

Szegedi Tudományegyetem TTIK

Kísérleti Fizikai Tanszék

Fedési kettőscsillagok fotometriája

BSc Szakdolgozat

Készítette: Papp Sándor

Témavezető: Dr. Székely Péter

Szeged

2016

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés	4
2. Fedési kettőscsillagok osztályozása	5
2.1. Fénygörbe alakja szerint	5
2.2. Roche-térfogat kitöltöttsége szerint	5
3. Műszerek	6
4. A távcső beüzemelése és vezérlése	6
5. A CCD-kamera	6
5.1. SBIG ST-7 és ST-9E	7
6. A fotometrázás folyamata	8
6.1. Korrekciók	8
6.1.1. Dark	8
6.1.2. Flat	8
6.1.3. Bias	9
6.1.4. Az SBIG ST-7 korrekciós képei	9
6.1.5. Az SBIG ST-9E korrekciós képei	10
6.1.6. Képek összetolása és HJD beillesztése	10
6.2. Fotometria	11
7. Fénygörbék	12
8. A Dwarf-project	13
9. O–C diagramok	14
9.1. Lineáris karakterisztika	14
9.2. Ugrások a karakterisztikában	15
9.3. Parabolikus karakterisztika	15
9.4. Megjegyzések az illesztéssel kapcsolatban	16
9.5. A mért (O) időpontok és a periódusmeghatározás	17
9.5.1. Másodfokú függvény illesztése	17
9.5.2. Harmadfokú függvény illesztése	17
9.5.3. Negyedfokú függvény illesztése	18
9.5.4. Ötödfokú függvény illesztése	19
9.5.5. NSV 07826147	20
9.5.6. V1172 Her	21
9.5.7. MR Del	22
9.6. A számolt (C) időpontok és az O–C diagram	23
10.Összefoglalás	24
11.Köszönetnyilvánítás	25

12.Függelék	27
13.Nyilatkozat	28

1. Bevezetés

A szakdolgozatomban a projektmunkám és a nyári szakmai gyakorlatom során készített képekkel, illetve az ezekből fotometria során nyert adatokkal dolgoztam. A fotometria a csillagászat egyik olyan megfigyelési módszere, mely során egy adott égitest fényességét, illetve fényességváltozását megmérve további információkat nyerhetünk az adott égitestről. Fő célom különböző változócsillagok fénygörbéjének elkészítése volt, emellett megtanultam kezelni a Szegedi Csillagvizsgáló 40 cm-es Newton-rendszerű távcsövét, illetve az IRAF programcsomag néhány, számomra szükséges parancsának (taskjának) használatát is elsajátítottam.

Munkám során a Dwarf Project honlapján (<http://astronomy.science.upjs.sk/projectdwarf/>) elérhető adatbázisból kiválogatott kettőscsillagokról készítettem CCD-felvételeket a Szegedi Csillagvizsgáló 40 cm-es távcsövével, melyeket később az IRAF programcsomaggal dolgoztam fel. A kiválasztott kettőscsillagok rendelkeznek azzal a tulajdonsággal, hogy a mi látóirányunkból megfigyelhető fedés. Ilyenkor az egyik csillag elvonul a társa előtt, ezáltal fényességváltozás figyelhető meg a rendszerben, amit detektálni is lehet. Mivel ez a jelenség időt vesz igénybe, nem egy, hanem több felvételt készítettem, az esetek többségében egy éjszaka alatt 100 nyerskép készült, mindegyik 60 másodperces expozíciós idővel.

2. Fedési kettőscsillagok osztályozása

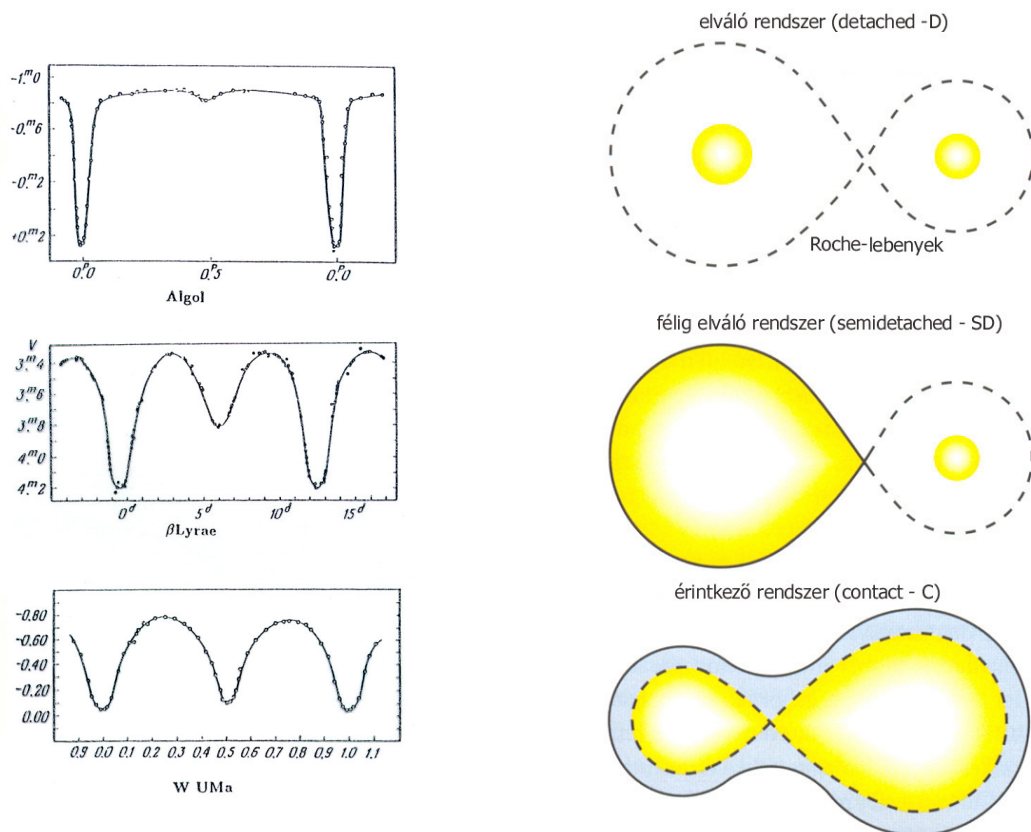
Fedési kettőscsillagokat [1] két szempont alapján osztályozunk: fénygörbe alakja szerint és a komponensek Roche-lebenyének¹ (vagy Roche-térfogatának) kitöltöttsége alapján.

