volt alkalmas. A további egyesítési törekvések az ún. szuperhúr-elméletek köré sorakoztak fel. Ezek az elméletek nagyon bonyolult matematikai formalizmust használnak. Legnagyobb problémájuk azonban az, hogy jelen pillanatban semmilyen kísérletileg igazolható jóslattal nem kecsegtetnek. Az igazsághoz azonban az is hozzátartozik, hogy még mindig nem ismerjük teljességében ezt az elméletet, vagyis . Tehát egyelőre korai lenne bármilyen ítéletet mondani felette.

A húrelméletek egyik sajátos vonása az extra térdimenziók jelenléte. Így a Világegyetem egy  $1 + 3 + f$  dimenziós téridő  $1 + 3$  dimenziós hiperfelületén helyezkedik el, itt  $f$  az extra dimenziók számát jelöli. Öt különböző  $1 + 9$  dimenziós húrelméletet ismerünk, ezek az ún. kvantumgravitáció különböző leírásait adják. A 90-es évek közepén olyan "duális transzformációkat" találtak [16], amelyek ezen elméleteket összekapcsolják egymással és egy  $1 + 10$  dimenziós szupergravitációs elmélet létezésére utalnak. Ez azt sejteti, hogy az öt különböző húrelmélet egyetlen  $1 + 10$  dimenziós elmélet határeseteiként jelennek meg [1]. Ez az elmélet az ún. M-elmélet. Alacsony energiák esetén az M-elmélet jól közelíthető az  $1 + 10$  dimenziós szupergravitáció elméletével



1.1. ábra. Anyag, sugárzás és gravitonok a bránon (forrás: [16])

[2],[1],[16].

Az elméletben szereplő szuperhúrok egydimenziós objektumok. Ezek lehetnek nyitottak illetve önmagukba záródóak. A magasabb dimenziós objektumok a "*p-bránok*". Ezek olyan hiperfelületek, amelyek dimenziószáma  $p$ . Ez egynél nagyobb, de tér dimenziószámánál nyilvánvalóan kisebb természetes szám. Ezen objektumok közt megkülönböztetett figyelemnek örvendenek az ún. "*D-bránok*". Fontosságuk abban rejlik, hogy a nyitott szuperhúrok ezekre mindkét végükkel ráhelyezkedhetnek [16]. Ezáltal a nyitott szuperhúrok lokalizálódnak a bránon. A zárt húrok azonban a brántól függetlenül szabadon haladhatnak a teljes téridőben. Így az anyag és a sugárzás a hiperfelületen lokalizálódik, míg a gravitáció az egész téridőben szabadon terjedhet. Az 1.1. ábra ezt igyekszik szemléltetni [8],[16].

## 1.2. A bránok és az Univerzum

A bránok elméletében két olyan fontos típust ismerünk, amely alkalmazható a Világegyetem leírására

A szerzők nevéből képezett akroníma után ADD-típusúnak nevezett bránvilágban  $f \geq 2$  extra dimenzió található, melyek egymással egyenértékűek. Ezek a dimenziók egyenesek, karakterisztikus méreteik azonosak. Maximális hosszuk  $10^{-4}m$  alatti érték. Ezt a méretet az indokolja, hogy a gravitáció newtoni törvénye ennél a távolságnál még

mindig korrekciók nélkül érvényes. Az ADD modell erénye, hogy kettő vagy annál több extradimenzió esetén az ún. hierarchia problémára megoldást adhat [7],[16].

Ezzel szemben a Randall-Sundrum modellekben [3], [4] (RS1 és RS2 - a számozás az időrendi sorrendre vonatkozik) van egy "kiváltságos" koordináta, a többi extra dimenzió pedig elhanyagolható. A továbbiakban ezt a "kiváltságos" dimenziót nevezzük extra dimenziónak, a többiről pedig nem teszünk említést, az előbbi okból kifolyólag.

Az extra dimenzió karakterisztikus mérete nem mikroszkopikus, bár az önmagában lehet véges és görbült is. Ugyanakkor nem önmagába záródó. Ezáltal az téridő öt-dimenzióssá válik, kiterjedése végtelen. Az általunk ismert négydimenziós Univerzum pedig beleágyazható egy ilyen téridőbe [4]. A brán ugyanakkor pozitív feszültségű. A Világegyetem öt-dimenziós leírására az RS2-elmélet tűnik a legalkalmasabbnak.

Az öt-dimenziós, ún. bulk téridőbe történő beágyazás azt vonja magával, hogy a négydimenziós Világegyetem egy öt-dimenziós tartomány négydimenziós "falán" helyezkedik el. Amint már említettük, a fizikából ismert anyagi mezők egy öt-dimenziós tartomány négydimenziós falán lokalizálódnak. Így például az elektromágneses, Yang-Mills stb. mezők ezen hatnak. Az említett mezők kvantumjai ugyanis a nyitott szuperhúrokkal hozhatók kapcsolatba. Ezzel szemben a gravitáció mind az öt dimenzióban hat, így a tartomány felületén (azaz a bránon) is ugyanúgy, mint az extra dimenzióban. A gravitonok tehát zárt szuperhúrokkal azonosíthatók. Az öt-dimenziós téridő a szuper-szimmetria fennállása miatt Anti-de Sitter jellegű kell legyen [3],[4],[16].

Ha a bránon az extra dimenzió hatását gyenge tér közelítésben vizsgáljuk, a gravitációt a bránon a bulk által indukált metrikus perturbációjaként. kezelhetjük. Ez egy olyan összefüggéshez vezet, mint a gravitációs hullámegyenlet. A vezető rend mellett az első rendű perturbációját is figyelembe kell vennünk. Ennek következtében a bránon található izolált gömbszimmetrikus test által keltett gravitációs potenciál kifejezésébe egy korrekciós tagot kell beiktatni [5]:

$$V(r) = \frac{G_N}{r} \left( 1 + \frac{2}{3} \frac{l^2}{r^2} \right) \quad (1.1)$$

E kifejezésben  $l$  az AdS téridő görbületi sugara. A korrekció ezen alakja döntő fontosságú a fekete lyukak esetében [38]. Ha ezt a Schwarzschild metrika gyenge tér közelítésével hasonlítjuk össze, azt látjuk, hogy az nem alkalmas a bránon a gravitációs kollapszus végállapotának leírására. Egy olyan metrikára van szükség, amelynek gyenge tér közelítése asszimptotikusan tart a (1.1)-hoz.

Az extra dimenzió jelenléte miatt nagyon magas energiák esetén is a brán modell gravitációs elméletében lényeges eltérések adódnak az einsteini ÁRE esetéhez vis-

zonyítva [13], [19]. Ennek okozói a bulk brán-projekciói miatt fellépő nagyenergiájú korrekciók. Ezek a bulk Weyl-tenzorának a bránra vett projekcióinak következtében fellépő nemlokális hatásokat foglalják magukba. Kis energiájú határesetben a korrekciók elhanyagolhatókká válnak, ugyanis az energia-impulzus tenzor négyzetével arányosak, amint ezt a későbbiekben a (2.23) is tanúsítja. A megoldások egyértelműségének minimális feltétele a bulk téridő Weyl-tenzorának (lásd (2.12)) ismerete [19].

A napjainkban érvényes "standard kozmológiai modell" érvényességét mérések támasztják alá. Ezek egy szimmetrikus, táguló, a síkhoz igen közel álló, homogén és izotrop Világegyetemről tanúskodnak. Ezeket a szimmetriákat a brántól is megkövetelhetjük. Ekkor kozmológiai bránról beszélhetünk. Azaz a Világegyetem és az RS2-brán kozmológiai szempontból egyenértékű lesz. Ezáltal természetesen az elméleti kozmológia elvei ugyanúgy érvényesek lesznek az RS2 bránon is.

Dolgozatunk kitűzött célja példákkal alátámasztani, hogy az RS2 brán-elmélet a Világegyetem nagyléptékű leírására alkalmas. Megjegyezzük, hogy ennek a témakörnek hatalmas és még mindig robbanásszerűen gyarapodó irodalma van. Ezért a legfontosabb és legáltalánosabb vonásokra kiemelésére koncentrálunk. Célunk, hogy a szakmabeli érdeklődő számára is kontúrozódjon a brán-elmélet természete és lényege. Az alkalmazások ismertetésénél olyan témakörökre helyeztük a hangsúlyt, amelyek a megfelelő kozmológiával kapcsolatba hozhatók.

A dolgozatban az elmélet alapjainak ismertetése és az alkalmazásokat párhuzamosan történik. Ezek közt vannak kozmológiai jellegűek. A fekete lyuk megoldások közül kétőt részletesebben bemutatunk. Ezután a kozmológiai és a brán fekete lyuk megoldások kompatibilitását vizsgáljuk, egy inhomogén kozmológiai bránon keresztül.

A galaxisok rotációs görbéinek alakja a bránon természetes módon magyarázható a bulk nemlokális hatásaival. A dolgozatban erre is szeretnénk rávilágítani. Végezetül a brán fekete lyukainak gravitációs lencsehatását tárgyaljuk. Mivel az erős lencsésítés jelensége kevésbé ismert, ezért arra nagyobb hangsúlyt fektetünk, mint a gyengére.

Az elmélet következetes ismertetése megfelelő matematikai apparátus felhasználása nélkül gyakorlatilag lehetetlen. Ezért mind az alapok, mind az egyes alkalmazások esetén is a kifejezetten technikai jellegű tárgyalásmód alkalmazása elkerülhetetlen, bár igyekszünk ezt a lehető legnagyobb mértékben visszaszorítani.

A dolgozatban egységes jelölést alkalmaztunk. Az ötdimenziós mennyiségek felett egy hullámvonal ("tilde") található, mely a négydimenziós mennyiségek esetén természetesen hiányzik. Indexeink azonosak mind a négydimenziós mennyiségekre, mind az ötdimenziósakra. Ezek a latin ábécé kisbetűi, melyek ötdimenziós mennyiségek



esetén 0 és 4, míg négydimenziós esetben pedig csak 0 és 3 közti értéket vehetnek fel.

## 2. A gravitáció elmélete öt dimenzióban

Ebben a fejezetben az ötdimenziós Einstein-egyenletből származtatjuk a brán gravitációs téregyenleteit. Ezt a bulk Einstein-egyenletének a brán-projekcióból származtatjuk. Az eredmény az ÁRE Einstein-egyenletétől néhány plusz tagban tér el. Ezután a Lánczos-egyenletet használjuk fel, melynek segítségével kapcsolatot teremthetünk a brán beágyazását jellemző külső görbületi tenzor és a brán energia-impulzus-tenzora közt. Ezt követően egy másik extra tag, a Weyl-tenzor bránra vett projekcióját magába foglaló tagot irreducibilis tényezőkre bontjuk fel. Így, az energia-impulzus-tenzor megmaradásának mintájára felírhatunk egy megmaradási összefüggést a nem-lokális effektusokra is. Mivel ebben a fejezetben mutatjuk be a bránok elméletének alapjait, a differenciálgeometriai tárgyalásmód elkerülhetetlen. A fejezet nagymértékben a [19], [13] és [16] műveken alapszik. A részletek megértéséhez az ÁRE ismerete szükséges.

### 2.1. Az ötdimenziós Einstein-egyenlet projekciói a bránra

Az ötdimenziós téridő (azaz a bulk) Einstein-egyenlete ugyanolyan alakú, mint az ÁRE négydimenziós Einstein-egyenlete [13]. A benne szereplő mennyiségek azonban ötdimenziósak:

$$\tilde{G}_{ab} = \tilde{R}_{ab} - \frac{1}{2}\tilde{R}g_{ab} = \tilde{\kappa}^2\tilde{T}_{ab} \quad (2.1)$$

A baloldalon szereplő mennyiségek az ötdimenziós bulk téridőt geometriáját jellemzik. Itt  $\tilde{G}_{ab}$  a bulk téridő Einstein-tenzora,  $\tilde{R}_{ab}$  a Ricci-tenzor,  $\tilde{R}$  a görbületi skalár,  $\tilde{T}_{ab}$  pedig a bulk téridő energia-impulzus-tenzora. A  $\tilde{\kappa}^2$  az ötdimenziós csatolási állandó. Ennek szerepe ugyanaz, mint az ÁRE-beli megfelelőjének, a  $\kappa$ -nak.

A bulk téridőben az ívhossz a  $\tilde{g}_{ab}$  bulk metrika segítségével adható meg. A bulk hiperfelületei négy, azaz (1 + 3) dimenziós téridő metszetek. Ezek a bránok. A bránok, akár csak a négydimenziós téridő metszetei, lehetnek tér-szerűek és idő-szerűek is. Ez attól függ, hogy a hiperfelületet az idő paraméter egy rögzített, konstans értékénél vesszük fel vagy nem. Az ötdimenziós téridő metrika a következő alakban írható [19]:

$$\tilde{g}_{ab} = g_{ab} + \epsilon n_a n_b \quad (2.2)$$

Ebben a kifejezésben az  $n_a$  mennyiség a bulk téridőnek a bránra vett normálisvektora. Erre fennállnak a  $g_{ab}n^a = 0$  és az  $n_a n^a = \epsilon = \pm 1$  összefüggések [19]. Az  $\epsilon$  értéke tér-

szerű téridő metszetek esetén  $-1$ , idő-szerű metszetekre  $+1$ . Ha  $y$  Gauss-féle normál koordináta (azaz olyan, mely felírható  $n_a dX^a = dy$  alakban), az ívhossz:

$$d\tilde{s}^2 = g_{ab} dx^a dx^b + dy^2 \quad (2.3)$$

Így a  $g_{ab}$  metrikát a bulk téridő által az  $y = 0$  hiperfelületen indukált metrikának, röviden csak indukált metrikának nevezzük. Az  $y = \text{állandó}$  felületek beágyazását a felület  $K_{ab}$  külső görbülete határozza meg. A külső görbület a felületek differenciálgeometriájának elméletében második alapmennyiségként is ismert. Lie-deriváltak felhasználásával ill. kovariáns deriváltak segítségével egyaránt származtatható:

$$K_{ab} = \frac{1}{2} \mathcal{L}_{\mathbf{n}} \tilde{g}_{ab} = g_a^c \tilde{\nabla}_c n_b \quad (2.4)$$

A külső görbületi tenzor alsó indexeire nézve szimmetrikus. Azaz nincsen antiszimmetrikus része:

$$K_{[ab]} = 0 = K_{ab} n^b \quad (2.5)$$

A metrika ilyen alakú választásának előnye abban is megnyilvánul, hogy az extra dimenzió irányára egy plusz feltétel is kiróható [19]:

$$a^i \equiv n^j \nabla_j n^i = 0 \quad (2.6)$$

A brán Einstein-egyenletének meghatározása a [19], [13] és a [16] menetét követi, a kevésbé fontos részletek mellőzésével. Az ötdimenziós tér Einstein-egyenletének tetszőleges hiperfelületre (ez esetünkben a brán) való projekcióit a Gauss- és Codazzi-egyenletek adják meg [10],[15],[14]. A Gauss-egyenlet teremt kapcsolatot a négydimenziós és ötdimenziós téridők Riemann-tenzorai közt [19]:

$$R_{bcd}^a = \tilde{R}_{jkl}^i g_i^a g_b^j g_c^k g_d^l + K_c^a K_{bd} - K_d^a K_{bc} \quad (2.7)$$

A Codazzi-egyenlet a külső görbület kovariáns deriváltja és a bulk Ricci-tenzora közt a következő törvényszerűséget szentesíti [14],[15], [19]:

$$D_i K_j^i - D_j K = \tilde{R}_{kl} n^l g_j^k \quad (2.8)$$

A Gauss-egyenletre  $a = c$  kontrakciót alkalmazunk. Ennek eredményeként az ötdimenziós téridő Riemann-tenzorából előállítható a brán Ricci-tenzora:

$$R_{ij} = \tilde{R}_{kl} g_i^k g_j^l - \tilde{R}_{bcd}^a n^a g_i^b n^c g_j^d + K K_{ij} - K_i^a K_{ja} \quad (2.9)$$

A négydimenziós Einstein-egyenlet ezután már automatikusan előállítható [13]:

$$G_{ij} = \left[ \tilde{R}_{kl} - \frac{1}{2} \tilde{R} \tilde{g}_{kl} \right] g_i^k g_j^l + \tilde{R}_{kl} n^k n^l g_{ij} + K K_{ij} - K_i^k K_{jk} - \frac{1}{2} g_{ij} (K^2 - K^{ab} K_{ab}) - \tilde{E}_{ij} \quad (2.10)$$

A (2.10) összefüggésben az alábbi jelölést alkalmaztuk:

$$\tilde{E}_{ij} = \tilde{R}_{blm}^a n_a n^l g_i^b g_j^m \quad (2.11)$$

A Riemann-tenzort felbonthatjuk a skalárgörbület, a Ricci-tenzor valamint a Weyl-tenzor összegére, az alábbi összefüggés szerint:

$$\tilde{R}_{iajb} = \frac{2}{3}(\tilde{g}_{i[j}\tilde{R}_{b]a} - \tilde{g}_{a[i}\tilde{R}_{b]j}) - \frac{1}{6}\tilde{g}_{j[i}\tilde{g}_{b]a}\tilde{R} + \tilde{C}_{iajb} \quad (2.12)$$

Láthatjuk, hogy a bulk Weyl-tenzora nem más, mint az ötdimenziós, spurmentes Riemann-tenzor. Ez rendelkezik a Riemann tenzor összes szimmetriatulajdonságával. Az (2.1) bulk Einstein-egyenletet, (2.12) felbontást és (2.10) négydimenziós Einstein-egyenletet felhasználva, a brán Einstein-tenzora:

$$G_{ij} = \frac{2\tilde{\kappa}^2}{3}[T_{kl}g_i^k g_j^l + \left(T_{kl}n^k n^l - \frac{1}{4}T_k^k\right)g_{ij}] + KK_{ij} - K_i^l K_{jl} - \frac{1}{2}g_{ij}(K^2 - K^{ab}K_{ab}) - E_{ij} \quad (2.13)$$

Az utolsó tag:

$$E_{ij} \equiv \tilde{C}_{bkl}^a n_a n^k g_i^b g_j^l \quad (2.14)$$

Ez egy spurnélküli tenzor, azaz  $E_a^a = 0$ . Így a (2.11) jelölés jelentését tisztáztuk. A (2.8) Codazzi-egyenlet és az (2.1) Einstein-egyenlet alapján:

$$D_j K_i^j - D_i K = \tilde{\kappa}^2 T_{kl} n^l g_i^k \quad (2.15)$$

Az extra koordináta megválasztásával az ötdimenziós energia-impulzus-tenzor felbontható a bránnal párhuzamos illetve arra merőleges komponensekre. Legyenek ezek  $\tau_{ij}$  ill.  $\tilde{\Pi}_{ij}$ . Így a felbontás a következő alakú lesz:

$$\tilde{T}_{ij} = \tilde{\Pi}_{ij} + \tau_{ij}\delta(y) \quad (2.16)$$

A bránon érvényes a  $\tau_{ij}n^i = 0$  összefüggés. Ez azt mondja ki, hogy a brán energia-impulzus-tenzorának nincsen a bránra merőleges komponense.