2.1. Fénygörbe alakja szerint

Ha a fénygörbén jól elkülöníthető a fő- és mellékminimum, illetve ezeket egy plató köti össze, a vizsgált rendszert Algol-típusúnak nevezzük. A plató eltűnésével a fő- és mellékminimumok folytonosan mennek át egymásba. Ebben az esetben, ha egyértelműen meg lehet különböztetni, hogy melyik fényességsökkenés melyik minimumnak felel meg, akkor β -Lyrae típusú változóról van szó. Ha nem egyértelmű, akkor W UMa típusú.

2.2. Roche-térfogat kitöltöttsége szerint

Ha a komponensek közül egyik sem tölti ki a Roche-térfogatot, akkor e rendszer különálló (angolul *detached*), ha csak az egyik tölti ki, akkor félig érintkező (vagy félig különálló, *semidetached*), illetve ha mindkét komponens kitölti a neki megfelelő Roche-térfogatot, akkor érintkező (*contact*) rendszerről beszélünk. Utóbbi esetben a két csillag közös légkörrel is rendelkezhet.

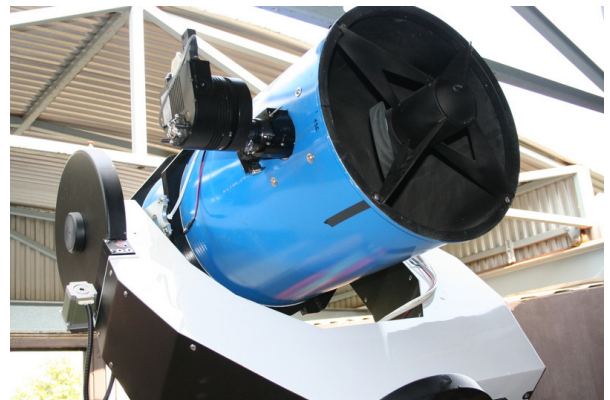


Kettőscsillagok osztályozása fénygörbe és Roche-térfogat kitöltöttsége alapján

¹A két csillag L1 pontján is átmenő ekvipotenciális felület által határolt térfogat.

3. Műszerek

Méréseimet a Szegedi Csillagvizsgáló legnagyobb tükörátmérőjű távcsövével, az f/3 fényerejű 40 cm-es Newton-távcsövel végeztem, ami villás mechanikára van felszerelve. Irányítása a mérőszobában levő számítógépen keresztül történt, a Pulsar és a MaximDL programokkal. A távcsőre az első mérések alkalmával, 2014-ben egy SBIG ST-7 típusú CCD-kamera volt felszerelve. Később, 2016-ban új kamera került a távcsőre, egy SBIG ST-9E típusú. Mindkettővel készítettem képeket.



4. A távcső beüzemelése és vezérlése

Használat előtt a távcső és a CCD-kamera kapcsolóit kell a mérőszobában felkapcsolni, majd a távcső felől el kell „húzni” a tetőt. A távcső lábánál levő elosztó áram alá helyezése után a CCD-kamera tápegységét, a fókuszírozót és a Pulsar kézi vezérlőjét kell bekapcsolni. Ezután a mérőszobában szinkronizálni kell az időt egy atomórához (interneten keresztül), illetve ellenőrizni kell a Pulsar beállításait. Ha szükséges, korrigálni kell az eltéréseket egy szöveges fájl alapján. A következő lépésben a MaximDL programon keresztül csatlakozunk a távcsőhöz, a fókuszírozóhoz, majd a CCD-kamerához. A kamera chipjét elkezdjük hűteni. Ha a távcső üzemkész és derült az ég, a távcsövet a szükséges koordinátákra állítva, a megfelelő képsorozatokat (szekvenciák) beállításával el lehet kezdeni mérni.