Általános esetben  $\tau_{ij}$  ismét tovább bontható a brán feszültségére és a bránon lévő anyag energia-impulzus-tenzorára:

$$\tau_{ij} = -\lambda g_{ab} + T_{ab} \quad (2.17)$$

A felbontások hasznossága az effektív Einstein-egyenlet felírásakor válik nyilvánvalóvá.

## 2.2. A Lánczos-egyenlet

A Lánczos-egyenlet a  $\tau_{ij}$  energia-impulzus-tenzor és a  $K_{ij}$  külső görbület közt teremt kapcsolatot [19], [13], [16], [18]. A brán felületének a két ellentétes oldalán a külső görbületek csak abban az esetben egyeznek meg, ha a bránon vákuum energia-impulzus-tenzor hat. Ugyanis az anyag hatására a külső görbület ugrást szenved a brán felületén. Ez tetszőleges dimenziójú bulk illetve brán esetén fennáll. Jelen esetben a bulk téridő ötdimenziós, a brán pedig négydimenziós. Ekkor a külső görbület ugrásszerű változása és a bránon lévő anyag energia-impulzus-tenzora közti összefüggés [19],[17]:

$$\Delta K_{ab} = -\epsilon \tilde{\kappa}^2 \left( \tau_{ab} - \frac{1}{3} g_{ab} \tau \right) \quad (2.18)$$

Ez a Lánczos-egyenlet négydimenziós brán esetére. Meg kell jegyezni azonban, hogy ez tetszőleges dimenziójú bulk tetszőlegesen kiválasztott hiperfelületére általánosítható, ám ekkor a jobb oldal utolsó tagja előtti együttható meg fog változni.

A Lánczos-egyenlet egy másik, a (2.18)-vel teljesen ekvivalens alakra hozható. Ez [19],[18]:

$$-\epsilon \tilde{\kappa}^2 \tau_{ab} = \Delta K_{ab} - g_{ab} \Delta K \quad (2.19)$$

Tetszőleges  $f_{ab}$  má-

sodrendű tenzorra értelmezhető az alábbi mennyiség:

$$\Delta f_{ab} = f_{ab}^+ - f_{ab}^-$$

Ez az  $f_{ab}$  mennyiségnek a brán mindkét, adott normálisának irányával megegyező irányában felvett  $f_{ab}^+$  vagy azzal ellentétes irányú  $f_{ab}^-$  értékének különbségét jelöli. Ez az  $f_{ab}$  mennyiség ugrása a bránon. Ha ezt a külső görbületre értelmezzük, akkor a bránnak a bulk téridőbe vett beágyazásáról kapunk információt [19].

A Lánczos-egyenletnek a jelentősége az, hogy a bránnak a bulk téridőbe való beágyazására jellemző mennyiségei és a brán anyagának dinamikája közt teremt fizikai kapcsolatot.

## 2.3. Az effektív Einstein-egyenletek származtatása

A bránon érvényes Einstein-egyenlet némiképpen eltér a szokványosabb, az ÁRE-ben megszokott Einstein-egyenlettől. Ezért is nevezik a brán effektív Einstein-egyenletének a bulk téridő azonos egyenletéből származtatott összefüggést. Az eltérés a Riemann-tenzor és a Ricci-tenzor projekcióinak tulajdonítható plusz tagoknak tulajdonítható.

A Lánczos-egyenlet pedig arra alkalmazható, hogy e projekciós mennyiségek és a brán anyaga közt teremtünk kapcsolatot.

Ha a bránt tükörszimmetrikusan ágyazzuk be a bulk téridőbe, néhány hasznos összefüggéshez jutunk [19]:

$$\Delta g_{ab} = 0, \quad K_{ab}^+ + K_{ab}^- = 0 \quad (2.20)$$

Ez utóbbi összefüggés segítségével megkapjuk a brán mindkét oldalán a külső görbület értékeit:

$$K_{ab} = K_{ab}^+ = -K_{ab}^- = -\frac{1}{2}\epsilon\tilde{\kappa}^2 \left( \tau_{ab} - \frac{1}{3}g_{ab}\tau \right) \quad (2.21)$$

A (2.21) egyenlőséget a (2.10) brán-Einstein-egyenletbe behelyettesítve, a következő egyenlethez jutunk [13],[16]:

$$G_{ab} = -\Lambda g_{ab} + \kappa^2 T_{ab} + \tilde{\kappa}^4 S_{ab} - E_{ab} \quad (2.22)$$

Ez az brán effektív Einstein egyenlete. A  $\kappa^2$  az ÁRE (értelemszerűen) négydimenziós csatolási állandója:

$$\kappa^2 = 8\pi G$$

Itt az alábbi jelölést használtuk fel:

$$S_{ab} = -\frac{1}{4}T_{ac}T_b^c + \frac{1}{12}TT_{ab} + \frac{1}{8}g_{ab}T^{ij}T_{ij} - \frac{1}{24}g_{ab}T^2 \quad (2.23)$$

A Lánczos-egyenlet segítségével kapcsolat teremthető  $\tilde{\kappa}$ ,  $\kappa$  illetve a  $\lambda$  brán-feszültség és  $\Lambda$  négydimenziós (brán) kozmológiai konstans közt. Technikailag ez annyit tesz, hogy ha a brán (2.17) energia-impulzus-tenzorát helyettesítjük a (2.13) kifejezésbe, a megfelelő mennyiségek összehasonlításával a következőkhöz jutunk [13],[19]:

$$\kappa^2 = \tilde{\kappa}^4 \lambda / 6, \quad \Lambda = \tilde{\kappa}^2 (\tilde{\Lambda} + \tilde{\kappa}^2 \lambda^2 / 6) \quad (2.24)$$

Az  $E_{ab}$  tag az ötdimenziós téridő Weyl-tenzorának kontrakciója által jön létre; a gravitációs tér nemlokális hatásait foglalja magába. Csak akkor tűnik el, ha a bulk téridő teljességében Anti de Sitter (AdS) jellegű. Ugyanakkor nem választható tetszőlegesnek, hanem az anyagnak a bránon történő mozgása szabja meg viselkedését. Ez a következő módon látható be. Először is a (2.15) összefüggésbe behelyettesítve a (2.21) egyenletet, így a következőt találjuk:

$$D_j K_i^j - D_j K \propto D_i \tau_j^i = 0 \quad (2.25)$$

Azaz az anyag megmaradásának törvénye a bránon érvényesül. Ha a bránon a Bianchi-azonosságot vizsgáljuk, akkor a  $D^j G_{ij} = 0$  összefüggés következtében az alábbi áll fenn

[13]:

$$\begin{aligned} D^i E_{ij} &= K^{ab}(D_j K_{ab} - D_b K_{ja}) = \\ &= \frac{1}{4} \tilde{\kappa}^4 \left[ T^{ab}(D_j T_{ab} - D_b T_{ja}) + \frac{1}{4}(T_{ij} - g_{ij}T)D^i T \right] \end{aligned} \quad (2.26)$$

A (2.26) teremt kapcsolatot az  $E_{ij}$  és  $T_{ij}$  közt. Ebből azonnal belátható, hogy az  $E_{ij}$  divergenciáját elsődlegesen az anyag határozza meg.

Fontos észrevétel, hogy a (2.22) a két utolsó tagban különbözik az ÁRE Einstein-egyenletétől. Azonban kis-energiájú határesetben a két utolsó tag elhanyagolhatóvá válik. Ennek oka, hogy az energia-impulzus-tenzor kifejezése négyzetes alakban jelenik meg mindkettőben, amint ezt a (2.23) és a (2.26) alapján láthatjuk. Így ebben a határesetben a két tag elhanyagolhatóvá válik, és csak nagy-energiás határesetben lesz jelentős.

A következőkben  $E_{ij}$  egy irreducibilis felbontását keressük. Az ÁRE-ben az energia-impulzus-tenzort ugyanis különböző terek és mezők kombinációjaként is előállíthatjuk, függetlenül attól, hogy anyaggal vagy sugárzással van dolgunk. A felbontáshoz referenciairánynak egy  $u^i$  négyessebesség-mezőt választunk. Ez a felbontás egyben kovariáns is [16], [10]. Általános alakban:

$$T_{ij} \equiv \rho u_i u_j + p h_{ij} + \pi_{ij} + q_j u_i + q_i u_j$$

Tehetetlenségi koordináta-rendszert választva, bármely pontban fennállnak a  $u^i = (1, \bar{0})$ ,  $h_{ij} = (0, 1, 1, 1)$ ,  $V_i = (0, V_i)$ ,  $W_{i0} = 0 = \Sigma W_{ii} = W_{ij} - W_{ji}$  összefüggések. Itt  $V_i$  és  $W_{ij}$  általános, vektor ill. másodrendű tenzormennyiségek [16]. Ezek esetünkben a  $q_i$  és a  $\pi_{ij}$ .

Ennek mintájára az  $E_{ij}$  tenzor is felbontható, ugyanis ez közvetíti a bulk téridő nemlokális hatásait a bránra. Így egy "sötét", sugárzásszerű energia-impulzus-tenzorral járul a brán energia-impulzus-tenzorához. A brán a bulk téridő extra dimenziójának hatását "effektív folyadék" hatásaként érzékeli. Ez is igazolja az alábbi felbontás jogságát [16], [11]:

$$E_{ij} = -\kappa^2 \left[ U(u_i u_j + \frac{1}{3} h_{ij}) + P_{ij} + 2Q_{(i} u_{j)} \right] \quad (2.27)$$

A felbontáshoz a következő magyarázat tartozik.  $U$  az energiasűrűség,  $U/3$  az izotrop

nyomás,  $P_{ij}$  az anizotrop feszültségeket tartalmazó tag, a  $Q$  tag pedig a fluidum áramlására vonatkozó impulzussűrűség. Utóbbi megjelenésének az az oka, hogy a fluidum

áramolhat a bránon, mégpedig a koordináta-rendszer  $u_i$  sebességéhez viszonyítva  $v_i$  sebességgel. Ezáltal a  $Q_i = \rho v_i$  impulzussűrűség jellemzi mozgását. Az  $E_{ij}$  felbontását a [16] -ből vettük át.

## 2.4. Tükrözési szimmetria nélküli bulk téridő általános esetben

Vizsgáljuk meg röviden a brán nem-tükrörszimmetrikus beágyazását. Az eljárás a [19] munka alapján ismertetjük. Ebben az esetben a beágyazásnál nem követeljük meg a tükrörszimmetriát. Emiatt nem használhatjuk ki a Lánzos-egyenletet a külső görbület 2.21 alakú kifejezéséhez. A brán effektív Einstein-egyenletét ugyancsak az bulk Einstein-egyenlet brán-projekcióival állítjuk elő. A projekciók következtében fellépő extra tagokat itt másképpen határozzuk meg, 2.21 alkalmazhatatlansága miatt. A bránon fellépő hatásokat a projekciók átlagából határozzuk meg. Az átagokat projekciók a brán két ellentétes oldalán felvett határértékeinek összegéből számoljuk. A (2.16) és ([?]) összefüggéseket jelen esetben is alkalmazhatjuk Így:

$$G_{ab} = -\Lambda g_{ab} + \kappa^2 T_{ab} + \tilde{\kappa}^4 S_{ab} - \bar{E}_{ab} + \bar{P}_{ab} + \bar{L}_{ab}^{TF} \quad (2.28)$$

Ha ezt a tükrörszimmetrikus (2.22) effektív Einstein-egyenlettel összehasonlítjuk, azt látjuk, hogy attól némileg eltérő eredményt kaptunk. Az eltérés oka az utolsó két tag megjelenése. Ezek előbukkanása a tükrözési szimmetria hiányára vezethető vissza. Ugyanis a brán két ellentétes oldalán a külső görbületek abszolút értéke nem egyezik meg, a Lánzos egyenlettel összhangban. Az  $E_{ab}$  tag jelen van a tükrörszimmetrikus esetben is. Itt azonban a brán mindkét oldalán felvett értékeinek átlaga jelenik meg. Az  $\bar{L}_{ab}$  definíciója [19]:

$$\bar{L}_{ab} = \bar{K}_{ab}\bar{K} - \bar{K}_{ac}\bar{K}_b^c - \frac{g_{ab}}{2}(\bar{K}^2 - \bar{K}_{ab}\bar{K}^{ab}) \quad (2.29)$$

Belátható, hogy  $\bar{L}_{ab}$  tükrörszimmetrikus beágyazás esetén ez is eltűnik.

A  $\bar{P}_{ab}$  úgy jelenik meg, hogy a bulkban "anyag" jelenlétét tételezzük fel. "Anyag" alatt nyilvánvalóan nem barionikus anyagot értünk. Ez lehet null-por vagy sugárzás.[19].

A bulk anyaga is egy jellemezhető egy energia-impulzus-tenzorral. A  $\bar{P}_{ab}$  definíciója:

$$P_{ab} = \tilde{\kappa}^2 \frac{2}{3} \overline{(g_a^c g_b^d \tilde{\Pi}_{cd})}^{TF} \quad (2.30)$$

A  $\bar{L}_{ab}$  tag jelenléte miatt a kozmológiai állandó kozmológiai függvénnyé alakul át, ennek alakja [19]:

$$\Lambda = \frac{\kappa^2 \lambda}{2} - \frac{\bar{L}}{4} - \frac{\tilde{\kappa}^2}{2} \overline{(n^c n^d \tilde{\Pi}_{cd})} \quad (2.31)$$

Az (2.28) egyenlet utolsó három tagja helyett bevezethetünk egy effektív, nem-lokális  $U$  energiasűrűséget [19]. Fontos észrevétel, hogy az említett három tag mind spurmentes. Ennek felhasználásával az  $U$  energiasűrűség a következő összefüggéssel vezethető be [19]:

$$-E_{ab} + \bar{P}_{ab} + \bar{L}_{ab}^{TF} = \kappa^2 U(u_a u_b + \frac{a^2}{3} h_{ab})$$

Az így nyert egyenlettel tetszőleges ötdimenziós bulk téridőbe be ágyazhatunk egy kozmológiai bránt. Erre a [19]-ban található egy részletes elemzés, néhány példával. Az eljárás menete:

- 1) A bulk téridő típusának megválasztása
- 2) A bulk anyagát tetszőlegesnek választhatjuk
- 3) A brán beágyazása a téridőbe külső görbületek segítségével

A kozmológiai bránok beágyazására egy későbbi fejezetben még visszatérünk.

Bevezető fejezetünkben azt láthattuk, hogy a brán Einstein-egyenlete a bulk Einstein-egyenletből projekciók útján származtatható. Ez némiképpen eltér az ÁRE Einstein-egyenletétől, de kis energiájú határesetben visszaadja azt. Az effektív Einstein-egyenlet származtatásánál nagyon hasznosnak bizonyult a Lánczos-egyenlet. Ez a brán energia-impulzus-tenzora és a külső görbületnek a brán felületén történő ugrásszerű változása közt teremt kapcsolatot. Utóbbi mennyiség a bránnak a bulkba való beágyazásáról hordoz információt.

Az effektív Einstein-egyenlet ismerete lehetővé teszi a szingularitások és a kozmológiai problémák vizsgálatát a bránon.

### 3. Kozmológiai alkalmazások

A kozmológiai megoldások esetén először érdemes megvizsgálni a brán metrika időbeli fejlődését. Ezt egy olyan bulkban kell vizsgálni, amely rendelkezik kozmológiai konstanssal. Így egy egzakt megoldást nyerünk [21]. Egy fekete lyuk megoldás ötdimenziós általánosítása egy másik egzakt megoldáshoz vezet.

A kozmológiai bránok beágyazása tetszőleges bulkba a Lánczos-egyenletnek megfelelően történik. Ekkor az Israel-féle illeszkedési feltételnek is érvényes, amely a metrika bránon való folytonosságát írja elő [18],[19],[16]. A beágyazás technikailag két különböző úton közelíthető meg. Egyik eset, hogy a bulk téridő metrikája és energia-impulzus-tenzora egy ismert, négydimenziós metrika (illetve energia-impulzus-tenzor) öt dimenziós általánosítása [40],[19]. Természetesen a beágyazás szimmetria tulajdonságait figyelembe kell vennünk. A másik út, amikor a bulk téridő metrikáját szeretnénk meghatározni



az azt kitöltő anyagforma ismeretében valamint a beágyazás tükrözési szimmetria tulajdonságai alapján. Jelen esetben Friedmann-brán beágyazását vizsgáljuk kozmológiai állandóval ellátott vákuum bulk téridőbe. Végül pedig a luminozitási távolság-vöröselölődés relációt vizsgáljuk kozmológiai állandós sík vákuum brán esetén.

### 3.1. A brán időfejlődése

Ez az alfejezet [21] és a [23] munkák kivonatolásának eredménye. Ezek a publikációk mérföldköveknek számítanak a kozmológiai bránok elméletében, ismeretük nélkülözhetetlen a továbblépéshez. Ezen megfontolás alapján tartottuk fontosnak részletesebb ismertetésüket, annak ellenére, hogy ez igen sok technikai jellegű elemet igényel.

A bulk metrikáját az előzőekhez képest eltérő alakra hozzuk. Ennek az az oka, hogy a kozmológiai szimmetriákat is figyelembe kell venni. Így egy erre alkalmas ívhossz kifejezése:

$$d\tilde{s}^2 = -n^2(\tau, y)d\tau^2 + a^2(\tau, y)\gamma_{ij}dx^i dx^j + b^2 dy^2 \quad (3.1)$$

A  $\gamma_{ij}$ -vel a maximálisan szimmetrikus 3D metrikát jelöljük, az  $a(\tau, y)$  a skálafaktor,  $n(\tau, y)$  az időfüggvény. Ránézésre is megállapítható, hogy ez a kozmológiából ismert FLRW téridő ötdimenziós általánosítása, azaz egy "kozmológiai bulk". Az ívhossz jelenlegi alakjából az Einstein-tenzor komponensei könnyen kiszámíthatók. Ezek közül csak a  $\tilde{G}_{05}$ -öt emeljük ki [21]:

$$\tilde{G}_{05} = 3 \left( \frac{n' \dot{a}}{n a} + \frac{a' \dot{b}}{a b} - \frac{\dot{a}'}{a} \right)$$

A (2.1) egyenlet jobboldalán található energia-impulzus-tenzort pedig felbontjuk a bulkban és a bránon ható részekre:

$$\begin{aligned} \tilde{T}_j^i &= \check{T}_j^i|_{bulk} + T_j^i|_{brán} \\ \check{T}_j^i|_{bulk} &= \text{diag}(-\rho_B, P_B, P_B, P_B, P_T) \\ T_j^i|_{brán} &= \text{diag}(-\rho_b, p_b, p_b, p_b, 0) \end{aligned} \quad (3.2)$$

A bránon viszont homogén és izotrop anyageloszlást tételezünk fel. Mivel az anyag a bránon lokalizálódik, erre merőlegesen anyagáramlás nem történhet. Ez technikailag annyit tesz, hogy az energia-impulzus tenzor  $\tilde{T}_{05}$  komponense eltűnik. A (2.1) alapján akkor a bulk Einstein-tenzor  $\tilde{G}_{05}$  komponense is eltűnik vele együtt. Emiatt az Einstein-tenzor (0,0) és (5,5) komponensei nagyon leegyszerűsödnek. Belátható [23], hogy ennek következtében úgy írhatjuk fel őket, mint egy  $F(\tau, y)$  függvény  $y$  bránra merőleges ko-

ordináta ill.  $\tau$  időparaméter szerinti deriváltjait. A függvény alakja:

$$F(\tau, y) = \frac{(a'a)^2}{b^2} - \frac{(\dot{a}a)^2}{n^2} - ka^2 \quad (3.3)$$

Így az Einstein-tenzor (0,0) és (5,5) komponenseire felírhatjuk a következő összefüggéseket:

$$F' = \frac{2a'a^3}{3}\kappa^2\check{T}_0^0 \quad (3.4)$$

$$\dot{F} = \frac{2\dot{a}a^3}{3}\kappa^2\check{T}_5^5 \quad (3.5)$$

A (3.4) integrálása a  $C$  elsőintegrál megjelenéséhez vezet:

$$F + \frac{\kappa^2}{6}a^4\rho_B + C = 0$$

Itt kihasználtuk, hogy a  $\check{T}_0^0 = -\rho_B$  független az  $y$ -tól. Ám a  $\check{T}_0^0 = \check{T}_5^5$  feltételezésével belátható, hogy a  $\rho_B$  időfüggetlen is egyben. Ennek következtében viszont a  $C$  első integrál is időfüggetlen lesz.

A (3.4) a  $\rho_B = -P_B$  teljesülésével, az  $y \rightarrow 0$ -ban feltételezett folytonossági feltétellel ill. az  $y \longleftrightarrow -y$  szimmetriával a következő Friedmann-egyenlethez vezet [21]:

$$\frac{\dot{a}_0^2 + k}{a_0^2} = \frac{\kappa^2}{6}\rho_B + \frac{\kappa^4}{36}\rho_b^2 + \frac{C}{a_0^4} \quad (3.6)$$

A (3.6) összefüggés elégséges a brán kozmológiai fejlődésének vizsgálatára. Mindez a bulk metrikájától és a  $b$  metrikus együttható időfüggésétől függetlenül. A nulla alsó index az adott mennyiség  $y = 0$  pontban felvett értékét jelöli.

Tételezzük fel, hogy a  $b$  metrikus együttható időfüggetlen, azaz  $\dot{b} = 0$ . Ezt a mértékszabadságot kihasználva kiköthetjük, hogy  $b = 1$ , így ez csak az  $y$  koordinátától függ explicit módon. A  $\check{G}_{05}=0$  felhasználásával megadható az  $n$  metrikus együttható is. Ez a következő összefüggés segítségével történik:

$$\frac{\dot{a}}{n} = \alpha(t)$$

Ezt 3.4-ba behelyettesítve egy differenciálegyenlethez jutunk, amely a brán kivételével a teljes bulkra alkalmazható:

$$\alpha^2 + k + (aa')' = \frac{\kappa^2}{3}\rho_B a^2$$

Ez a  $\rho_B$  előjelének és nagyságának függvényében a következő megoldásokhoz vezet. A megoldások rendre  $\rho_B$  negatív, pozitív és zérus értékeire:

$$\begin{aligned} a^2 &= A \cosh(\mu y) + B \sinh(\mu y) + D \\ a^2 &= A \cos(\mu y) + B \sin(\mu y) + D \\ a^2 &= (\alpha^2 + k)y^2 + Fy + G \end{aligned} \quad (3.7)$$

A trigonometrikus együttható értéke:

$$\mu = \sqrt{-\frac{2\kappa^2}{3}\rho_B}$$

Az együtthatók meghatározásához az időparamétert az  $n_0 = 1$  feltétellel rögzítjük, majd felhasználjuk az Israel-féle csatolási összefüggéseket.

Ha az időparamétert az  $n_0 = 1$  feltétellel rögzítjük, az idő a brán kozmológiai ideje. A bulk kozmológiai állandó esetében a negatív  $\rho_B$ -re vonatkozó megoldás érvényes. Így bulk kozmológiai konstans jelenlétében metrikus együtthatók végleges alakja:

$$a(\tau, y) = \left[ \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{\kappa^2 \rho_b}{6\rho_B} \right) a_0^2 + \frac{3C}{\kappa^2 \rho_B a_0^2} + \left[ \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{\kappa^2 \rho_b}{6\rho_B} \right) a_0^2 - \frac{3C}{\kappa^2 \rho_B a_0^2} \right] \cosh(\mu y) - \frac{\kappa \rho_b}{\sqrt{-6\rho_B}} a_0^2 \sinh(\mu |y|) \right] \quad (3.8)$$

$$n(t, y) = \frac{\dot{a}(t, y)}{\dot{a}(t)} \quad (3.9)$$

Ennek jelentősége, hogy a 3.6 és a brán folyadék egyenletből képezett rendszernek eleget tevő  $a_0(t)$  és  $\rho_b(t)$  függvények ismeretében a bulk metrika szerkezetére a brántól távoli tartományokban is következtethetünk.

### 3.1.1. A Schwarzschild-Anti de Sitter bulk

Az ÁRE Einstein-egyenleteinek egyik legismertebb megoldása a Schwarzschild megoldás. Ez a megoldás sztatikus és gömbszimmetrikus, az  $r = 0$  pontban pedig szingulárisává válik. Ennek ötdimenziós általánosítása a Schwarzschild-Anti de Sitter bulk (Schw-AdS 5D) téridő [23]. Ez a bulk ugyancsak sztatikus és gömbszimmetrikus. A brán ebben a téridőben mozoghat.

Az ívhossz kifejezése [23], [24], [25]:

$$ds^2 = -f(r)dT^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + r^2 d\Sigma_K^2 \quad (3.10)$$

A kifejezés utolsó tagja a egy háromdimenziós gömb, sík vagy hiperboloid metrikája, annak függvényében, hogy a  $K$  görbületi együttható értéke 1, 0 vagy -1. Ennek a metrikának a koordinátái az  $x^i$  koordináták. Az  $f(r)$  függvény a következő alakban adható meg [23]:

$$f(r) = K + \frac{r^2}{l^2} - \frac{\mu}{r^2} \quad (3.11)$$

Itt az  $l$  és a  $\mu$  állandók, értékeik olyanok, hogy az  $f$  függvény mindig pozitív legyen.

Ez a metrika ránézésre lényegesen eltér a (3.1) metrikától. Bebizonyították [23], hogy a látszó különbség ellenére a (3.1) és a (3.10) mégis ugyanazt a téridőt írják

le. Ennek belátására egy olyan transzformációra van szükség, amely a (3.10) metrikát Gauss-féle normál-koordinátákba viszi át. Ez a [23]-ban megtalálható. Ugyanitt beláták azt is, hogy a két teljesen eltérő metrikájú, de AdS jellegű bulk téridő egyenértékű

## 3.2. Kozmológiai brán beágyazása különböző típusú bulk téridőkbe

A brán-elméletek egyik legégetőbb problémaköre a bulk téridő szerkezetének meghatározása kísérleti eredményekből. Ez napjainkban is nyitott kérdés. Mivel az Univerzum jelen ismereteink szerint nagyléptékben sík, homogén és izotrop, ezért leírására a négydimenziós FLRW téridő alkalmas. Ebből kifolyólag kézenfekvő, hogy leírására egy olyan bránt válasszunk, amely mindezekkel a szimmetriákkal bír. Ez a kozmológiai brán. Először a kozmológiai brán tulajdonságait nézzük át.röviden. Azután a beágyazás-probléma részleteibe nyerünk betekintést. A kozmológiai bránok általános bulk téridőbe való beágyazására a [19] ír le egy algoritmust. A legegyszerűbb eset a tükörszimmetrikus beágyazás. Az erre vonatkozó egyenletrendszer (amely kiindulási pont e feladat további tanulmányozásához) a "Tükörszimmetrikus beágyazás általános vákuum bulk téridőbe" című alfejezetben található.

### 3.2.1. A kozmológiai brán szerkezete és tulajdonságai

Kozmológiai brán alatt egy olyan hiperfelületet értünk, melyet a Friedmann-Robertson-Walker-Lemaitre (a továbbiakban csak FLRW) téridővel írunk le. Ennek anyaga homogén és izotrop ideális folyadék, amelynek szimmetria tulajdonságai illenek a téridő szimmetriáihoz. Szokás egyszerűen csak Friedmann-bránnak nevezni.

A brán metrikája [19]:

$$\begin{aligned} g_{ab} &= -u_a u_b + a^2(\tau) h_{ab} \\ h_{ab} &= r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \end{aligned} \quad (3.12)$$

Az  $a(\tau)$  a metrika térszerű részét jellemző skálafaktor,  $h_{ab}$  a konstans görbületű (ez 1, 0 vagy -1 lehet, annak függvényében hogy zárt, sík vagy nyitott Univerzumot tételezünk fel a bránon) térszerű metrika, mely a maximálisan szimmetrikus térszerű metszeteket írja le. Ez az alak biztosítja a gömbszimmetriát.

Az  $u^a = (\partial/\partial\tau)^a$  alakban keresett időszerű kongruencia az  $u^a u_a = -1$  és a  $u^a h_{ab} = 0$  összefüggéseknek engedelmeskedik. Könnyen belátjuk, hogy a  $u_b \nabla_a u^b = u^b \nabla_b u^a = 0$  összefüggés is érvényes [19]. A  $\tau$  sajátidő szerinti deriváltakat a deriválandó mennyiség fölé tett ponttal jelöljük ( $\tau$  időparaméter). Technikailag ez a deriválandó mennyiség

$u^a$  irányában vett Lie-deriváltja, amelyet olyan egy  $\tau = \text{áll.}$  hiperfelületre pojektálunk, amelyet  $u^a$  irányára merőlegesen veszünk fel.. Ennek következtében, felhasználva a téridő sztatikus jellegéből adódó  $\dot{h}_{ab} = 0$  összefüggést, a következő írható fel még:

$$u^c \nabla_c h_{ab} = -\frac{1}{a^2} (\nabla_a u_b + \nabla_b u_a) \quad (3.13)$$

Ennek spurja  $\nabla_a u^a = (d-1)\dot{a}/a$ , ahol  $d$  a brán dimenziószámát jelöli [19].

Az ideális folyadék energia-impulzus-tenzora:

$$T_{ab} = \rho(\tau)u_a u_b + p(\tau)a^2 h_{ab} \quad (3.14)$$

Az  $u^a$  a folyadék  $d$ -sebességét jelöli. Ez jelen esetben természetesen négyessebesség, mivel a brán dimenziószáma négy. A térbeli izotrópia és homogenitás megkövetelik a  $h_{ab}\nabla^b a = h_{ab}\nabla^b p = h_{ab}\nabla^b \rho = 0$  feltételek fennállását [19].

### 3.3. Tükörszimmetrikus beágyazás általános vákuum bulk téridőbe

A [19] függelékében ismertetett algoritmus sok egyenlete azonosan nullát ad, ha Friedmann bránt akarunk tükörszimmetrikusan beágyazni olyan vákuum bulk téridőbe, mely ötdimenziós kozmológiai állandóval rendelkezik. A bulk téridő metrikája nem adott. A feladat a bulk téridő meghatározása. Ez nem egyszerű feladat, ugyanis még nem található az irodalomban olyan bulk téridő, amelyet Friedmann brán beágyazásából határoztak meg. Dolgunkat az egyszerűsíti, hogy a metrikát (2.2) alakban keressük. Ebből a brán metrikája adott, így csak az  $n^a$ , a metrika bránra normális komponense meghatározandó. További egyszerűsítés a téridő energia-impulzus-tenzorának viszonylag egyszerű alakja. Ily módon olyan összefüggésekhez jutunk, melyek a normálisvektort tartalmazzák és így algebrai úton eljuthatunk egy differenciálegyenlet-rendszerhez, mely segítségével ennek komponenseiről információkat kapunk.

Az említett algoritmus megmaradt egyenletei az alábbi alakot öltik:

$$\Lambda = \frac{\kappa^2 \lambda}{2} + \frac{\tilde{\kappa}^2 \tilde{\Lambda}}{2} \quad (3.15)$$

$$\kappa^2 \left(\frac{a_0}{a}\right)^4 \dot{U}_0 + \dot{\Lambda} = 0 \quad (3.16)$$

$$\frac{\dot{a}^2 + k}{a^2} = \frac{\Lambda}{3} + \kappa^2 \frac{\rho}{3} \left(1 + \frac{\rho}{2\lambda}\right) + \frac{\kappa^2}{3} \left(\frac{a_0}{a}\right)^4 U_0 \quad (3.17)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = \frac{\Lambda}{3} - \frac{\kappa^2}{6} \left[ \left(1 + 2\frac{\rho}{\lambda}\right) \rho + 3 \left(1 + \frac{\rho}{\lambda}\right) p \right] - \frac{\kappa^2}{3} \left(\frac{a_0}{a}\right)^4 U_0 \quad (3.18)$$

$$K_{ab}^{\pm} = \pm \frac{1}{2} \Delta K_{ab} \quad (3.19)$$

$$3\Delta K_{ab} = -\tilde{\kappa}^2 \left[ (2\rho + 3p - \lambda) u_a u_b + (\rho + \lambda) a^2 h_{ab} \right] \quad (3.20)$$

A metrika és a külső görbület bránon kívüli viselkedését leíró egyenletek:

$$\mathcal{L}_n g_{ab} = \pm 2K_{ab}^\pm = \mp \frac{\tilde{\kappa}^2}{3} [(2\rho + 3p - \lambda)u_a u_b + (\rho + \lambda)h_{ab}] \quad (3.21)$$

$$\mathcal{L}_n K_{ab}^\pm = K_{ac}^\pm K_b^{\pm c} + \kappa^2 \left(\frac{a_0}{a}\right)^4 U_0 (u_a u_b + \frac{a^2}{3} h_{ab}) - \frac{1}{6} \tilde{\kappa}^2 \tilde{\Lambda}^2 (-u_a u_b + a^2 h_{ab}) \quad (3.22)$$

A továbbiakban ezen összefüggések bal oldalait igyekszünk könnyebben kezelhető alakra hozni. Ezért elsősorban a projekciós írásmódot alkalmazzuk, hogy a megfelelő tagokat szét tudjuk választani. Érdekes azonban a következő összefüggéseket megjegyezni:

$$n^i h_{ij} = n_i u^i = h_{ij} u^i = 0 \quad (3.23)$$

Ezek mellett még néhány igen hasznos összefüggést használtunk fel:

$$u_i \partial_j n^i = -n^i \partial_j u_i = h_{id} \partial_j n^i = -n^i \partial_j h_{id} \quad (3.24)$$

Így a következő lépéssorozatot hajtjuk végre a (3.21)-re:

1) A Lie-deriváltak értelmezését alkalmazzuk (először a metrikus tenzorra, majd később a külső görbület tenzorára):

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_n g_{ab} &= g_a^c g_b^d \tilde{\mathcal{L}} g_{cd} = \\ &= [u_a u^c u_b u^d - u_a u^c h_b^d - u_b u^d h_a^c + h_a^c h_b^d] \times \\ &\quad \times \left[ -u_d n^i \partial_i u_c - u_c n^i \partial_i u_d + a^2 n^i \partial_i h_{cd} + 2a h_{cd} n^i \partial_i a \right. \\ &\quad \left. - u_i u_d \partial_c n^i + a^2 h_{id} \partial_c n^i - u_c u_i \partial_d n^i + a^2 h_{ci} \partial_d n^i \right] \end{aligned} \quad (3.25)$$

Ezután a szorzást úgy végezzük el, hogy az első zárójelben lévő tagokkal egyenként szorozzuk be a második zárójelet. Ezáltal a projekciókat is meg tudjuk határozni. Ezen az úton haladva a következőkhöz jutunk:

$$u^a u^b \mathcal{L}_n g_{ab} = n^i [-4u^c (\partial_i u_c - \partial_c u_i)] , \quad (3.26)$$

$$u^a h_j^b \mathcal{L}_n g_{ab} = 2h_j^d n^i [Ba^2 u^c (\partial_i h_{cd} - \partial_c h_{id}) + 2A(\partial_i u_d - \partial_d u_i)] , \quad (3.27)$$

$$h_j^a h_j^b \mathcal{L}_n g_{ab} = n^i h_j^c h_k^d Ba^2 [h_{cd} \ln(Ba^2) - (\partial_c h_{id} + \partial_d h_{ci} - \partial_i h_{cd})] . \quad (3.28)$$

Megjegyezzük, hogy a fenti egyenleteket oly módon alakítottuk át, hogy a meghatározandó  $n^i$  szorzóként jelenjen meg (azaz parciális integrálások segítségével kiemeltük őket az őket tartalmazó deriváltakból).

A (3.22) egyenlet megoldása és a projekcióinak meghatározása is hasonlóan történik.

A külső görbület Lie deriváltja:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_n K_{ab} &= g_a^c g_b^d \tilde{\mathcal{L}}_n K_{cd} = \\
&= [u_a u^c u_b u^d - u_a u^c h_b^d - u_b u^d h_a^c + h_a^c h_b^d] \times \\
&\quad \times \left[ n^i \partial_i (A u_c u_d + B a^2 h_{cd}) + (A u_i u_d + B a^2 h_{id}) \partial_c n^i \right. \\
&\quad \left. + (A u_c u_i + B a^2 h_{ci}) \partial_d n^i \right].
\end{aligned} \tag{3.29}$$

A következő jelöléseket használtuk:

$$\begin{aligned}
A &= -\frac{\tilde{\kappa}^2}{6} (2\rho + 3p - \lambda), \\
B &= -\frac{\tilde{\kappa}^2}{6} (\rho + \lambda)
\end{aligned} \tag{3.30}$$

A (3.29) egyenletből  $\mathcal{L}_n K_{ab}$  projekcióira a következő összefüggések adódnak:

$$u^a u^b \mathcal{L}_n K_{ab} = n^i [\partial_i \ln A - 4u^c (\partial_i u_c - \partial_c u_i)] , \tag{3.31a}$$

$$u^a h_j^b \mathcal{L}_n K_{ab} = 2h_j^d n^i [B a^2 u^c (\partial_i h_{cd} - \partial_c h_{id}) + 2A (\partial_i u_d - \partial_d u_i)] , \tag{3.31b}$$

$$h_j^a h_j^b \mathcal{L}_n K_{ab} = n^i h_j^c h_k^d B a^2 [h_{cd} \ln(B a^2) - (\partial_c h_{id} + \partial_d h_{ci} - \partial_i h_{cd})] . \tag{3.31c}$$

Ezután az (3.21) és (3.22) egyenletek bal oldalain lévő projekcióit illesztjük a jobb oldal megfelelő komponenseihez. Ily módon következő egyenletrendszer adódik:

$$n^i u^c \partial_{[c} u_{i]} = -\frac{\tilde{\kappa}^2}{12} (2\rho + 3p - \lambda) \tag{3.32a}$$

$$-2n^i h_b^d (\partial_{[i} u_{d]} + a^2 u^c \partial_{[i} h_{c]d}) = 0 \tag{3.32b}$$

$$n^i a^2 [2h_{ab} \partial_i \ln a - h_a^c h_b^d (\partial_c h_{id} + \partial_d h_{ci} - \partial_i h_{cd})] = -\frac{\tilde{\kappa}^2}{6} (\rho + \lambda) a^2 h_{ab} \tag{3.32c}$$

$$n^i A [\partial_i \ln A + 4u^c \partial_{[c} u_{i]}] = \frac{\tilde{\kappa}^4}{36} (2\rho + 3p - \lambda)^2 + \kappa^2 \left(\frac{a_0}{a}\right)^4 U_0 + \tilde{\kappa}^2 \frac{\tilde{\Lambda}}{6} \tag{3.32d}$$

$$2n^i h_b^d (A \partial_{[i} u_{d]} - B a^2 u^c \partial_{[i} h_{c]d}) = 0 \tag{3.32e}$$

$$\begin{aligned}
n^i B a^2 [2h_{ab} \partial_i \ln(B a^2) - h_a^c h_b^d (\partial_c h_{id} + \partial_d h_{ci} - \partial_i h_{cd})] = \\
\left[ \frac{\tilde{\kappa}^4}{36} (\rho + \lambda)^2 a^2 + \kappa^2 \left(\frac{a_0}{a}\right)^4 U_0 \frac{a^2}{3} - \tilde{\kappa}^2 \frac{\tilde{\Lambda}}{6} a \right] h_{ab}
\end{aligned} \tag{3.32f}$$

Ezáltal a bránnak általános bulkba való tükörszimmetrikus beágyazásához szükséges egyenletrendszer rendelkezésünkre áll. Ennek a differenciálegyenlet-rendszernek további vizsgálata a jövőbeli terveink közé tartozik.