5. A CCD-kamera

A CCD rövidítés az angol Charge-Coupled Device elnevezésből származik, ami magyarul töltéscsatolt eszközt jelent. A kamera lelke a fényérzékeny pixelekből álló CCD-chip. Az egyes pixelekre érkező fotonok a fotoelektromos jelenség keretében elektronokat váltanak ki. Ezen fotoelektronok mennyiségéből következtetni lehet a fényintenzitásra. A CCD-kamrák manapság a legelterjedtebb tudományos célokra is használt képrögzítő eszközök. Kvantumhatásfokuk² a legtöbb hullámhossz-tartományban messze megelőzi más, képek rögzítésére alkalmas eszközét. Ez a szem esetén csak 1%, míg a CCD esetén hullámhossztól függően

²Megmutatja, hogy a detektor 100 beérkező fotonból mennyit képes érzékelni.

80-90% is lehet. A chipet úgy alakították ki, hogy a kép elkészültekor az elektronok a pixelek között meghatározott irányban át tudjanak járni (lineáris töltésléptető elemek segítségével, feszültség hatására). A folyamat végén egy kiolvasó regiszterrel történik a kiolvasás, és az exponálás befejezésétől számított néhány másodperc alatt megkapjuk a nyersképet. A CCD-kamera adottságai és működési elve [2] miatt azonban a nyersképekből nem lehet hiteles adatokat kinyerni, ahhoz előbb korrigálni kell azokat.

5.1. SBIG ST-7 és ST-9E

Egy rövid táblázatban összehasonlítom a két kamera [3][4] legfontosabb tulajdonságait:

	SBIG ST-7	SBIG ST-9E
A chip fizikai mérete (mm)	6,9 x 4,6	10,2 x 10,2
Felbontás (pixel)	765 x 510	512 x 512
Teljes pixelszám	390150	262144
1 pixel fizikai mérete (μm)	9 x 9	20 x 20
Teljes látómező (ívperc)	12 x 8	17,3 x 17,3
1 pixelre eső látómező (ívmásodperc)	0,9 x 0,9	2 x 2



Az SBIG ST-7 és ST-9E CCD-kamerák külsőleg megegyeznek

6. A fotometráálás folyamata

6.1. Korrekciók

A nyersképeket három fajta korrekciós képpel kell korrigálni, mielőtt a kiszemelt csillagot elkezdénénk fotometrálni. Ezek a dark, bias és flat képek.

6.1.1. Dark

A dark képekkel a sötétáram miatt keletkezett, a fotometria szempontjából felesleges fotonokat távolítjuk el a nyersképekről. Ezen fotonok számának csökkentése érdekében a CCD-kamera chipjét Peltier-elem segítségével lehet hűteni. A kamera használata előtt a chipet rendszeresen -5 °C -ra hűtöttem le.

Mivel egy dark képen a sötétáram általi hamis intenzitások létrejötte véletlenszerű, ezért érdemes nem egy dark képpel korrigálni, hanem több kép átlagával. A nyerskép pixeleinek intenzitását $I(x, y)$ -nal, az átlagolt dark kép intenzitását $D(x, y)$ -nal jelölve a korrekció kivonásként jön létre [5]:

$$I'(x, y) = I(x, y) - D(x, y),$$

ahol

$$D(x, y) = \frac{\sum_{i=1}^N D_i(x, y)}{N}$$

6.1.2. Flat

A flat korrekcióval a detektor szűrőire rakódott por és maszatok által létrehozott fals értékeket javíthatjuk ki és a kamera pixeleinek érzékenységbeli különbségét lehet kiküszöbölni. A flat képet lehetőleg homogén háttér előtt kell elkészíteni úgy, hogy a képen még ne látszódjon csillag. Ezért érdemes még a sötétedés vagy a napkelte előtti szürkületben elkészíteni a képeket. A flat képeket mindig sötétedés előtt készítettem el.

A flat korrekció már a dark korrekción átesett képet korrigálja. A flat képek átlagolt intenzitását $F(x, y)$ -nal jelölve, a korrekció osztásként megy végbe [5]:

$$I''(x, y) = \frac{I'(x, y)}{F(x, y)} K,$$

ahol K a flat átlagos fényességértéke, vagyis az összes pixel intenzitásösszegének és a pixelek számának hányadosa [5]:

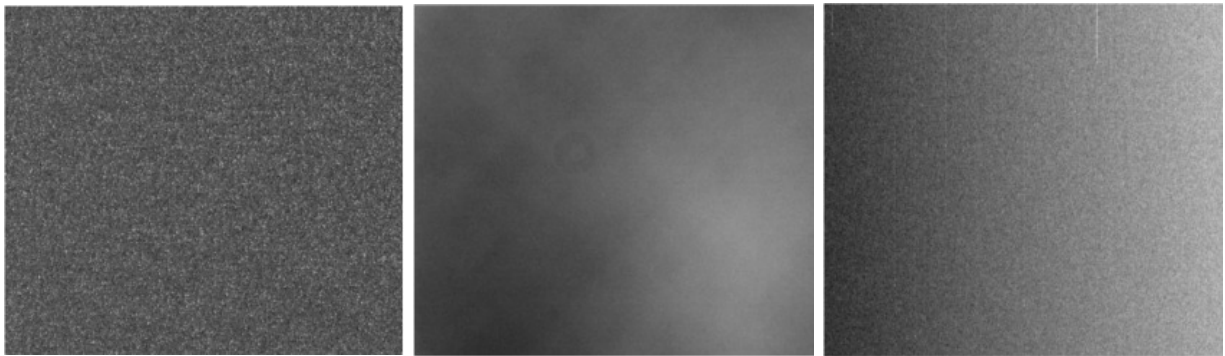
$$K = \frac{\sum_{i=1}^{N_{pix}} I_{pix,i}}{N_{pix}}$$

6.1.3. Bias

A bias képekkel az elektronika által keltett kiolvasási zaj tüntethető el a nyersképekről, ezen kívül tartalmaz a kép előfeszítési szintjére vonatkozó információkat. Ezeket 0 másodperces expozícióval készítjük el, csukott shutterrel.

Az esetek többségében mindhárom korrekciós képből ötöt-ötöt készítettem egy éjszakára. Ezekből egy-egy mesterképet, azaz átlagolt képet csináltam az IRAF *darkcombine*, *zero-combine* és *flatcombine* taskjaival, majd ezekkel korrigáltam a nyersképeket a *ccdproc* task használatával.

6.1.4. Az SBIG ST-7 korrekciós képei



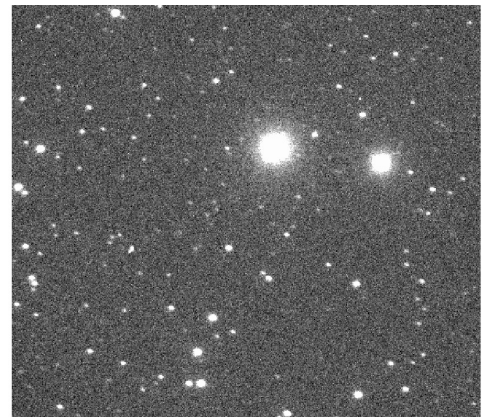
Dark kép

Flat kép

Bias kép

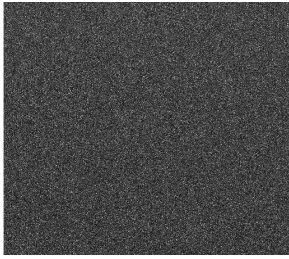


Nyers kép az MR Del-ről

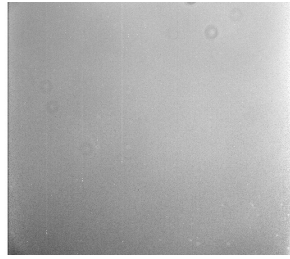


Korrigált kép az MR Del-ről

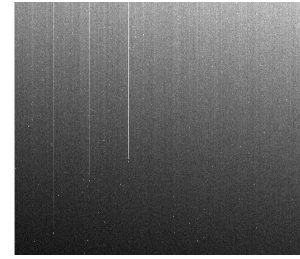
6.1.5. Az SBIG ST-9E korrekciós képei



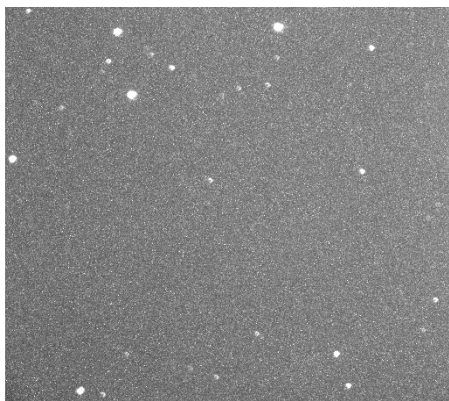
Dark kép



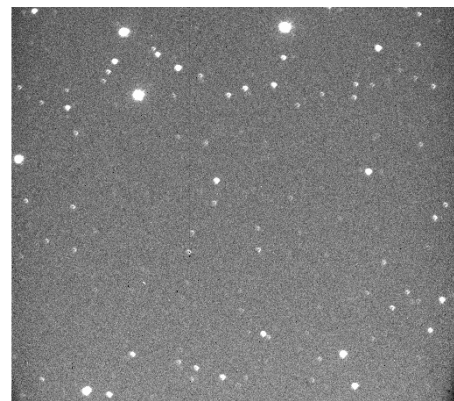
Flat kép



Bias kép



Nyers kép a V1172 Her-ről



Korrigált kép a V1172 Her-ről

6.1.6. Képek összetolása és HJD beillesztése

A képsorozatok elkészítésekor előfordul, hogy a távcső nem tudja kellő pontossággal követni a kiszemelt csillagot. Ez azt eredményezi, hogy a különböző képeken a csillagok el lesznek tolvva egymáshoz képest. Mivel a fotometriát a koordináták alapján végzi el a program, szükségeszerű, hogy a csillagok minden képen ugyanazon a helyen (koordinátán) legyenek. A képeket a legegyszerűbben az *xregister* taskkal tolhatjuk össze: a képsorozatból kiválasztunk egy referenciaképet, amelyhez viszonyítva a program automatikusan eltolja a képeket úgy, hogy mindegyiken a megfelelő csillagok pozíciói megegyezzenek a referenciaképen találhatókéval.