### 3.4. Luminozitási távolság-vöröseltolódás reláció kozmológiai állandóval rendelkező sík Friedmann brán esetén

A kozmológiai (Friedmann-) bránok kedvelt témái az elméleti kutatásnak. Ennek oka, hogy rendelkeznek mindazon szimmetriákkal, melyekkel a FLRW Univerzum is. A megfigyelő kozmológia ugyanakkor olyan mennyiségeket is mér, amelyek a brán elméletekben is értelmezhetők és kiszámolhatók. Ha a mérési adatokat összevetjük a számolt értékekkel, a brán-hipotézis elviekben tesztelhetővé válik. Egyik ilyen lehetőség a luminozitási távolság mérése. A  $d_L$  luminozitási távolság, az  $L$  luminozitás és az  $F$  fluxus közt definíció szerint a következő összefüggés áll fenn [26],[27]:

$$d_L = \left( \frac{L}{4\pi F} \right)^{1/2}$$

A luminozitási távolság vöröseltolódás-függése [26]:

$$d_L(z) = a_0(1+z)(\eta_0 - \eta)$$

Az  $(\eta_0 - \eta)$  mennyiség a radiális koordináta,  $a_0$  a skálafaktor jelenlegi értéke,  $z$  a vöröseltolódás mértéke. Utóbbi a spektrumvonalak Doppler-eltolódásából mérhető. A jelenlegi mérési adatok szerint a Világegyetem homogén és izotrop, az anyag- és energiasűrűség összege nagyon közel áll a kritikus sűrűséghez [27]. Ennek következtében a Világegyetem sík, azaz a  $K$  görbületi paraméter zérus. A téridő metrikája így a sík Friedmann metrika:

$$ds^2 = -d\tau^2 + a^2(\tau) [d\eta^2 + \eta^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)]$$

Mivel a fény a forrás és a megfigyelő közt radiális null geodetikus mentén halad, kiköthető, hogy:

$$ds = d\theta = d\varphi = 0$$

Így a fényforrás radiális koordináta távolságára:

$$\eta_0 - \eta = \int_{\eta}^{\eta_0} d\eta = \int_t^{t_0} \frac{cd\tau}{a(\tau)} = \int_a^{a_0} \frac{cda}{a^2 H}$$

Az utolsó egyenlőségénél felhasználtuk a Hubble-paraméter  $H = \dot{a}/a$  definícióját. A Hubble paraméter a Friedmann-egyenletből határozható meg [26],[27]. A brán Friedmann egyenlet néhánnyal több tagot tartalmaz, mint a szokásos ÁRE-beli. Ezt  $K = 0$  esetre felírva [28],[29]:

$$H^2 = \frac{\Lambda}{3} + \frac{\kappa^2 \rho}{3} \left( 1 + \frac{\rho}{2\lambda} \right) + \frac{2\bar{m}}{a^4} \quad (3.33)$$



A Hubble-paraméter jelenlegi értékének (Hubble-állandó) négyzetével leosztva [29], [30]:

$$\frac{H^2}{H_0^2} = \Omega_\Lambda + \Omega_\rho \frac{a_0^3}{a^3} + \Omega_d \frac{a_0^4}{a^4} + \Omega_\lambda \frac{a_0^6}{a^6}$$

Az alkalmazott jelölések:

$$\Omega_\Lambda = \frac{\Lambda}{a_0^6 H_0^2}, \Omega_\rho = \frac{\kappa^2}{a_0^3 H_0^2}, \Omega_d = \frac{2\bar{m}}{a_0^4 H_0^2}, \Omega_\lambda = \frac{\rho_0^2}{6\lambda H_0^2}$$

Ezáltal a Hubble-paraméter ismert, a luminozitási távolság pedig kiszámolható. Érdeemes egy kicsit átalakítani a radiális koordináta kifejezését. Ekkor:

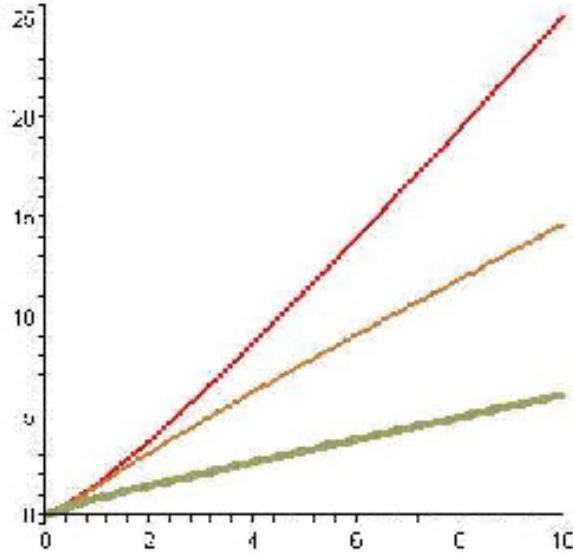
$$\eta_0 - \eta = \frac{c}{H_0 \Omega_\Lambda^{1/2}} \int_a^{a_0} \frac{ada}{\left[ \left( a^3 + \frac{\Omega_\rho a_0^3}{2\Omega_\Lambda} \right)^2 + \left( \frac{\Omega_\lambda}{\Omega_\Lambda} - \frac{\Omega_\rho^2}{\Omega_\Lambda^2} \right) a_0^6 + \frac{\Omega_d}{\Omega_\Lambda} a_0^4 a^2 \right]^{1/2}}$$

Az integrál nevezője akkor gyökteleníthető, ha az első zárójelen kívül helyezkedő tagok eltűnnek. Ehhez az alábbi két feltétel egyidejű teljesülése szükséges:

- 1)  $\Omega_d = 0$
- 2)  $\kappa^2 \lambda = 2\Lambda$

Az első feltétel nem okoz problémát. Azt mondja ki, hogy a brán szimmetrikusan van beágyazva a Schw-AdS 5D téridőbe. A második feltétel azonban igencsak problémás. Először is egy érdekessége: két kozmológiai állandó értéket enged meg. Sőt, a nagyobb értékhez rendelt energiasűrűség nagyon közel esik jelenlegi kozmológiai állandóhoz társított energiasűrűséghez [29]. A nagyobbik probléma az, hogy a bránfeszültség értéke lényegesen kisebb lesz az elméletileg vártnál. Ugyanis a második feltétel a brán feszültséget és a kozmológiai állandót kapcsolja össze. Ez problémát okoz, ugyanis a kozmológiai állandó energiasűrűsége egy nagyon kis érték. Így a második feltétel miatt a  $\lambda$  is kicsi kell legyen. Nagyságrendre mindkét itt megjelent kozmológiai állandóra vonatkozó megoldás esetében nagyságrendre  $10^{-60}(TeV)^4$  értéket kapunk [29], [28]. Realisztikus esetben az  $1(TeV)^4$  bránfeszültség értékére csak alsó korlát [16]. Ebből kifolyólag emodell nem lehet realisztikus.

Ha e két feltételt mellőzzük, az integrált megoldhatjuk numerikus módszerekkel vagy első rendig vett Taylor-sorfejtéssel. Viszont ha az említett analitikus úthoz ragaszkodunk, a megoldásunk nem realisztikus. Ezért ez egy játék-modellként kezelendő. Egyetlen érdeme, hogy a megoldás analitikus alakban előállítható. Így egy realisztikusabb modell esetén legalább a trendekre lehet következtetni. A luminozitás távolság-



3.1. ábra. A  $d_L - z$  reláció  $z = 10$ -ig

vöröseltolódás összefüggés ekkor [29]:

$$d_L(z) = \frac{c(1+z)}{6\sqrt[3]{\frac{1}{2}H_0\Omega_\Lambda^{1/6}\Omega_\rho^{1/3}}} \left[ \ln \frac{[1-h+h^2][1+h(1+z)]}{[1-h(1+z)+h^2(1+z)^2][1+h]} + 2\sqrt{3} \left[ \arctan \frac{\sqrt{3}}{3} \left( \frac{2}{h} - 1 \right) - \arctan \frac{\sqrt{3}}{3} \left( \frac{2}{h(1+z)} - 1 \right) \right] \right]$$

Itt  $h = (\Omega_\rho/2\Omega_\Lambda)^{1/3}$ . Az ábrákon a luminozítás távolságot  $H_0/c$  egységekben tüntettük fel [29].

A 3.1.ábra a relációt  $z = 10$  értékig ábrázolja. A görbék fentről lefele: kozmológiai állandóval rendelkező világegyetemre, nagyobb illetve kisebb kozmológiai brán megoldásra vonatkozó  $d_L - z$  reláció. Mivel a kozmológia állandó két eltérő értéket vehet fel, a rájuk vonatkozó brán megoldásokat emiatt külön esetként kell kezelni. A kozmológiai felmérések egyelőre a  $z = 2$  vöröseltolódásnak megfelelő távolságra érnek el. Megjegyezzük, hogy a realiztikus, kozmológiai állandós ÁRE megoldás úgy viselkedik, mint a szupernóva mérési adatokból származó görbe, azaz felfele kanyarodik.

Jól látható, hogy a luminozítási távolság a kozmológiai állandós ÁRE esetben nő a legjobban. Összességében mindhárom esetben a reláció monoton módon növekszik. Elmondható, hogy ezen egyszerű megoldás ismeretében egyértelmű következtetéseket nem vonhatunk le. Csak a realiztikusabb, azaz numerikus vagy perturbációs eredmények ismeretében lehet valamilyen jóslatba bocsátkozni a brán-világ geometriájára nézve.

## 4. Fekete lyukak a bránon

Az ÁRE egyenleteinek szinguláris megoldásai a fekete lyukakat írják le. Ebben a fejezetben azt vizsgáljuk, hogy az effektív Einstein-egyenletnek szinguláris megoldásai milyen fekete lyukakat hoznak létre a bránon. Jelen esetben ugyanis a nemlokális hatásokkal is kell számolnunk, amelyek előreláthatólag módosíthatják a brán téridő metrikáját. Érdekes azzal is számolni, ha valamilyen okokból kifolyólag a bulk Weyl-tenzorának nemlokális hatásai eltűnnek a bránon. Ezen megoldások ismeretében végül egy inhomogén brán-kozmológiát vizsgálunk meg.

### 4.1. Általános gömbszimmetrikus vákuum brán

A gravitációs egyenletek felírása általános esetben sok tagot tartalmazó és kevésbé átlátható egyenletekhez vezet. Ezért inkább bizonyos egyszerűsítő feltételeknek vetjük alá őket, nem minden eredmény nélkül. Így kihasználjuk, hogy a kozmológiai állandó járuléka oly kicsi az anyagéhoz viszonyítva, hogy nyugodtan el lehet hanyagolni. További egyszerűsítés, ha a bránt vákuum tölti ki [11]. Ennek következtében a (2.22) egyenlet jobb oldaláról eltűnik az energia-impulzus-tenzor és a "négyzetes tag". Az egyenlet így a következő alakot ölti:

$$R_{ij} = -E_{ij} \quad (4.1)$$

Ez megköveteli, hogy az egyenlőség két oldalán lévő kifejezések oldalon lévő tag hasonló tulajdonságú. Azaz a bránon az  $E_{ij}$  divergenciája is eltűnik [11], [16]:

$$\frac{1}{3}D_i U + \frac{4}{3}U A_i + D^j P_{ij} + A^j P_{ij} = 0 \quad (4.2)$$

A harmadik, és egyben legfontosabb a metrika sztatikus és gömbszimmetrikus, diagonális alakú megválasztása [11]. Ennek alakja Schwarzschild-féle koordinátákban:

$$ds^2 = -e^{\nu(r)} dt^2 + e^{\lambda(r)} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (4.3)$$

Ezen egyszerűsítések ismeretében felírhatjuk a brán Einstein-egyenleteit. Azonban ezek közül csak három független. Ez az egyenletrendszer alul-determináltságához vezet. Ha azonban az effektív energia-impulzus-tenzor megmaradására vonatkozó egyen-

letet is felhasználjuk, négy független egyenlet áll rendelkezésünkre. Ezek [11]:

$$-e^{-\lambda} \left( \frac{1}{r^2} - \frac{\lambda}{r} \right) + \frac{1}{r^2} = 3\alpha U \quad (4.4)$$

$$e^{-\lambda} \left( \frac{\nu'}{r} + \frac{1}{r^2} \right) - \frac{1}{r^2} = \alpha(U + 2P) \quad (4.5)$$

$$e^{-\lambda} \left( \nu'' + \frac{\nu'}{2} + \frac{\nu' - \lambda'}{r} - \frac{\nu' \lambda'}{2} \right) = 2\alpha(U - P) \quad (4.6)$$

$$\nu' = -\frac{U' + 2P'}{2U + P} - \frac{6P}{r(2U + P)} \quad (4.7)$$

Az egyenletek jobb oldalán az egyszerűség kedvéért az  $\alpha = 16\pi G/\kappa^4\lambda$  jelölést használtuk fel.

## 4.2. "Árapály töltésű" Reissner-Nordström típusú megoldás

Ebben az alfejezet a [20], majd a [38] publikáció munkamenetét követjük

A (4.4) integrálása által azonnal adódik a következő összefüggés [20]:

$$\begin{aligned} e^{-\lambda} &= 1 - \frac{C_1}{r} - \frac{Q(r)}{r} \\ Q(r) &= 3\alpha \int r^2 U(r) dr \end{aligned} \quad (4.8)$$

Itt  $C_1$  egy integrálási állandó. A  $Q(r)$  a sötét sugárzási taghoz társítható gravitációs tömeg, az ún. sötét tömeg. Az  $U = 0$  esetben a (4.8) által megadott metrikus együttható az általános relativitás elméletéből ismert Schwarzschild megoldáshoz kell tartson, ezáltal a  $C_1$  integrálási állandóra:  $C_1 = 2GM$  adódik. Az  $M$  = állandó a gravitációs teret létrehozó test tömege. Ha (4.7) összefüggést a (4.5) téregyenletbe helyettesítjük be, a (4.8) felhasználásával kéttagú differenciálegyenlet-rendszert kapunk, mely az  $U$  és  $Q(r)$  értékeinek a radiális koordinátától való függését adja meg. Az egyenletek a következők lesznek[20]:

$$\frac{dU}{dr} = -\frac{(2U + P) [2GM + Q + \alpha(U + 2P)r^3]}{r^2 \left( 1 - \frac{2GM}{r} - \frac{Q}{r} \right)} - \frac{2dP}{dr} - \frac{6P}{r} \quad (4.9)$$

$$\frac{dQ}{dr} = 3\alpha r^2 U \quad (4.10)$$

Az egyenletet többféle képpen is meg lehet oldani. Itt az az esetet vizsgáljuk, mikor fennáll az alábbi:

$$2U + P = 0 \quad (4.11)$$

Ennek teljesülésével a (4.9) egyenlet az alábbi alakot ölti:

$$\frac{dP}{dr} = -4\frac{P}{r} \quad (4.12)$$

A következő általános megoldásokat kapjuk:

$$P = \frac{P_0}{r^4}, \quad U = -\frac{P_0}{2r^4} \quad (4.13)$$

A sötét tömegre a következő összefüggés adódik:

$$Q = \frac{3\alpha P_0}{2r} + Q_0$$

Az előzőekben a  $P_0$  és  $Q_0$  integrálási állandók. A brán metrikus együtthatóit ezáltal meghatároztuk:

$$-e^\nu = e^{-\lambda} = 1 - \frac{2GM}{r} - \frac{3\alpha P_0}{2r^2} \quad (4.14)$$

A metrikus függvényeket a (4.3)-ba visszahelyettesítve azt találjuk, hogy a kapott megoldás formálisan azonos a Reissner-Nordström-féle fekete lyuk metrikájával [20]. Ez a fekete lyuk metrika az Einstein-Maxwell egyenletek megoldásával származtatható [15]. A lényeges elvi eltérés azonban az, hogy ott egy elektromosan töltött sztatikus fekete lyuk elektrosztatikus potenciálja adja a járulos  $1/r^2$  függésű tagot. Itt szó sincsen elektrosztatikus töltésről, ugyanis itt a "töltés" egy nemlokális hatás következményeként lép fel, afféle "árapály jellegű erő által keltett töltés". Azért beszélhetünk árapály jellegű erőről, mert abban az esetben is a nemlokális hatások érvényesülnek. Ez a megoldást árapály töltésű fekete lyuk (tidal charge black hole) néven ismert az irodalomban.

A fenti alakot általánosíthatjuk, úgy, hogy csak a metrikus együttható szerkezetét őrizzük meg, az állandókat kicseréljük, majd az így kapott metrikával jellemzett fekete lyuk esemény-horizontjának szerkezetét vizsgáljuk meg. Az átalakítás oka, hogy a metrikus együtthatókat megadó függvényekbe elméleti megfontolásokból érdemes bevezetni a négy-, illetve ötdimenziós Planck-tömegeket,  $M_p$ -t illetve  $\tilde{M}_p$ -t [38]. Így a metrikus együtthatók:

$$-e^\nu = e^{-\lambda} = 1 - \left(\frac{2M}{M_p^2}\right) \frac{1}{r} + \left(\frac{q}{\tilde{M}_p^2}\right) \frac{1}{r^2} \quad (4.15)$$

Itt  $q = QM_p^2$  dimenziótlan, az "árpály-töltés" paramétere. A Weyl-tenzor projekciója a következő alakú lesz:

$$E_{\mu\nu} = -\left(\frac{q}{\tilde{M}_p^2}\right) \frac{1}{r^4} [u_\mu u_\nu - 2r_\mu r_\nu - h_{\mu\nu}]$$

A feketelyuk eseményhorizontjai a központi testtől a következő távolságokra adódnak:

$$r_\pm = \frac{M}{M_p^2} \left[ 1 \pm \sqrt{1 - q \frac{M_p^2}{M^2 \tilde{M}_p^2}} \right]$$

Akárcsak az általános relativitás elméletében, mindkét horizont a Schwarzschild sugáron belül helyezkedik el. A gyök miatt a  $q$  paraméterértékére egy  $q_{\max}$  felső határ adódik:

$$0 \leq q \leq q_{\max} = \left( \frac{\tilde{M}_p}{M_p} \right) \left( \frac{M}{M_p} \right)^2$$

Új lehetőség, hogy a  $q$  paraméter negatív értéket is felvehet. Ez az ÁRE-ben nem lehetséges. Ott egyetlen esemény-horizont van, melynek sugara nagyobb, mint a Schwarzschild-sugár [38], [15]:

$$r_+ = \frac{M}{M_p^2} \left[ 1 + \sqrt{1 - q \frac{M_p^2}{M^2 \tilde{M}_p^2}} \right] r_{Sch}$$

Az általános relativitásbeli Reissner-Nordström megoldás esetében az elektromos tér jelenléte gyengíti a gravitációs teret. Itt is ez áll fenn, ha  $q$  pozitív. Negatív esetben pedig ennek ellenkezője, azaz hogy a "töltés" erősíti a gravitációs teret. A (4.13) segítségével látható, hogy ebben az esetben a bránon az effektív energiasűrűség negatív. Ez nincs ellentmondásban a newtoni mechanika azon elvével, hogy izolált test gravitációs terének energiasűrűsége negatív.

A másik nagy lehetőség ún. primordiális feketelyukak létezése. Ilyen objektumok a korai univerzumban az anyag gravitációs kollapszusa nélkül is létrejöhetnek. A brán esetében ez csak akkor lehetséges, ha a korai Univerzumban nagyon erős árapály erők hatottak. Ha ilyen típusú, anyag nélküli gravitációs összeomlás lehetséges, akkor a folyamat végállapotát egy  $M = 0$  és  $q < 0$  paraméterekkel jellemezhető gömbszimmetrikus metrika írja le. Ebben az esetben:

$$-e^\nu = e^{-\lambda} = 1 + \left( \frac{q}{\tilde{M}_p^2} \right) \frac{1}{r^2} \quad (4.16)$$

Ebben az esetben az eseményhorizont az alábbi sugárral jellemezhető:

$$r_h = \frac{\sqrt{-q}}{\tilde{M}_p} \quad (4.17)$$

Ilyen objektumok létezéséről nincs kísérleti bizonyítékunk. Elméleti lehetőségként felvetődött az, hogy a kozmológia sötét anyag problémájának feloldásához ezek is hozzájárulhatnak. Úgy, hogy a primordiális fekete lyukakban igen jelentős energia tárolódhatott.

Az árapály-töltéssel rendelkező fekete lyuk metrikának legnagyobb hiányossága, hogy a gravitációs potenciálba nem viszi be az  $r^{-3}$  nagyságrendű korrekciós tagot,

amely a 1.1 összefüggésben szerepel. Emiatt pedig nem írhatja le a kollapszus végállapotát. Viszont helyesen adja meg a potenciál rövid távolságon való viselkedését ( $1/r^2$ ). Ezáltal kis tömegű fekete lyukak esetében erős tér tartományában jó közelítésként alkalmazható (l. Gravitációs lencsehatás a bránon c. fejezetben).

Az  $M = 0$  esetnek vannak olyan általánosításai is, amikor  $e^\nu \neq -e^{-\lambda}$ . Ezekről a megoldásokról bebizonyították, hogy stabilak a skalár-perturbációkra nézve [62].

### 4.3. Fekete húr megoldás

A fekete húr megoldás az ÁRE-beli Schwarzschild-féle fekete lyuk megoldásainak a legegyszerűbben adódó általánosítása.

Ebben a modellben a nemlokális tag projekciója, (2.14) eltűnő mennyiség, annak ellenére, hogy az ötdimenziós Weyl-tenzorra semmilyen kikötés nincs. A Schwarzschild metrikát egy extra, független koordinátával bővítik ötdimenziósra, ez az  $y$  koordináta lesz. Ezt a koordinátát még az  $y = le^{z/L}$  alakban is felírhatjuk, ahol  $L$  az anti de Sitter (AdS) bulk téridő görbületi sugara. A metrikus függvények, valamint a segítségükkel felírható metrika:

$$\begin{aligned} -e^\nu &= e^{-\lambda} = (1 - 2GM/r) & (4.18) \\ \tilde{g}_{ab} &= -(1 - 2GM/r)dt^2 + (1 - 2GM/r)^{-1}dr^2 + r^2d\Omega^2 + dy^2 \end{aligned}$$

Az ívelem a következő alakú:

$$d\tilde{s}^2 = e^{-2|y|/L} g_{ab}x^a x^b + dy^2$$

Fontos megjegyezni, hogy bármilyen más metrikát is tehetnénk a Schwarzschild metrika helyébe, ha annak Ricci-tenzorára fennáll az  $R_{ab} = 0$  (vagy ennek egy későbbi általánosítása, a  $R_{ab} = \Lambda g_{ab}$ ) feltétel [40]. A téridő bármely  $y = \text{állandó}$  metszete adott esetben a négydimenziós Schwarzschild metrikát adja vissza (avagy az említett  $R_{ab} = 0$  tulajdonságú metrikát). Geometriailag ez annyit jelent, hogy a bulk bármely  $y = \text{állandó}$  téridő-metszete  $r = 0$  pontban szingularitással rendelkezik. Vagyis az téridő minden  $r = 0$  pontjában egy Schwarzschild fekete lyuk van. Ezek pedig egy fonalat, egy hűrt képeznek  $r = 0$  mentén. Ezért nevezik ezt a megoldást fekete húrnak. A fekete húr nyilvánvalóan nem lokalizált a  $y = 0$  bránon.

Mivel ez egy einsteini metrika, ezért a Ricci tenzor négyzete és spurja mindenütt véges [15]. A probléma a Riemann tenzor négyzetes kifejezésénél adódik:

$$R_{abcd}R^{abcd} = \frac{1}{L^2} \left( 40 + \frac{48M^2y^4}{r^6} \right) \quad (4.19)$$

A (4.19) kifejezésből belátható, hogy ez divergál mind az  $y = \infty$ , mind az  $r = 0$  pontoknál.

E téridő geodetikus pályáinak vizsgálata után az ÁRE-beli Schwarzschild-féle fekete lyuk geodetikus pályáit kapjuk vissza. Ezek elemzése azonban bonyolultabb, mint a négydimenziós elméletben. A divergencia akkor sem kerülhető el, ha egy geodetikus pálya tetszőleges pontjának érintőjéhez illetve normális vektorához rögzítjük az ötdimenziós koordináta-rendszert [40]. Ugyanis a görbületi skalár egyik komponense ugyancsak az  $y = \infty$  és az  $r = 0$  pontoknál divergál, ugyanott, mint a (4.19). Így az említett pontokban szingularitás található. Ez is azt támasztja alá, hogy az AdS-horizontnál görbületi szingularitás található.

Numerikus módszerekkel kimutatták [41], hogy a tenzoriális perturbációkra nézve a fekete húr instabillá válik. Ezt Gregory-Laflamme instabilitás. A kiutat az adhatja, hogy az AdS-horizont közelében az instabilitás miatt a húr "letörik", és így stabillá válik, "fekete szivart" képezve. Azaz az extra dimenzió irányában most bezárul az eseményhorizont. Így az  $y$  koordináta mentén a koordináta- illetve a görbületi szingularitás megszűnik [40].

Az instabilitás ténye rámutatott arra, hogy az általános relativitás elméletének fekete lyuk megoldásai nem bővíthetők bulk téridővé oly módon, hogy az Einstein-egyenlet valamely fekete lyuk metrikájához egyszerűen hozzáadunk egy független koordinátát.

#### 4.4. Kozmológiai háttérbe ágyazott fekete lyukak a bránon

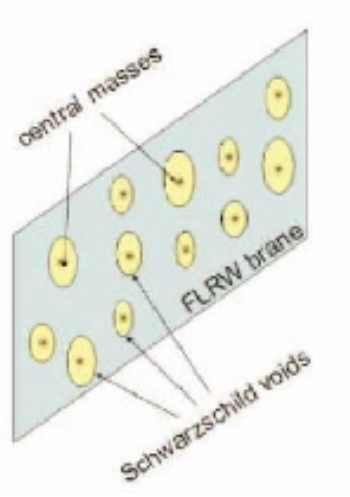
Ez a rész a [42] és a [43] felhasználásával készült.

A kozmológiában a fekete lyukakra nem úgy tekintünk, mint elszigetelt objektumokra, hanem igyekszünk ezeket egy bizonyos kozmológiai háttérbe beágyazni. Az ÁRE-ben az Einstein-Straus modell volt az első ilyen próbálkozás [45]. Ezt az irodalomban "ementáli sajt univerzum" (Swiss-cheese Universe) néven ismert. Az 4.1.ábra ezt a konfigurációt szemlélteti [42]

A későbbiekben ementáli sajt modell instabillnak bizonyult a radiális perturbációkra nézve [46]. Ennél sokkal realiztikusabb modell volt a McVittie-féle, amely az érintkezési határfelületen a FLRW és Schwarzschild metrika közti folytonosságot valósítja meg [42].

Természetesen tevődik fel az a kérdés, hogy ilyen típusú inhomogén kozmológiák az RS-bránon létrejöhetnek-e.





4.1. ábra. Az ementáli sajt univerzum (forrás: [42])

A probléma átültetése brán esetére kicsit komplexebb művelet, mint az ÁRE-ban. Itt ugyanis a feketelyuk megoldást az érintkezési hiperfelületen a bránon található kozmológiai téridővel a Lánzos-egyenlet felhasználásával kell összekapcsolni. Az érintkezési felület anyagmentes. Mindkét téridő az effektív Einstein-egyenlet megoldása. A fekete lyuk téridő megadása önmagában egy probléma, ugyanis a legegyszerűbb fekete lyuk megoldás a fekete húr. Amint azt dolgozatunk erre vonatkozó részében említettük, a szingularitás az ötödik dimenzió mentén fonászerűen kiterjedt. Azaz az ötödik dimenzióban nem kompaktifikálható, vagyis nincs az ötödik dimenzióban eseményhorizont. Ezzel a legnagyobb probléma az, a gravitonok megszökhetnek az ötödik dimenzióba. Mindezek mellett még geometriailag is interpretálni kell az ilyen típusú inhomogén bránt. A Schwazschild-űrök és a kozmológiai brán illesztéséről a (2.18) Lánzos-egyenlet gondoskodik. Így az érintkezési határfelület pontjaiban a két téridő indukált metrikái ill. a külső görbületek folytonosan mennek át egymásba. A határfelület az extra koordinátának egy  $\chi = \chi_0$  hiperfelülete. Így az érintkezési hiperfelület koordinátarendszere  $(\tau, \theta, \varphi)$

A határfelületen érintkező téridők metrikái:

$$ds_{Schw}^2 = - \left[ \left(1 - \frac{2m}{R}\right) d\dot{T}_0^2 + \left(1 - \frac{2m}{R}\right)^{-1} d\dot{R}_0^2 \right] d\tau^2 + R^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)$$

$$ds_{FLRW}^2 = -d\tau^2 + a^2(\tau) [d\chi + H^2(\chi; k)(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)]$$

Az erre vonatkozó folytonossági feltételek valamint a külső görbületek illeszkedési

feltételek segítségével a skálafaktorra a következő összefüggések adódnak [42]:

$$\begin{aligned}\dot{a}^2 + k &= \frac{2m}{a(\tau)H_0^3} \\ \ddot{a} &= \frac{m}{a(\tau)^2 H_0^3}\end{aligned}$$

Vegyük a bránra vonatkozó (3.33) Friedmann-egyenletet az  $\bar{m} = 0$  esetén. A folyadék egyenlet felhasználásával Friedmann-egyenletből megkapjuk a Raychaudhuri-egyenletet. Így a fenti mennyiségek mind hasznosíthatók. Ezek által ugyanis oda jutunk, hogy a központi tömeget és a kozmológiai por nyomását megadhatjuk az energiasűrűség függvényeként. Azaz:

$$m = \left[ \Lambda + \kappa^2 \rho(\tau) \left( 1 + \frac{\rho(\tau)}{2\lambda} \right) \right] \frac{a^3(\tau) H_0^3}{6} \quad (4.20)$$

$$p(\tau) = \frac{\Lambda}{\kappa^2 \left( 1 + \frac{\rho(\tau)}{\lambda} \right)} - \frac{\rho^2(\tau)}{[\rho(\tau) + \lambda]} \quad (4.21)$$

A folyadék-egyenlet segítségével ez utóbbiból [43]:

$$a^3 = C \frac{\kappa^2}{2\lambda} \left[ \Lambda + \kappa^2 \lambda \left( 1 + \frac{\rho}{2\lambda} \right) \right] \quad (4.22)$$

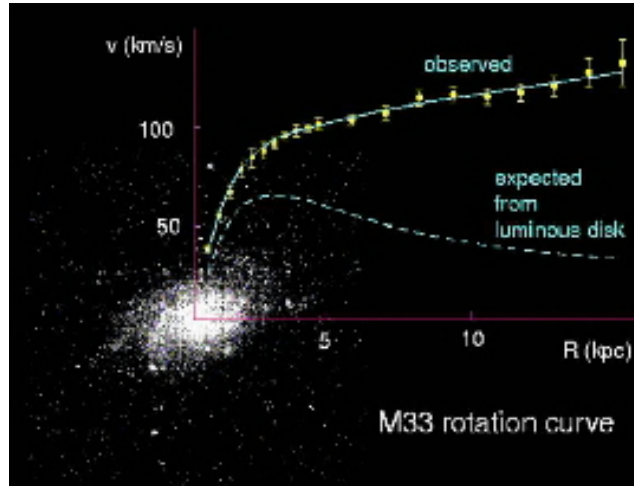
$$m = \frac{\kappa^2 C}{12\lambda} H_0^3 \quad (4.23)$$

A (4.20) összefüggés nem tételez fel konstans sűrűségét a kozmológiai fluidumra [43]. Az csak sztatikus brán esetében áll fenn. Így táguló brán leírására is alkalmas megoldáshoz jutottunk. Ezáltal kijelenthetjük, hogy az "ementáli sajt" brán alkalmas táguló világegyetemünk leírására [43]. Azaz az ilyen típusú inhomogén kozmológiák is létrejöhetnek a bránon.

## 5. Galaktikus forgásgörbék a bránon

Ha az effektív Einstein-egyenleteket önmagukra konformis módon leképezett brán esetében vizsgáljuk, váratlan eredmény adódik. Egy olyan konformisan szimmetrikus megoldás áll elő, amely a galaktikus rotációs görbék alakjára egy lehetséges, bár egyáltalán nem nyilvánvaló és kísérletileg alá nem támasztott magyarázattal szolgálhat.

A galaxisok látható anyagának peremétől még nagy távolságokra is észlelték semleges hidrogénfelhők jelenlétét. Ha ezekre kepleri körpályán mozognak, a felhők a galaxisközpontról mért  $r$  távolságán belül gömbszimmetrikusan elhelyezkedő anyag  $M(r)$  tömegére jó becslést nyerhetünk. Feltételezzük, hogy a felhő anyagára ható centrifugális tehetetlenségi gyorsulás (mely  $v_{ig}^2/r$  nagyságú), egyensúlyban van az  $M(r)$



5.1. ábra. Az M33 mért és számított forgásgörbéi (forrás: [12])

tömeg által előidézett  $GM(r)/r^2$  nehézségi gyorsulással. Ekkor a galaxis radiális tömegeloszlására  $M(r) = rv_{tg}^2/G$  összefüggést nyerjük. A megfigyelések azt tanúsítják, hogy a galaxis központjától kis távolságra a rotációs sebesség lineárisan nő. Ez összhangban van az elmélettel. Azt várjuk, hogy egy adott távolságon túl a keringési sebesség lecsökken, ugyanis a világító anyag által kibocsátott intenzitás is exponenciálisan csökken. Ezáltal a világító anyag sűrűségére is hasonló radiális eloszlást tételezhetünk fel. Ez a tény egy lecsengő rotációs görbét sugall erre a tartományra. pedig egy Mivel csillagok esetén egy lineáris mennyisége a kifelé anyag elvárásokkal ellentétben nem csökken, A mérések azt tanúsítják, hogy ez az elvárásokkal ellentétben nem cseng le, hanem konstans marad, nagyságrendileg  $v_{tg\infty} = 200\text{km/s}$  értéknél. Ebből egy  $M(r) = rv_{tg\infty}^2/G$  tömegeloszlási profilt kapunk az illető tartományban. A  $v_{tg\infty}$  a rotációs görbe "aszimptotikus sebessége". Azaz: a tömeg lineárisan nő a radiális távolságkoordinátával. A kifelé aszimptotikusan laposodó rotációs görbékből ezt lehet kiolvasni [32], [33], [52].

Az 5.1 ábra az M33 törpegalaxis elméletileg számolt és mért rotációs görbéit hasonlítja össze (forrás.[12]).

## 5.1. A vákuum brán gravitációs egyenletek nemsztatikus, konformisan szimmetrikus általános megoldásai

A brán vákuum gravitációs téregyenletek rendszere alul-determinált. A jól-definiáltság érdekében szükséges még egy összefüggés. Itt a [11] mentén haladunk.

Egy újabb metrikus összefüggés keresése helyett egy másik lehetőség is van. Tételezzük fel, hogy a brán egy tetszőlegesen választott  $\xi$  irány mentén önmagára konformis módon képezhető le. Ez az ötlet elsődlegesen relativisztikus hidrodinamikai meggon-

dolásokból származik [34]. Az ötlet azért hasznos, mert önhasonlóvá teszi a bránt. Ezzel pedig az izotropiát támasztja alá [11]. Az ilyen megoldás az öszenyomhatatlan belső Schwarzschild megoldásnak az általánosítása [34], mely 11 konform-, illetve 4 Killing-szimmetriával rendelkezik [35], [16]. Ekkor fennáll:

$$L_{\xi}g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu,\lambda}\xi^{\lambda} + g_{\lambda\nu}\xi_{,\mu}^{\lambda} + g_{\mu\lambda}\xi_{,\nu}^{\lambda} = \psi g_{\mu\nu} \quad (5.1)$$

A  $\psi$  függvény a konformis leképezés együtthatója, azaz egy skalárfüggvény.