A fotometria elvégzése előtt utolsó lépésnek hagytam a heliocentrikus Julián-dátum (HJD) beillesztését a képek header részébe. Ez azért fontos, mert a képek készítésekor ezek az adatok nem kerülnek be automatikusan a headerbe, nekünk viszont szükségünk lesz rájuk a fotometria során és a fénygörbe elkészítésekor. Ezt a lépést bármikor megtehetjük a fotometria előtt, én mindig a már összetolt képek headerjébe írtam be a HJD-t, amihez a *setjd* taskot használtam.

6.2. Fotometria

Miután minden képen azonos pozíciókon találhatóak a megfelelő csillagok, és bekerült a headerbe a HJD, az *imexamine* paranccsal egy fájlba gyűjtjük a változócsillag és egy, vagy két referenciacsillag koordinátáit. A *phot* task segítségével, a koordinátákat tartalmazó fájl megadásával pedig elvégezzük a fotometriát. Ennek eredményeként megjelennek a **.mag.1* fájlok, amikben számunkra rendezetlenül vannak megjelenítve a fényességek. A fontos adatokat (obszervációs idő és fényesség) a *txdump* parancs segítségével nyerhetjük ki:

```
txdump *.mag.1 otime,mag yes > magnitudok.dat
```

A kért adatokat tartalmazó fájl neve természetesen lehet tetszőleges. Ebben már csak az obszervációs idő (HJD) és a csillagok fényességei szerepelnek, de még nem tudunk belőle fénygörbét előállítani. Ha a változócsillagon kívül csak egy összehasonlító csillagot jelöltünk ki, akkor két azonos időponthoz kapunk két különböző fényességet. A cél az, hogy egy időponthoz tartozzon egy fényesség: a változó és az összehasonlító különbsége. Ezt egy awk-szkripttel be is írhatjuk egy másik fájlba:

```
awk '{ hjd=$1;v=$2;getline;hjd=$1;oh=$2;print hjd,v-oh;}' magnitudok.dat > diffmag.dat
```

Az új fájlban már olyan elrendezésben szerepelnek az adatok, hogy *gnuplot*ban ábrázolni is tudjuk őket. Ezek lesznek a fénygörbék. A vízszintes tengelyen az idő van feltüntetve Julián-dátumban³, a függőleges tengely pedig a magnitúdó-skálának megfelelően meg van fordítva, hogy a kisebb számértékekhez tartozzanak a nagyobb intenzitások. A függőleges tengelyt egy egyszerű paranccsal fordíthatjuk meg:

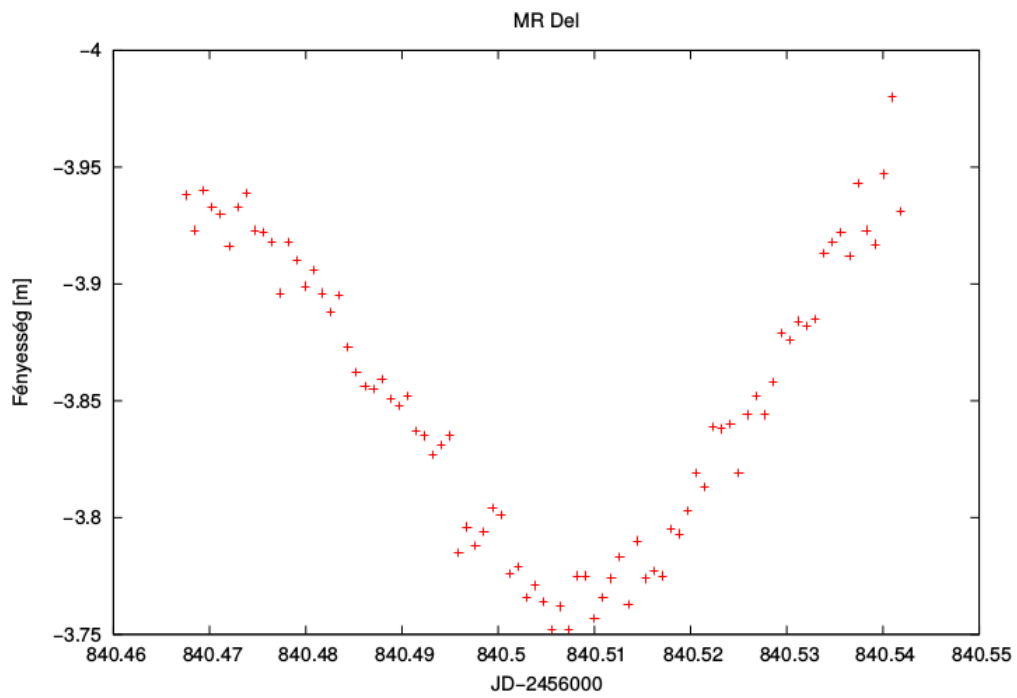
```
set yrange[]rev
```

A fénygörbét a *plot* paranccsal lehet megkapni, és a vízszintes tengelyen való könnyebb eligazodás érdekében a Julián-dátumot le lehet redukálni:

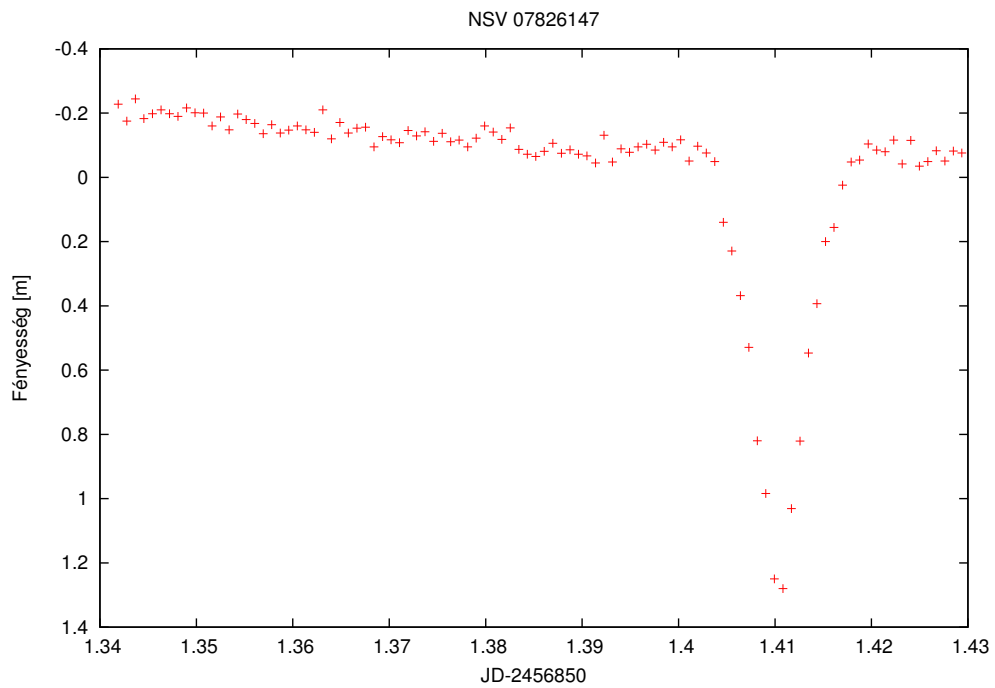
```
p 'diffmag.dat' u ($1-2456800):2
```

³A Julián-dátum a Kr.e. 4713 január 1. greenwichi delétől eltelt napok számát jelöli.