A Maharajah és Maartens [34] által javasolt konformis szimmetria a Minkowski téridő  $t\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) + r\left(\frac{\partial}{\partial r}\right)$  izotrop konformis vektorának általánosítása:

$$\xi = \xi^0(r, t)\partial/\partial t + \xi^1(r, t)\partial/\partial r \quad (5.2)$$

Kikötjük, hogy a  $\psi$  függvény sztatikus [11]:

$$\psi = \psi(r) \quad (5.3)$$

Ha ezt a vektort a (5.1) egyenletbebe helyettesítjük, majd azt megoldjuk, megkapjuk a  $\xi$  alakját:

$$\xi = \frac{1}{2} \frac{k}{B} t \frac{\partial}{\partial t} + \frac{r\psi(r)}{2} \frac{\partial}{\partial r} \quad (5.4)$$

Így a sztatikus vákuum brán metrikus tenzorának együtthatói:

$$\exp(\lambda) = B^2\psi^{-2} \quad (5.5)$$

$$\exp(\nu) = C^2 r^2 \exp\left(-2kB^{-1} \int dr/r\psi\right) \quad (5.6)$$

Ha ezeket a (4.4)-(4.6) gravitációs egyenletekbe behelyettesítjük, azonnal kapjuk a következőket:

$$-\frac{\psi^2}{B^2} \left( \frac{1}{r^2} + \frac{2}{r} \frac{\psi'}{\psi} \right) + \frac{1}{r^2} = 3\alpha U \quad (5.7)$$

$$\frac{\psi^2}{B^2} \left( \frac{3}{r^2} - 2\frac{k}{B} \frac{1}{r^2\psi} \right) - \frac{1}{r^2} = \alpha(U + 2P) \quad (5.8)$$

$$\psi^2 \left( 2\frac{\psi'}{r\psi} - 2\frac{k}{B} \frac{1}{r^2\psi} + \frac{k^2}{B^2} \frac{1}{r^2\psi^2} + \frac{1}{r^2} \right) = a(U - P) \quad (5.9)$$

Elvégezzünk néhány egyszerű műveletet az előbbi egyenletekkel. Nevezetesen: az (4.6) egyenletet megszorozzuk 2-vel, majd hozzáadjuk a (4.5)-t. Végül az így kapott

összefüggést a (4.4) gravitációs téregyenlettel tesszük egyenlővé. Így a következőhöz jutunk:

$$3r\psi\psi' + 3\psi^2 - 3\frac{k}{B}\psi + \frac{k^2}{B^2} - B^2 = 0 \quad (5.10)$$

Ennek megoldása  $k = B^2$  kizárása esetén:

$$r^2 = R_0^2 \frac{F(\psi)}{3\psi^2 - 3\frac{k}{B}\psi + \frac{k^2}{B^2} - B^2} \quad (5.11)$$

Az (5.11) összefüggésben  $R_0$  integrálási állandó,  $F(\psi)$  pedig az alábbi határozott integrál:

$$F(\psi) = \exp\left(-3\frac{k}{B} \int \frac{d\psi}{3\psi^2 - 3\frac{k}{B}\psi + \frac{k^2}{B^2} - B^2}\right) \quad (5.12)$$

Ennek megoldásai három különböző osztályba sorolhatók. Ezeket  $k$  és  $B$  állandók kölcsönös viszonya különböztet meg.  $k$  néhány sajátos értékére a téregyenletek általános megoldása analitikus alakban is előállítható. Így a  $k = B^2$  értékre azonnal adódik az alábbi:

$$\psi = \frac{R_0}{r} \pm B \quad (5.13)$$

Így a megfelelő ívelemet a következő adja:

$$ds^2 = \frac{1}{\left(\frac{R_0}{r} \pm B\right)^2} (-C^2 dt^2 + B^2 dr^2) + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (5.14)$$

Ugyanakkor a sötét sugárzás  $U(r)$  energiasűrűségére illetve a sötét anyag  $P(r)$  nyomására:

$$U(r) = \frac{1}{\alpha R_0^2} \left(\frac{R_0}{r}\right) \quad (5.15)$$

$$P(r) = \frac{2}{\alpha R_0^2} \left(\frac{2R_0}{3r} \pm B\right) \left(\frac{R_0}{r}\right)^3, k = \pm B^2 \quad (5.16)$$

## 5.2. Stabil körpályák keresése a brán konformisan szimmetrikus térídejében

Stabil, idő-szerű sztatikus geodetikus körpályákat keresünk, melyek a brán gömbszimmetrikus sztatikus gravitációs térben találhatóak. A [11] gondolatmenetét és lépéseit követjük.

A (4.3) metrikájú gravitációs térben a próbarészecske pályáját az alábbi Lagrange-egyenlet írja le [37],[11]:

$$2L = \left(\frac{ds}{d\tau}\right)^2 = -e^{\nu(r)} \left(\frac{dt}{d\tau}\right) + e^{\lambda(r)} \left(\frac{dr}{d\tau}\right) + r^2 \left(\frac{d\Omega}{d\tau}\right) \quad (5.17)$$

Itt  $\tau$  a geodetikusok mentén felvett affin paraméter. Mivel idő-szerű esetet tárgyalunk, ezért ebben az esetben  $\tau$  lehet maga az idő.

A Lagrange-egyenlet alapján a részecske megmaradó mennyiségekkel jellemezhető. Ezek az energia:  $E = e^\nu \dot{t}$ , az impulzusmomentum  $\varphi$  koordináta-vonal menti komponense:  $l_\varphi = r^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}$  és a teljes impulzusmomentum

Idő-szerű mozgás esetén a geodetikus pályaeqyenlet:

$$\dot{r}^2 + V(r) = 0 \quad (5.18)$$

A  $V(r)$  potenciál alakja:

$$V(r) = -e^{-\lambda} \left( E^2 e^{-\nu} - \frac{l^2}{r^2} - 1 \right) \quad (5.19)$$

Ha a stabil körmozgást vizsgálunk, a mozgásegyenlet a következő három feltételnek kell eleget tegyen [37]:

- a pálya sugara időben nem változik:  $\dot{r} = 0$  és
- a potenciál alakja a radiális távolság függvényében változatlan, ez a potenciál extrémális pontjára vonatkozó feltétel:  $\partial V / \partial r = 0$
- a potenciál  $r$  szerinti másodrendű deriváltja az extrémális pontjában pozitív, ez a minimum feltétel:  $\partial^2 V / \partial r^2 > 0$

E három feltétel egyidejű teljesülése magával vonja a körpálya stabilitását is. Ezek segítségével az energia és a teljes impulzusmomentum:

$$E^2 = \frac{2e^\nu}{2 - r\nu'}, \quad l^2 = \frac{r^3\nu'}{2 - r\nu'} \quad (5.20)$$

A (4.3) négydimenziós metrika (és az ívelem-négyzet) úgy is felírható, hogy a sebesség térszerű komponenseit fénysebességre normáljuk. Ezt a megfigyelő a forrástól távoli tehetetlenségi rendszerben így tudja mérni [11]:

$$ds^2 = -dt^2(1 - v^2) \quad (5.21)$$

$$v^2 = e^{-\nu} \left[ e^\lambda \left( \frac{dr}{dt} \right)^2 + r^2 \left( \frac{d\Omega}{dt} \right)^2 \right] \quad (5.22)$$

Stabil körpálya esetén  $\dot{r} = \partial r / \partial t = 0$ . A próbatest tangenciális sebessége:

$$v_{tg}^2 = \frac{r^2}{e^\nu} \left( \frac{d\Omega}{dt} \right)^2 \quad (5.23)$$

A megmaradó mennyiségek segítségével ezt átalakítjuk:

$$v_{tg}^2 = \frac{e^\nu}{r^2} \frac{l^2}{E^2} \quad (5.24)$$

A (5.20) összefüggésekkel a következő adódik:

$$v_{tg}^2 = \frac{rv'}{2} \quad (5.25)$$

Ezáltal a próbatest sebessége kizárólagosan az  $e^\nu$  (5.6) alakjának felhasználásával írható fel. Konformisan szimmetrikus, sztatikus, gömbszimmetrikus téridőben történő mozgás esetén a sebesség kifejezése az alábbi lesz:

$$v_{tg}^2 = 1 - \frac{k}{B} \frac{1}{\psi} \quad (5.26)$$

Ez az összefüggés egyszerű alakot ad a  $\psi$  konformis együtthatónak:

$$\psi = \left(\frac{k}{B}\right) \left[ \frac{1}{1 - v_{tg}^2} \right] \quad (5.27)$$

Az  $e^\lambda$  ugyancsak kifejezhető a tangenciális sebesség segítségével [11]:

$$e^\lambda = \frac{B^4}{k^2} (1 - v_{tg}^2) \quad (5.28)$$

A  $v^2$  és  $\psi$  kapcsolatát leíró (5.26) összefüggésnek a következménye, hogy a fizikailag elfogadható tartomány a  $\psi \in [k/B, \infty)$ , mely a sebesség változását 0 és  $c$  fénysebesség közt teszi lehetővé.

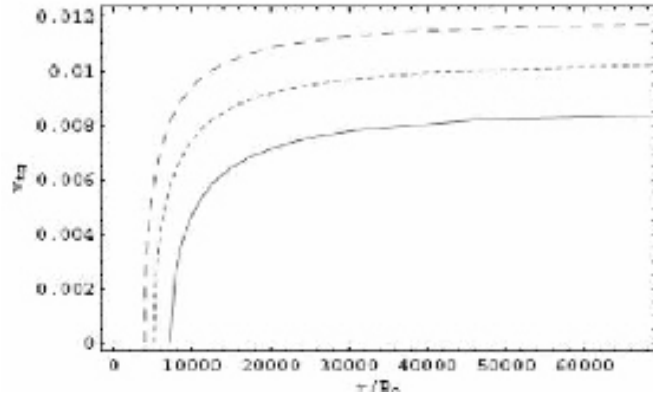
Am a  $k \in (-2B^2, 2B^2)$  tartományban a radiális koordináta végtelen értékénél a  $\psi \rightarrow \psi_1$  vagy  $\psi \rightarrow \psi_2$  konvergencia áll fenn.  $\psi_1$  és  $\psi_2$  a  $\psi$ -nek  $(-2B^2, 2B^2)$  intervallum határainál felvett értékei. Ha  $r \rightarrow \infty$  és  $\psi \rightarrow \psi_1$ , azt látjuk, hogy nagy radiális távolságban stabil körpályán mozgó próbatest (mely konformisan szimmetrikus, gömbszimmetrikus sztatikus vákuum-téridőben mozog) sebessége egy véges, nem-zérus tangenciális sebességhatárhoz tart. Ennek értéke:

$$v_{tg\infty} = \sqrt{1 - \frac{6k}{3k + \sqrt{12B^4 - 3k^2}}} \quad (5.29)$$

Szám példa:  $B = 1.00000034$  és  $k = 0.9999999$  esetén a tangenciális határsebesség értéke:  $v_{tg\infty} \sim 0.00072c \sim 216.3 \text{ km/s}$ , ami a megfigyelt keringési sebességek rendjébe eső érték [11].

Az 5.2. ábra konformisan szimmetrikus brán vákuum-téridőben stabil körpályán mozgó próbatest  $v_{tg}$  sebességét mutatja az  $r/R_0$  paraméter függvényében, ha  $B = 1.00001$  és  $k = 0.9999$  (folytonos vonal),  $k = 0.99985$  (pontozott vonal) és  $k = 0.9998$  (szaggatott vonal) értékekre [11].

A brán konformisan sztatikus gömbszimmetrikus vákuum-téridőjében a tangenciális sebesség radiális koordinátától való függése parametrikus formában adható meg. Itt



5.2. ábra. A keringési sebesség a távolságparaméter függvényében (forrás: [11])

a paraméter maga a  $\psi$ . E modellben azonban a tangenciális sebességet nem lehet analitikus alakban a radiális koordináta függvényeként kifejezni. Az  $r \rightarrow \infty$  esetben  $k$  és  $B$  paraméterek megfelelő értékeit véve az érintőmenti sebességét állandó érték felé tart. Azonban a határsebesség értéke erős függést mutat  $k$  és  $B$  értékétől.

Ennek alkalmazásaként pedig a bránon stabil körpályán mozgó próbatest szögsebességének asszimptotikus viselkedése került terítékre. Eredményül azt kaptuk, hogy a  $\psi$  konformis faktor két alkalmasan választott integrálási állandó segítségével egyértelműen meghatározza a próbatest keringési sebességét. Az integrálási állandók speciális megválasztásával egy egzakt megoldás adódik. Ebben a téridőben szerkesztett stabil időszerű körpálya estén a radiális koordináta minden határon túli növekedésével a keringési sebesség véges, állandó érték felé tart. E viselkedés tipikus a galaxisokon kívül keringő "próbatestek", azaz jelen esetben masszív hidrogénfelhők esetén. **ÍGY A ROTÁCIÓS GÖRBEK VISELKEDÉSE TERMÉSZETES MÓDON MAGYARÁZHATÓ BRÁN MODELLEKBEN.** A galaxisok ugyanis egy olyan módosított gömbszimmetrikus geometriába vannak beágyazva, amelyet az ötdimenziós téridő Weyl-tenzorának nem-zérus elemei generálnak a bránon.

A korrekciók következtében fellépő extra tagok, amelyek a "sötét sugárzási" és a "sötét nyomási" tagokkal írhatók le, egy extragalaktikus "anyageloszlásként" hatnak.

A metrikus együtthatók és a keringési sebességek viselkedése a kapott megoldásokban két tetszőlegesen választott integrálási állandó, a  $k$  és  $B$  értékétől függ. Ezek számértéke azon feltevésből határozható meg, hogy a galaxis határán a (5.28) alakú  $e^\lambda$  metrikus együttható folytonos. Az egyszerűség kedvéért feltehető, hogy a galaxis  $\rho_B$  sűrűségű barionikus anyagának belsejében a bulk Weyl-tenzorának hatásai elhanyagolhatók.



$r_0$ -val definiálva a galaxis határának az galaxis központjától mért távolságát, a sűrűséget a következő megszorításnak vetjük alá:  $\rho_B(r_0) = 0$ .

Ezért a galaxis határán :

$$e^{-\lambda} = 1 - 2GM_B/r_0 \quad (5.30)$$

Itt:

$$M_B = 4\pi \int_0^{r_0} \rho_B(r) r^2 dr \quad (5.31)$$

Az  $e^{(\lambda)}$  folytonossága  $r = r_0$ -nál megkívánja, hogy:

$$1 - \frac{2GM_B}{r_0} = \frac{\psi^2(r_0)}{B^2} = \frac{k^2}{B^4} \frac{1}{[1 - v_{tg}^2(r_0)]} \quad (5.32)$$

Ennek direkt folyománya:

$$\frac{k^2}{B^4} = \left(1 - \frac{2GM_B}{r_0}\right) [1 - v_{tg}^2(r_0)] \quad (5.33)$$

Ezért a (5.32) alapján a  $k^2/B^4$  arány megfigyelési úton meghatározható. Az (5.33)-ban felhasználva a  $v_{tg\infty}$ -re vonatkozó (5.26) összefüggést,  $v_{tg\infty}$  úgy állítható elő, mint a galaxis barionikus tömegének függvénye. Eszerint milliárd naptömegnyi bariontömegű, 70 kpc sugarúra becsült galaxis esetére a keringési határsebességre 287 km/s adódik, amely a rotációs görbék által származtatott értékekkel azonos nagyságrendbe esik.

A (4.4) téregyenlet következtében a galaxison kívüli vákuumban az  $e^{-\lambda}$  metrikus együttható a sötét sugárzási tag függvénye:

$$e^{-\lambda} = 1 - 2GM_U/r \quad (5.34)$$

$$M_U = 3\alpha \int_{r_0}^r U(r) r^2 dr \quad (5.35)$$

Utóbbi az energia-impulzus-tenzor "sötét sugárzás energiasűrűségéhez" társított tömegkomponens.

A  $k^2/B^4$ összefüggést és a konformis szimmetriát felhasználva,  $M_U$  értéke:

$$M_U(r) = \frac{r}{2G} \left\{ 1 - \left(1 - \frac{2GM_B}{r_0}\right) \left[ \frac{1 - v_{tg}^2(r_0)}{1 - v_{tg}^2(r)} \right]^2 \right\} \quad (5.36)$$

Mivel a keringési sebességek és a határsebesség jóval kisebbek 1-nél (azaz  $c$  fénysebességnél), a sötét sugárzási "tömeg" egyszerű skálázási összefüggéssel fejezhető ki:

$$M_U(r) \approx M_B \frac{r}{r_0} \quad (5.37)$$

Ennek alapján  $M_U$  lineárisan nő a radiális távolsággal és egyenesen arányos a galaxis barionikus tömegével. Newtoni határesetben:

$$M_B/r_0 = v_{tg}^2(r_0)/G \quad (5.38)$$

Ebből adódik a következő [11]:

$$M_U(r) \approx \frac{v_{tg}^2(r_0)}{G} r \quad (5.39)$$

Ez pedig a galaxisok forgási görbéje által leírt tömegprofil adja.

## 6. Gravitációs lencsehatás a bránon

A gravitációs lencse jelenségek az elmúlt évtizedben kerültek a kutatás előterébe. Azt is alátámasztva, hogy a sötét anyag nem állhat apró és kompakt objektumokból (MA-CHO, OGLE stb. égfelmérő programok). Ezekben a mérésekben a viszonylag kis tömeg miatt természetesen a gyenge tér közelítését alkalmazták. Jelen esetben brán fekete lyukak esetén ismertetjük ezen objektumok erős tér közelítését és a vele fellépő jelenségeket.

A gravitációs lencsehatás a fotonok erős gravitációs térben való eltérülésén alapszik. Egy nagy tömegeloszlás körül elhaladó párhuzamos "fénnyaláb" ugyanis a tömeg miatt elhajlik. Azaz a tömeg egy gyűjtőlencseként viselkedik. A tömegeloszlást elhagyva az elhajlított nyalábok egymást metszhetik egy (avagy a tömegeloszlás függvényében - akár csak az erős tér közelítés miatt, l. később- több) pontban. Így a fény fluxusa (ill. az intenzitás) is megnő a fókuszban. Megfigyelési szempontból ez annyit jelent, hogy a kiterjedt, de a műszerek érzékenységi küszöbe alatti felületi fényességgel rendelkező fényforrások láthatóvá válnak a megfigyelő számára, ha egy nagy sötét tömeg pontosan a megfigyelő tartózkodási pontjába "fókuszálja" a felületükről kiinduló "fénysugarakat" A fénysugár szót azért tesszük idézőjelbe, mert bár fotonokkal dolgozunk, a geometriai optikai közelítés analogonját használjuk fel. Az észlelésekben sokszor fordul elő objektumok "megkettőzése" vagy éppenséggel megsokszorozása is. Utóbbi eset akkor áll fenn, ha a lencséző objektum tömegeloszlása nem gömbszimmetrikus. Gyakran lehet íveket is észlelni, amelyek eredete szintén erre a jelenségre vezethető vissza. A gravitációs lencsézés történetébe és alkalmazásaiba az érdeklődő olvasó a [47] által nyerhet alapos betekintést.

A dolgozat záró fejezetében a gravitációs lencsehatást vizsgáljuk a bránon. Az ÁRE esetéhez viszonyítva itt is adódnak különbségek. Az erős lencsézésre koncentrálunk, bár a gyenge lencsézés irodalma is folyamatosan gyarapodik. Rövid elméletei bevezető után az árapály töltésű brán fekete lyukra vonatkozó lencsézés paramétereire jutunk el. A számítási részleteket ott mellőzzük. Ezt követően pedig egy érdekes lehetőséget vizsgálunk, amely egy, a brán-elmélet segítségével származtatott "galaktikus potenciál"

esetében vizsgálja a lencsézést, erős tér közelítésben.