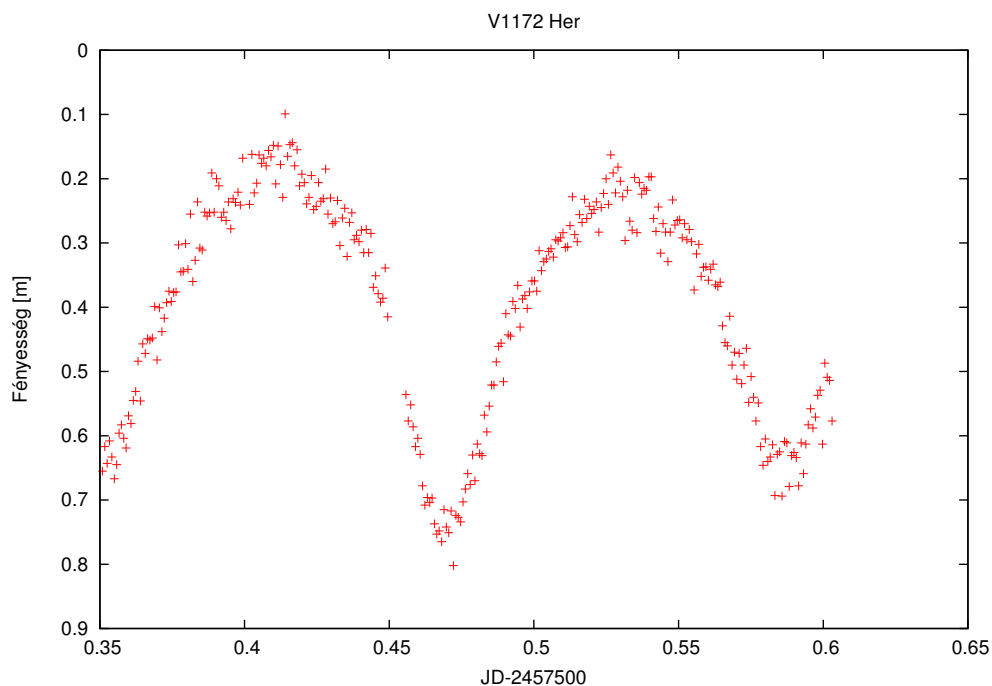
7. Fénygörbék



Az MR Del fénygörbéje



Az NSV 07826147 fénygörbéje



A V1172 Her fénygörbéje

8. A Dwarf-project

A Dwarf-project keretein belül lehetőségünk van az elkészített fénygörbéket a projekt honlapjára [6] feltölteni, ezáltal tudományos munkában is részt venni. A projekt fő célja, hogy kettős rendszerek körül ki tudjanak mutatni exobolygókat⁴. A Dwarf-project adatbázisaiban túlnyomó részt olyan kettősök találhatók, melyeknek egyik komponense fehér vagy barna törpe, emellett a fedések periódusideje rövid (ami a könnyebb megfigyelést és adat-szerzést teszi lehetővé), ezáltal jobban megismerhetjük azon bolygók kialakulását, melyek nem magányos csillagok körül jöttek létre.

Annak kiderítése érdekében, hogy egy kettős rendszer körül kering-e bolygó, elsősorban a fény-idő effektust (*light-time effect*, LITE) [7] használják fel. Ennek értelmében a rendszer körül keringő bolygó meg fogja változtatni a fedés periodicitását: időben hol hamarabb, hol később fog kezdődni a fedés a várthoz képest. Ennek az eltolódásnak a valódi, fizikai mivoltát legjobban az O–C diagrammal tudjuk ellenőrizni.

⁴Naprendszeren kívüli bolygó.

9. O–C diagramok

Az O–C diagramok [8] előállításához szükségesek a fénygörbék: a mért (*observed* - *O*) minimumidőpontokból kivonjuk az általunk számolt (*calculated* - *C*) minimumidőpontokat (ezek lehetőség szerint legyenek minél pontosabban meghatározva) és az idő függvényében ábrázoljuk azt. Ezáltal egy olyan grafikont kapunk, melynek mindkét tengelyén idő szerepel, a kapott görbe karakterisztikájából pedig megállapítható, hogy kering-e bolygó a rendszer körül.

A számolt *C* időpontokat a minimumidőpontok periódusán keresztül kapjuk meg úgy, hogy egy általunk kiválasztott kezdeti epochához adjuk a periódus egész számú többszörösét (ezt szokták ciklusszámnak is nevezni).

$$C = T_0 + nP$$

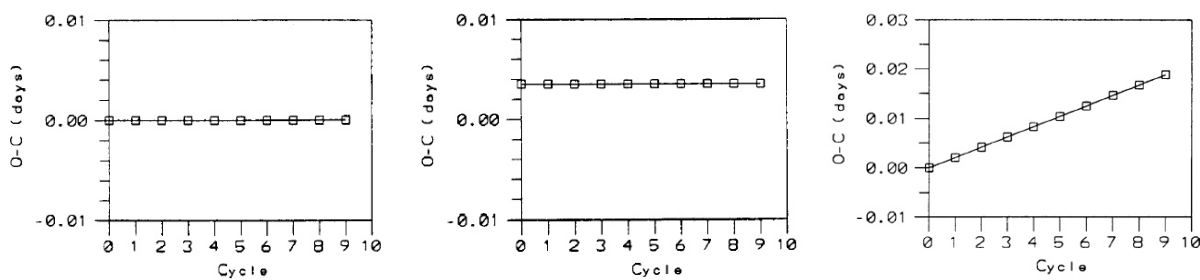
Mivel a kezdeti időpontot és a periódust is mi választjuk meg, illetve számoljuk ki, tudnunk kell, hogy mit jelentenek a különböző karakterisztikák, illetve mire kell odafigyelni, ha görbét illesztünk rá.

9.1. Lineáris karakterisztika

Ha az O–C értéke 0-t vesz fel és nem tér el tőle, akkor nagy valószínűséggel jól lett megválasztva a periódus, és nincs a megfigyelt rendszerben olyan égitest, ami ezt megváltoztatná.

Ha az obszervált és kalkulált időpontok különbsége konstans, de nem 0, a kezdeti epochát kell megváltoztatni a különbséggel. Ennek eredménye, hogy visszajutunk az első esethez, vagyis jó periódust adtunk meg és nincs további égitest a rendszerben.

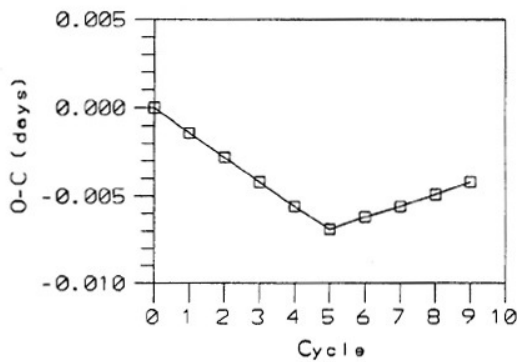
Ha nem 0 meredekségű egyenest kapunk, vagyis a mért és számolt időpontok egyre jobban eltolódnak egymáshoz képest, akkor módosítani kell a periódust. Ha ezt megfelelően választjuk meg, visszakapjuk az első esetet.