## 6.1. A gravitációs lencsézés elmélete

A gravitációs lencsehatás a megfigyelő kozmológia kedvelt módszere. A gravitációs tér erősségének függvényében két különböző lencsézési jelenségről beszélhetünk. A gravitációs lencsehatás alatt általában a gyenge lencsézést értjük. Ennek az az oka, hogy ez a jelenség sokkal egyszerűbben mutatható ki. A másik fajta lencsézési jelenség az erős lencsézés. Gyakorlati jelentőséggel egyelőre csak az előbbi bír, mivel az erős lencsézésről még nincs megfigyelési bizonyíték [55]. Ennek mérés-technikai oka van, ami a lencsézés jellegzetességeinek ismeretében nem belátható.

A kisszögű elhajlás a gyenge, míg a nagyszögű az erős lencsézésre jellemző. A gravitációs egyenletek szempontjából a gyenge és az erős lencsézés közti különbséget abban áll, hogy gyenge vagy erős tér közelítést alkalmazunk a téregyenletekre. Gyenge lencsézés esetén pl. Schwarzschild fekete lyuk esetén az  $\alpha$  elhajlási szög, a lencséző objektum  $M$  tömege és a  $b$  ütközési paraméter közt az alábbi áll fenn [9]:

$$\alpha = \frac{4GM}{c^2 b} = \frac{2R_S}{b}$$

Az erős lencsézés esetében a fénysugár az eseményhorizont közelében halad el. Ebből kifolyólag az ütközési paraméterre van egy minimális érték, amelynél kisebb távolságnál a foton már az eseményhorizonton belül kerül. Ennek értéke függ a lencséző objektum körüli téridő szerkezetétől. Ezáltal pedig a metrikától is. A lencsézés tehát értékes információkat hordozhat a metrikáról.

A gyenge lencsézés geometriáját a 6.1 ábrán láthatjuk (forrás [50]).

A gravitációs lencse egyenlete az ábra alapján [52],[50]:

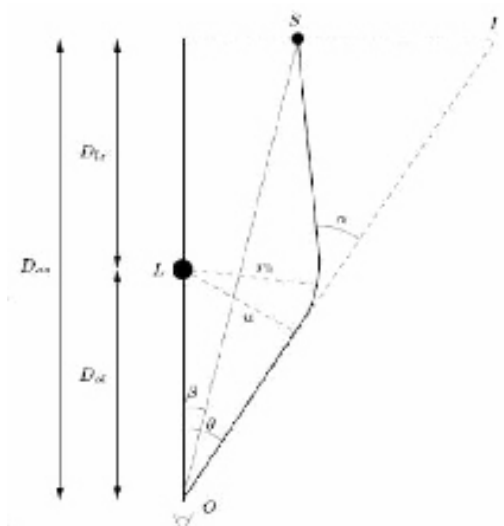
$$\tan \beta = \tan \theta - \frac{D_{lf}}{D_{mf}} [\tan \theta - \tan(\theta - \alpha)] \quad (6.1)$$

Ha (6.1) összefüggésben  $\beta = 0$  szöget választjuk, az Einstein-szögre:

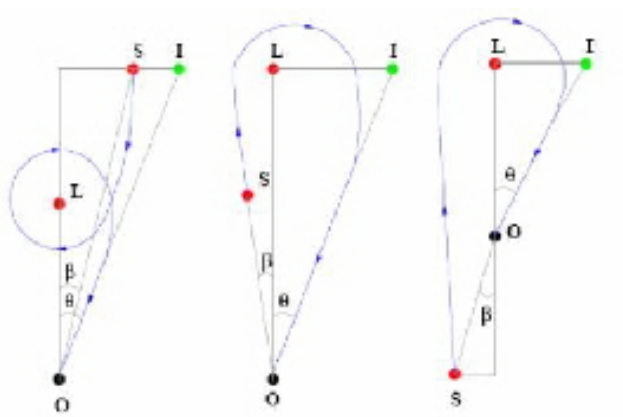
$$\theta_E = \sqrt{\frac{4GM}{c^2} \frac{D_{lf}}{D_{mf} D_{ml}}} \quad (6.2)$$

A  $c^2$  csak a "rend kedvéért" foglal helyet a fenti formulában, ugyanis a dolgozatban mindvégig a  $c = 1$  konvenciót alkalmaztuk.

Az, hogy erős vagy gyenge lencsézésről beszélhetünk (ill. erős vagy gyenge tér közelítést alkalmazunk), a  $\beta$  szög és a  $\theta_E$  viszonyának függvénye. Ha ugyanis a  $\beta < \theta_E$ , akkor erős, míg ellenkező esetben gyenge lencsézésről beszélhetünk.



6.1. ábra. A gyenge lencsésítéshez geometriája (forrás: [50]).



6.2. ábra. Az erős lencsésítés különböző esetei (forrás: [58]).

A dolgozat ezen részében a bránon fellépő erős lencsésési jelenségek részleteire világítunk rá. A bránon fellépő gyenge lencsésését árapály töltésű fekete lyuk esetén többek közt a [49] és a [48] tárgyalja. Mindkét publikáció perturbációs módszert alkalmaz a jelenség vizsgálatára. A lencséző objektumok a brán árapály töltésű fekete lyukai, csupasz szingularitásai vagy csillagai. Belátható, hogy a pozitív árapály töltés esetén az eltérítési szög kisebb, mint a Schwazschild fekete lyuk esetében. Lencsésés szempontjából ez a helyzet teljesen azonos a negatív elektromos töltésű Reissner-Nordström fekete lyuk esetével [48].

Az erős lencsésítés különböző eseteit a 6.2.ábra vázolja fel (forrás:[57], [58]).

Azt láthatjuk, hogy az eltérítési szög nagy. Ebből kifolyólag már nem szükséges, hogy a forrás a lencséző objektum ellentétes oldalán helyezkedjen el, ugyanis a fénysugarak vissza is fordulhatnak a nagy elhajlási szög miatt.

Amint az előző fejezetben láthattuk, a fekete lyuk megoldások a bránon esetében két

nagy csoportra oszthatók: olyan megoldásokra, melyek a Weyl-tenzor brán-projekciójának nemlokális hatását tartalmazzák [38], illetve olyanokra, ahol ez a hatás a bránon eltűnik [40]. Ha ezeknek a fekete lyukaknak a gravitációs lencse hatását vizsgáljuk, az derül ki, hogy a gravitációs egyenletek erős tér közelítésben vett megoldásaiban lényeges eltérések adódnak a Schwarzschild fekete lyuk esetéhez képest [50],[53].

Az ívhosszat kissé általánosabb alakban írjuk fel:

$$ds^2 = -e^{\nu(r)} dt^2 + e^{\lambda(r)} dr^2 + C^2(r) d\Omega^2 \quad (6.3)$$

Összevetve ezt a (4.3) metrikával, azt találjuk, hogy ott a  $C(r)$  helyére automatikusan  $r$  került. Ám az a választás nem mindig a leghasznosabb, mégha a relativitás elméletében be is válik. Oka, hogy semmi biztosítékunk nincs arra nézve, hogy az háromdimenziós egységömb felülete (melyet  $r$  növelésével természetes módon  $r^2$  szerint monoton módon növelünk), az extra dimenziók jelenlétében valóban monoton módon növekedne [51]. Ezt alátámasztandó, a  $C(r)$  függvény kétszeres deriváltjára a következő adódik [50]:

$$\frac{C'''}{C} = \frac{e^\lambda}{2} (G_t^t - G_r^r) - 2 \frac{C'}{C} (\lambda' - \nu')$$

Tehát az egységömb felületének a radiális koordinátával való monoton növekedése nagy mértékben függ a második zárójelben lévő kifejezéstől [50]. Ugyanis vannak olyan esetek, amikor nem a monoton növekedés helyzete áll fenn, erre a [51] példával is szolgál. Ezek az ún. brán féreglyukak.

A (fényszerű-) null-geodetikusok egyenlete alapján a lencséző objektum közelében elhaladó fény nyaláb  $\phi$  eltérési szögének  $r$  radiális távolság-koordinátától való függését az alábbi összefüggés írja le [37],[9],[50]:

$$\frac{d\phi}{dr} = \frac{e^\lambda}{C \sqrt{\frac{C^2}{u^2 e^\nu} - 1}} \quad (6.4)$$

Az  $u_0 = C_0 / e^{\nu(r_0)/2}$  az ütközési paraméter. A zérus index azt a legkisebb távolságot jelöli, amennyire a lencse még megközelíthető. Az elhajlási szög a (6.4) segítségével meghatározható meg:

$$\alpha(r_0) = \int_{r_0}^{\infty} 2 \frac{d\phi}{dr} dr - \pi \quad (6.5)$$

Az ütközési paraméter csökkenésével az eltérítési szög nő. Így bizonyos ponton túl az eltérítési szög a  $2\pi$  szöget meghaladja, és mielőtt továbbhalad, egy teljes hurkot ír le a lencse körül. Ezek a sugarak ún. "relativisztikus képeket" hoznak létre. Elméletileg végtelen számú relativisztikus kép keletkezhet a lencse mindkét oldalán. A fekete

lyukat egy fotongömb jellemzi, melynek sugara  $r_p$  [54],[55]. Ez a sugárérték az alábbi egyenlőség legnagyobb pozitív megoldásaként állítható elő [50]:

$$\nu' = \frac{C''(r)}{C(r)}$$

Ez az összefüggés a foton fekete lyuk körüli keringésének stabilitásáról hordoz információt. A foton pályája instabillá válik az  $r_0 \rightarrow r_p$  (azaz  $u_0 \rightarrow u_p = C_p/e^\nu(p)$ ) határátmenetnél. Ha pedig  $r_0 < r_p$ , a foton behull a fekete lyukba, ugyanis az eltérítési szög ennél az értéknél divergál. Kimutatható, hogy ilyen alakú gömbszimmetrikus metrikák esetén az  $r_p$  határ közelében az eltérítési szög, illetve ezzel egyenértékűen a kép  $\theta = u/D_{ml}$  szöggel megadott helyzete egy sorfejtés eredményeként állíthatók elő [50],[53],[57]:

$$\begin{aligned}\alpha(r_0) &= a \ln \left( \frac{r_0}{r_p} - 1 \right) + b + o(r_0 - r_p) \\ \alpha(\theta) &= \bar{a} \ln \left( \frac{\theta D_{ml}}{u_p} - 1 \right) + \bar{b} + o(u - u_p)\end{aligned}$$

Ez egyébként formálisan a (6.4) integrálása által is, a megfelelő közelítést alkalmazva hasonló alakban fejezhető ki. Az  $a, b, \bar{a}, \bar{b}$  együtthatók az erős tér jellemző együtthatói, amelyek a metrikus együtthatóknak az  $r_p$ -ben felvett értékitől függenek. Tehát ezek, valamint a foton gömbök sugara tesznek különbséget a különböző típusú fekete lyukak lencsézése közt. Itt rögtön ráláthatunk az erős lencsézés leglényegesebb vonására: a képek erősen kicsinyítettek. Ugyanis az  $\alpha(r_0)$  mennyiség egy kis érték. Ez az erős tér együtthatóiról is igaz.

A különböző fekete lyukak esetén különböző metrikus együtthatók jellemzik a gravitációs teret. Ez az előzőek alapján ahhoz vezet, hogy az eltérítési szögek kifejezése eltér a két esetben. Ennek oka, hogy a fotongömbök sugara is eltérőek. Nemlokális hatások nélküli fekete lyuk fotongömbjének sugara:

$$r_p = \frac{1}{4} \left( 1 + 4r_h + \sqrt{1 + 4r_h + 16r_h^2} \right)$$

Az  $r_h$  paraméter a horizont sugara.

Ha a nemlokális hatásokat figyelembe vesszük, a metrika az "árapály-töltésű" brán fekete lyuk metrikája lesz. Felhasználva a "töltés"  $q = Q/(2GM)^2$  paraméterét, a foton gömb sugara:

$$r_p = \frac{1}{4} \left( 3 + \sqrt{9 - 32q} \right)$$

Ez a megoldás természetes módon negatív töltésparaméterre is alkalmazható. Így a primordiális fekete lyukakra is.

Ha a gyenge térből származó képekhez hasonlítjuk az erős térben lencsézett képeket, azt találjuk, hogy ezek erőteljesen kicsinyítettek a gyenge tér képeihez viszonyítva, és akkor a legerősebbek, ha a forrás, a lencse és a megfigyelő kollinearisan helyezkednek el. Ez azt is jelenti egyben, hogy jelen konfigurációban az a sugár amely  $n$ -szer megkerüli a lencsét, és ez után ér el a megfigyelőhöz,  $2\pi n$  szöghöz nagyon közeli eltérítést szenvedett. A legegyszerűbb esetben a leginkább kívüleső,  $\theta_1$  kép különböztethető meg a többitől. A többiek egybeolvadnak és a  $\theta_\infty = u_p/D$  szöggel eltérített képet alkotják. Ekkor definiálható a legkülső kép és az egybeolvadt többi kép  $s = \theta_1 - \theta_\infty$  térbeli szeparációja. Az  $n$ -dik relativisztikus kép esetén értelmezhető a kép  $\mu_n$  nagyítása is, amely geometriai úton is könnyen meghatározható, ha a  $\theta_n$  szögre értelmezzük. Ugyancsak itt értelmezzük a külső kép és az összes, összeolvadt kép fényfluxusának arányát is. Ezen mennyiségek [50],[53]:

$$\begin{aligned}\theta_n &= \theta_n^0 + \frac{u_p e_n (\beta + \theta_n^0)}{\bar{a} \beta D_{ls} D_{ol}} \\ \theta_n^0 &= \frac{u_p}{D_{ol}} (1 + e_n) \\ e_n &= e^{(\bar{b} - 2\pi n)/\bar{a}} \\ \mu_n &= \frac{\theta}{\beta} \frac{d\beta}{d\theta} \\ f &= \frac{\mu_1}{\sum_{n=2}^{\infty} \mu_n}\end{aligned}$$

Példaként vizsgáljuk meg a Galaxis közepén lévő fekete lyukat. A Tejútrendszer központjában a számítások alapján egy  $M = 2.8 \times 10^6$  naptömegű fekete lyuk található. Ha mérési adatok lennének ennek a  $\theta_\infty$  adatairól, akkor elvileg eldönthető lenne, hogy Schwarzschild vagy más geometriájú-e a téridő [50],[53],[56]. Elvileg ugyanis legkönnyebben ez a mennyiség mérhető ki. Ha a központi fekete lyuk Schwarzschild, akkor  $\theta_\infty$  értéke  $16.87 \mu as$ . Ha ez egy nemlokális hatás nélküli fekete lyuk, amely pl.  $r_h = 0.1$ , ugyanez a mennyiség  $13.24 \mu as$ , míg  $q = -0.2$  töltésparaméterű "árapály töltésű" fekete lyukra  $18.85 \mu as$  adódna [50].

## 6.2. Erős lencsézés árapály töltésű brán fekete lyuk esetén

Az előző alfejezet eredményei azonnal gyakorlatba ültethetők árapály töltésű brán fekete lyuk esetén. A metrika jelen esetben a [38]-ban származtatott metrika. A jelölések ugyanazok, mint a 4.2. fejezetben.

$$ds^2 = - \left( 1 - \frac{2M}{M_P^2 r} + \frac{Q}{r^2} \right) dt^2 + \left( 1 - \frac{2M}{M_P^2 r} + \frac{Q}{r^2} \right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2$$

Amint már említettük, ez alakra megegyezik a Reissner-Nordström-féle megoldással. Lényeges eltérés azonban, hogy a  $Q$  értéke negatív. A metrikából a fotongömb sugara

meghatározható. Azzal pedig rendre az erős tér  $a, b, \bar{a}, \bar{b}$  együtthatói is. Így a megfelelő mennyiségek [56]:

$$\begin{aligned}
r_p &= \frac{1}{4} \left( 3 + \sqrt{9 - 32q} \right) \\
u_m &= \frac{(3 + \sqrt{9 - 32q})}{4\sqrt{2}\sqrt{3 - 8Q + \sqrt{9 - 32Q^2}}} \\
\bar{a} &= \frac{r_p \sqrt{r_p - 2Q}}{\sqrt{(3 - r_p)r_p^2 - 9Qr_p + 8Q^2}} \\
\bar{b} &= -\pi + 2 \log \left[ 6(2 - \sqrt{3}) \right] + \frac{8Q (\sqrt{3} - 4 + \log [6(2 - \sqrt{3})])}{9} \\
&\quad + \frac{(r_p - Q)^2 [(3 - r_p)r_p^2 - 9Qr_p + 8Q^2] \bar{a} \log 2}{(r_p - 2Q)^3 (r_p^2 - r_p - Q)} \tag{6.6}
\end{aligned}$$

A távolságot Schwarzschild-sugár értékekben adtuk meg, ennek értéke  $r_S = 2M/M_P^2$ . Az  $u_m$  mennyiség a minimális ütközési paraméter, melyet az  $u_0 = D_d \theta_\infty$  összefüggéssel is definiálhatunk [56], [53].

### 6.3. A fény eltérülése "galaktikus potenciálokban"

Spirálgalaxisok esetében a galaxis belsejében uralkodó gravitációs tér alakját a rotációs görbék segítségével kapjuk meg. Ezek az ún. galaktikus potenciálok [59], [60]. Ennek érdekében vissza kell térnünk a galaktikus rotációs görbéket ismertető fejezethez A metrikánk (4.3), a  $C = r$  kikötéssel. A (4.4), (4.5) és (4.6) egyenletek alakja annyiban különböző, hogy jobb oldalukon megjelenik a kozmológiai állandó is. Ugyanis jelen esetben a vákuum bránon a nemlokális hatások mellett a kozmológiai állandót is figyelembe vesszük Ezért a brán Einstein egyenlete:

$$R_{ij} = \Lambda g_{ij} - E_{ij}$$

Ha a (5.25) összefüggést állandóvá téve, a benne szereplő metrikus együtthatót azonnal meghatározhatjuk. Ennek ismeretében, valamint a (4.4), (4.5) és (4.6) egyenletek



lineáris kombinációjával meghatározható az  $e^{-\lambda}$  metrikus együttható is [61]:

$$\begin{aligned}
e^{-\lambda} &= \frac{1}{(v_{tg} + 2)\alpha} + C_2 r^{-2\alpha} - \frac{2\Lambda}{(v_{tg} + 2)(\alpha + 1)} \\
e^{\nu} &= \left(\frac{r}{R_b}\right)^{2v_{tg}^2} \\
\alpha &= \frac{v_{tg}^2(v_{tg}^2 + 1) + 1}{v_{tg}^2 + 2} \\
R_b &= r_0 \left(1 - \frac{2GM_B}{r_0}\right)^{v_{tg}^{-2}/2} \\
C_2 &= \frac{r_0^{2\alpha}}{v_{tg}^2 + 2} \left[ \left(1 - \frac{2GM_B}{r_0}\right) (v_{tg}^2 + 2) - \frac{1}{\alpha} + \frac{2\Lambda}{\alpha + 1} \right]
\end{aligned} \tag{6.7}$$

Ezáltal eljutottunk ahhoz a metrikához, amely a brán kozmológiájában a galaktikus forgásgörbék gerjesztő potenciál alakját megadja. A metrikus együtthatók ismeretében a gravitációs lencsézést is tárgyalhatjuk.

Az eltérítési szög nagysága:

$$\phi(r_0) - \phi_{\infty} = \int_{r_0}^{\infty} e^{\lambda(r)/2} \left[ e^{\nu(r_0) - \nu(r)} \left(\frac{r}{r_0}\right) - 1 \right]^{-1/2} \frac{dr}{r}$$

Az  $\eta = r/r_0$  jelölés bevezetésével:

$$\phi(r_0) - \phi_{\infty} = \int_1^{\infty} \frac{\sqrt{v_{tg}^2 + 2} \eta^{-1} \left[ \eta^{2(1-v_{tg}^2)} - 1 \right]^{-1/2} d\eta}{\sqrt{\left\{ \frac{1}{\alpha} - \eta^{-2} \left[ \left(1 - \frac{2GM_B}{r_0}\right) (v_{tg}^2 + 2) - \frac{1}{\alpha} + \frac{2\Lambda}{\alpha+1} r_0^2 \right] - \frac{2\Lambda}{\alpha+1} r_0^2 \eta^2 \right\}}}$$

Az erős gravitációs lencsézés jelentőségét az adja, hogy ennek méréséből eldönthető, hogy a Világegyetem leírására melyik gravitáció modell alkalmas. Ugyanis a brán fekete lyukak, amint ezt láthattuk, eltérő metrikájúak, mint a standard négydimenziós rokonaik. Geometriájuk ugyanis az extra dimenzió jegyeit hordozza. Ez a tény pedig explicit módon megnyilvánulna a lencsézési jelenségekben is [56].

## 7. Összefoglalás

Jelen dolgozat a brán-világok bemutatását tűzte ki célul, az elméleti háttér ismertetésével és alkalmazásokon keresztül. Az elméletet igyekeztünk technikailag is követhetővé tenni az olvasó számára. Az alkalmazások során pedig azt szeretttük volna demonstrálni, hogy az ÁRE és a kozmológiai problémák ezzel az elméleten keresztül is vizsgálhatók. Mivel a brán-elmélet formalizmusa alapján az általános relativitás elméletéhez közel áll, ezért az ÁRE ismeretek a brán-világokban is hasznosnak bizonyulnak.

A bránok napjaink modern és összetett elméletének, a szuperhúr-elméletnek elemei, egy magasabb dimenziójú téridő hiperfelületei, amelyekre az anyag "ráfeszül". Legegyszerűbb változatában az Univerzum az ötdimenziós téridő négydimenziós hiperfelületeként jelenik meg. Ezen a hiperfelületen van jelen a minket körülvevő Világegyetem összes szimmetriája. Így a bránon a kozmológiai elvnek érvényesülnie kell.

A bulk téridőben az ötdimenziós Einstein-egyenlet írja le a téridő szerkezetét. Az ötdimenziós Einstein-egyenlet brán-projekciói egy módosított (effektív) négydimenziós Einstein-egyenletet. Alacsony energiák esetén visszakapjuk a szokásos ÁRE-beli alakját.

Mivel nem ismert általános megoldás, a relativitás elméletében a gravitációs tér-egyenleteket különböző egyszerűsítések mellett vizsgálják. A szinguláris megoldások a fekete lyukak körül írják le a téridőt. A homogén és izotrop megoldások a Világegyetem nagyléptékű struktúráját hívatottak leírni. Ezek a kozmológiai megoldások. Jogosan vetődik fel az a kérdés is, hogy léteznek-e a bránon érvényes effektív Einstein-egyenletnek is hasonló megoldásai? Az ÁRE és a brán megoldások közti hasonlóságok és eltérések vizsgálata értelmes feladat..

A kozmológiai megoldásban a bránt egyszerű módon a FLRW téridővel azonosítjuk. Az így kapott Friedmann-bránok különböző típusú bulk téridőkbe beágyazhatók. Egy ilyen eljárás azonban feltételezi a bulk téridő ismeretét. Viszont nem ismerünk olyan eljárást, amelynek alapján a Friedmann-brán dinamikájából kiindulva meghatározható a bulk metrikája. A [19]-ban található egy erre vonatkozó algoritmus, amely tetszőleges Friedmann brán ismeretében a beágyazáshoz szükséges egyenletekig visz. A dolgozatban egy egyszerű tükörszimmetrikus beágyazás egyenletei is megtalálhatók.

Alkalmazásként megvizsgáltuk egy sík, kozmológiai állandóval ellátott brán esetét. Célunk a luminozitási távolság-vöröseltolódás reláció felállítása volt bránok esetében. A radiális koordináta általános megoldása kivisz az analitikus függvények halmazából. Ha mégis ragaszkodunk az analitikus megoldáshoz, akkor néhány feltételnek eleget kell tenni. Ezen feltételek azonban váratlan következményekkel járnak: a kozmológiai állandóra két megoldás adódik. Mindkét esetben a brán-feszültség értéke a vártnál lényegesen kisebb. A vizsgált játék-modellben. a  $d_L - z$  reláció kisebb meredekségű, mint a kozmológiai állandót tartalmazó sík Univerzum esetében.

Az ÁRE fekete lyukaira jónéhány megoldás ismeretes, ezek kiválóan tanulmányozhatók pl. [37], [9] ill.[10] segítségével. A brán fekete lyukak esetén kicsit problémásabb a helyzet. Ugyanis pl. vákuum brán esetére találunk egy olyan megoldást, mely kizárólag a bulk téridő Weyl-görbületétől függ.. Ez az "árapály töltésű" fekete

lyuk megoldás. Nevét onnan kapta, hogy azonos alakot ölt, mint az ÁRE Reissner-Nordström megoldása. Utóbbi egy elektromos töltéssel rendelkező sztatikus és gömb-szimmetrikus fekete lyukat ír le. Az "árapály töltésű" fekete lyuk megoldás esetén ugyan nem beszélhetünk elektromos töltésről, ám a megoldás hasonló alakja miatt az extra dimenzió hatását egy ún. árapály töltéssel jellemezzük. Ennek a téridőnek az a legnagyobb hibája, hogy nem adja vissza a (1.1) potenciálban szereplő  $1/r^3$ -et, hanem csak egy  $1/r^2$ -es korrekciót ad a newtoni potenciálhoz [38]. Ennek a megoldásnak az a vonzó tulajdonsága, hogy lehetővé teszi zérus kezdeti tömegű ún. primordiális fekete lyukak létezését. A bulk téridő nemlokális hatásai miatt alakul(nak) ki az eseményhorizont(ok). Felmerült annak a lehetősége, hogy a primordiális fekete lyukak alkalmasak lennének a sötét anyag problémájának megoldására [27]. Ezt azonban a gravitációs mikrolencsézési események megcáfolták.

Egy másik fekete lyuk megoldás az ún. fekete húr megoldás. Ez nem más, mint az ÁRE legegyszerűbb fekete lyuk megoldásának, a Schwarzschild-féle fekete lyuknak az ötdimenziós kiterjesztése. Úgy képzelhető el, mint Schwarzschild-féle fekete lyukak sokasága, az extra dimenzió mentén egy fonálra felfűzve. Azonban ennek eseményhorizontja az extra dimenzió irányában nem zárul be. Ennek következményeként a gravitonok szabadon áramolhatnak át az extra dimenzióba. Ezen okból a fekete húr a radiális perturbációkra instabil. Ha ezt a fűzért "letörjük" az extra dimenzió mentén, az eseményhorizont bezáródik. Ez a megoldás a fekete szivar.

A FLRW kozmológiai brán sztatikusan beágyazható egy bonyolult kozmológiai bulk-ba [21], vagy elképzelhető úgy is, hogy mozog egy Schwarzschild-Anti de Sitter 5D téridőben [24], [25]. Kimutatták, hogy a két felfogás egyenértékű [23].

Érdemes megvizsgálni, hogy az elmélet lehetővé teszi-e inhomogén kozmológiai bránok létezését? Azaz létrejöhet-e olyan stabil konfiguráció, amelyben a fekete lyukak egyensúlyban vannak a Friedmann bránt kitöltő kozmológiai fluidummal. Erre a válasz igenlő, ugyanis ez a konfiguráció nem akadályozza a kozmológiai brán a tágulását. Ez az ún. brán "ementáli sajt" megoldás. Ezt a nevet az indokolja, hogy az eredeti modellben az egyenletes sűrűségű kozmológiai fluidumban a fekete lyukak úgy ágyazódnak be, mint a lyukak az ementáli sajtban.

A dolgozatban a két megoldáscsoport kozmológiai alkalmazásait is tanulmányozzuk. A galaktikus rotációs görbék vizsgálata a kozmológiában a sötét anyag problémájához vezetett. Ha azonban egy olyan a bránon vizsgáljuk a rotációs görbéket, amely önmagába konformisan leképezhető és amelyen a nemlokális hatások dominálnak, egy szerencsés paraméter választással olyan eredményhez jutunk, mely nemcsak a forgás-

görbék alakját, hanem a keringési határsebességek értékeit is helyesen adja vissza. Így ebben az esetben mellőzhető a sötét anyag fogalma. Nyilvánvaló módon nem ez a legelfogadottabb magyarázat a sötétanyag problémájára, ugyanis nagyon erős nemlokális hatásokat kellene mindennapjainkban is érzékelni ill. mérni.

A fekete lyukak (akárcsak a többi nagytömegű objektum) fontos tulajdonsága a fénysugarak elhajlása. Ezen alapszik a gravitációs lencsehatás is. A lencsézés jelensége a téridő metrikájának egyik indikátora. Azonos tömegű, de különböző típusú fekete lyukak ugyanis különböző mértékben térítik el a fénysugarakat. A brán fekete lyukai által jellemezhető téridők szerkezetéről is hasonlóan szerezhetünk információt. Itt azonban az erős lencsézés sokkal alkalmasabb erre. Az erős lencsézés a fénysugarak erős térben való eltérülését írja le. Itt a fénysugár ugyanis nagyszögű eltérítést szenved. Ezáltal a jelenség lényegesen eltér a gyenge tér esetétől. A képek kicsinyítettek, mindössze néhány mikroívmásodpercesek. Ez indokolja, hogy még miért nem észlelték ezt a jelenséget, ugyanis a legjobb felbontású optikai űreszközök is csak milliívmásodperces felbontással rendelkeznek.

A dolgozatban bemutattuk a szakirodalomban fellelhető eredményeket..A legalapvetőbb vonások és a legfontosabb alkalmazások ismertetése mellett néhány saját eredményt is ismertettünk. Így megvizsgáltuk a kozmológiai sík vákuum brán játékmódeljét, illetve felírtuk a Friedmann-bránok beágyazási egyenleteit. Az utóbbi ismert brán-megoldások bulkba történő beágyazásában fontos..

## 8. Köszönetnyilvánítás

**1. Köszönetnyilvánítás.** *Sok hálával és köszönettel tartozom témavezetőmnek, dr.Gergely Árpád Lászlónak, a sok hasznos tanácsért, javaslatért és észrevételért valamint a munkámra szánt idejéért és nem utolsó sorban az ezalatt mindvégig tanúsított türelméért. Ugyanakkor hálával tartozom Keresztes Zoltán illetve Mikóczy Balázs PhD hallgatóknak, akik az SzTE TTK Kísérleti Fizika Tanszékén folytatják tanulmányaikat. Mindannyiuknak szívből köszönöm, hogy a munkám során bármilyen felmerülő technikai nehézségek alkalmával nagy segítőkészséget tanúsítottak, elfoglaltságuktól függetlenül. Természetesen szerető és szeretett Családomnak is a legnagyobb szeretet és megbecsülés jár. Márcsak azért is, hogy ennyi éven keresztül szeretettel és rendületlenül támogattak, erkölcsileg és anyagilag egyaránt ...*

*Jelen dolgozatot szeretném egykori tanárom és jó ismerősöm, Sebestyén Árpád emlékének ajánlani, aki szakmailag és emberileg is kiváló egyéniség volt, és aki sokat segített*

abban, hogy eddig a pontig is eljutottam. Hálával és sok szeretettel emlékezem nagynénémre, Rákosi Máriára is, aki ugyancsak sokat biztatott és bátorított, hogy ne adjam fel ezt a gyerekkori álmom.

## 9. Irodalom

### Hivatkozások

- [1] J. Polchinski, *String Theory*, Vol.1&2
- [2] P. Horava, E. Witten, *Nucl. Phys.* **B460**, 506
- [3] L. Randall, R. Sundrum, *Phys. Rev. Lett.* **83**, 3370-3373 (1999)
- [4] L. Randall, R. Sundrum, *Phys. Rev. Lett.* **83** 4690-4693 (1999)
- [5] J. Garriga, T. Tanaka, *Phys.Rev.Lett.* **84** (2000) 2778-2781
- [6] H. F. M.Goenner, *Living Rev. Rel*, **7** (2004) 2
- [7] N. Arkani-Hamed, S. Dimopoulos, G. Dvali, *Phys.Lett.* **B429** (1998) 263-272
- [8] M. Cavaglia, *Int.J.Mod.Phys.* **A18** (2003) 1843-1882
- [9] S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology*, John Wiley & Sons, 1972
- [10] C. Misner, K.S. Thorne, J.A. Wheeler, *Gravitation*, WH Freeman and Co. Publishers, 1973
- [11] M.K. Mak, T. Harko, *Phys. Rev.* **D70** (2004) 024010, gr-qc/0404104 (2004).
- [12] L. Bergström, *Rept. Prog. Phys.***63** (2000) 793, hep-ph/0002126 (2000)
- [13] T. Shiromizu, K. Maeda, M. Sasaki, *Phys. Rev.* **D62** 024012 (2000)
- [14] R. M. Wald, *General Relativity*, University of Chicago Press, 1984
- [15] S.W. Hawking and G. F. R. Ellis, *The Large Scale Structure of Space-time*, Cambridge University Press, Cambridge, 1973
- [16] R. Maartens, *Living Rev. Rel*, **7** (2004) 7, 1-99, gr-qc/0312059 (2004).
- [17] C. Lanczos, *Ann. der Phys.* **74**, 518 (1924), *Phys.Zeits.*,23, 539 (1922)

- [18] W. Israel, *Nouvo Cimento* **B XLIV B**, 4349 (1966)
- [19] L. Á. Gergely, *Phys. Rev.* **D68** (2003) 124011, gr-qc/0308072 (2003)
- [20] T. Harko, M.K. Mak, *Phys.Rev.* **D69** (2004) 064020
- [21] P. Binétruy, C. Deffayet, U. Ellwanger, D. Langlois, *Phys.Lett.* **B477** (2000) 285-291
- [22] P. Binétruy, C. Deffayet, D. Langlois, *Nucl.Phys.* **B565** (2000) 269-287
- [23] S. Mukohyama, T. Shiromizu, K. Maeda, *Phys.Rev.* **D62** (2000) 024028; Erratum-  
ibid. **D63** (2001) 029901
- [24] P. Kraus, *J. High Energy Phys.* **9912**, 011 (1999)
- [25] D. Ida, *J. High Energy Phys.* **0009**, 014 (2000); gr-qc/9912002
- [26] T. Padmanabhan, *Theoretical Astrophysics, Vol. 3*, Cambridge University Press, 2002
- [27] A. Liddle, *Intoduction to Cosmology*, John Wiley & Sons, 2003
- [28] Z. Keresztes, B. Nagy, Gy. M. Szabó, L.Á. Gergely, előkészületben
- [29] B. Nagy, Z. Keresztes, *Publ.Astron.Dep.Eotvos Univ.* **17** (2006)
- [30] V. Sahni, A. Starobinsky, *Int.J.Mod.Phys.* **D9** (2000) 373-444, astro-ph/9904398
- [31] V. Sahni, Y. Shtanov, *JCAP* **0311** (2003) 014
- [32] S.Blais-Oullette, C. Carignan, *Galaxy Dynamics (Rutgers 08/98) ASP conference Series*, astro-ph/9811142 (1998)
- [33] E.Corbelli, P. Salucci, *MNRAS*, astro-ph/9909252 (1999)
- [34] R. Maartens, M.S. Maharaj, *J. Math. Phys* **31** 151 (1990)
- [35] L. Herrera, J. Jimenez, L. Leal, J. Ponce de Leon, M. Esculpi, V. Galina, *J. Math. Phys.* **27**, 3274 (1984)
- [36] K. Lake, *Phys. Rev. Lett.* **92** (2004) 051101, gr-qc/0302067 (2003)
- [37] S. Chandrasekhar: *The Mathematical Theory of Black Holes*, Clarendon Press, Oxford (1998)

- [38] N. Dadhich, R. Maartens, P. Papadopoulos, V. Rezanian: Black Holes on the Brane, Physics Letters **B 487**, 1-6 (2000)
- [39] T. Harko, M.K. Mak, Phys. Rev. **D69**, 064020 (2004)
- [40] A. Chamblin, S.W. Hawking, H. S. Reall, Phys. Rev. **D61** 065007, hep-th/9909205
- [41] R. Gregory, R. Laflamme, *Phys. Rev. Lett.* **70**, 2837 (1993), hep-th/9301052
- [42] L. Á. Gergely, Phys. Rev. **D71**, 084017 (2005), gr-qc/0407010
- [43] L. Á. Gergely Phys. Rev. **D72**, 069902 (2005)
- [44] F.C. Mena, R. Tavakol, R. Vera, Phys. Rev. **D66** (2002), 044004, gr-qc/0205011
- [45] A. Einstein, E. G. Straus, *Rev. Mod. Phys.* **17**, 120 (1945)
- [46] A. Krasinski, *Inhomogenous Cosmological Models*, Cambridge University Press (1997)
- [47] J. Wambsganss, Living Rev. Rel. **1** (1998) 12
- [48] L. Á. Gergely, B. Darázs, Publ.Astron.Dep.Eötvös Univ. **17** (2006) 1
- [49] J. Briet, D. Hobill, *Gravitational Lensing by charged black holes*, University of Calgary preprint, 2005
- [50] R. Whisker, Phys. Rev. **D71**, 064004; hep-th/0411786v3
- [51] K.A. Bronnikov, S.W.Kim, Phys. Rev. **D67**,064027 (2003), gr-qc/0212112
- [52] R. Bender *Galaxies, Cosmolgy and Dark Matter*, Lectures given by Ralf Bender, Summer Semester 2000
- [53] V. Bozza, Phys. Rev. **D66**, 103001 (2002), gr-qc/0208075
- [54] C.-M. Claudel, K.S. Virbhadra, G.F.R. Ellis, J.Math.Phys. **42** (2001) 818-838, gr-qc/0005050
- [55] K.S. Virbhadra, G.F.R. Ellis, Phys.Rev. **D62** (2000) 084003, astro-ph/9904193
- [56] A. Majumdar, N. Mukherjee, Int.J.Mod.Phys. **D14** (2005) 1095
- [57] E. F. Eiroa, Braz. J. Phys. **35** (2005) 1113-1116, gr-qc/0410128
- [58] E. F. Eiroa, Phys.Rev. **D71** (2005) 083010

- [59] U. Nucamendi, M. Salgado, D. Sudarsky, *Phys.Rev.Lett.* **84**, 3037
- [60] K. Lake, *Phys.Rev.Lett.* **92**, 051101
- [61] T. Harko, K. S. Cheng, *Astrophys.J.* **636** (2005) 8-20
- [62] Alan Bendasoli Pavan, Master Degree thesis (in portugese)