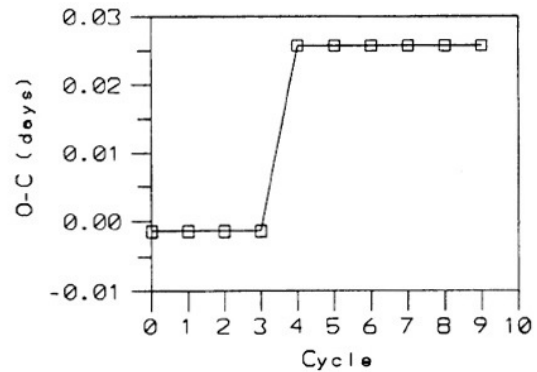
Lineáris karakterisztikák

9.2. Ugrások a karakterisztikában

Ha két különböző meredekségű egyenes metszi egymást, akkor két különböző periódusról van szó, a periódusugrás pedig a két egyenes metszésének időpontjában következik be. Fedési kettős csillagok esetén a periódusugrás utalhat nagy mennyiségű, hirtelen anyagátáramlásra. Ha két, egymástól különböző, 0 meredekségű egyenest egy harmadik, nem 0 meredekségű köt össze, akkor fázisugrásról beszélünk. Ez fedési kettősök esetén nem magyarázható a periódus változásával. Ha a fázisugrás ciklikusságot mutat, és fedési kettősöket figyeltünk meg, akkor valójában egy három tagot számláló rendszerről van szó.



Periódusugrás



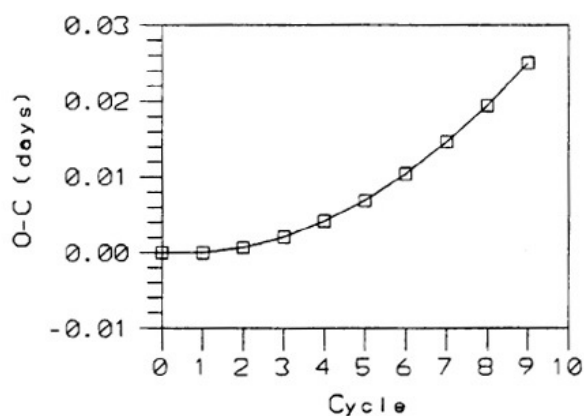
Fázisugrás

9.3. Parabolikus karakterisztika

Ha az obszervált és kalkulált időpontok különbsége parabolikus karakterisztikát mutat, akkor ezt nem lehet kiküszöbölni a periódus változtatásával. Ez azt jelenti, hogy a periódus lineárisan változik, és a periódusváltozást az O-C diagram deriváltja adja. Ha a parabola felfele nyílik, a periódus növekszik, ha lefelé, akkor csökken. Parabolikus karakterisztika esetén a kalkulált időpontot leíró egyenlet módosul:

$$C = T_0 + nP + \frac{1}{2}\beta n^2$$

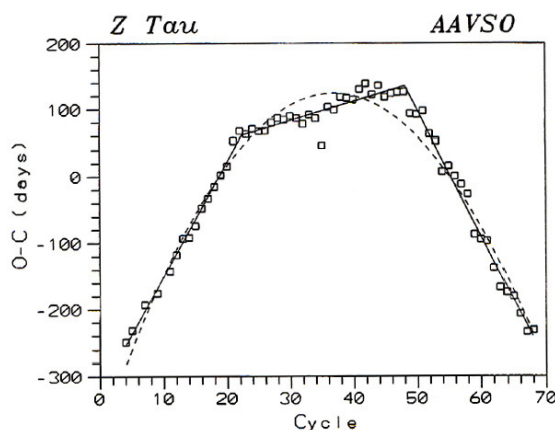
$$\beta = P \frac{dP}{dt}$$



Parabolikus karakterisztika

9.4. Megjegyzések az illesztéssel kapcsolatban

Előfordulhatnak olyan esetek, amikor könnyen illeszthetünk parabolikus függvényt és különböző egyeneseket is az adatsorra. A két eset nagyon is eltérő fizikai háttérre enged következtetni, ezért ilyen esetekben további utánajárást igényel a kérdés eldöntése. Ebben jelentkezik az O-C diagramok hátulütője: kérdéses esetekben nem lehetünk mindig biztosak a saját eredményeinkben. Ilyenkor érdemes összevetni mások által készített diagramokkal is, ami még mindig nem biztos, hogy egyértelmű eredményhez vezet. Általános gyakorlat, hogy a diagramokat már előre meghatározott periódussal és kezdeti epochával számolják, és nem szokás a kalkulált időpontokat a perióduson keresztül változtatni.



Parabolikus és lineáris illesztés

9.5. A mért (O) időpontok és a periódusmeghatározás

A fénygörbék minimumidőpontjainak meghatározását függvény illesztésével végeztem `gnuplot`-on keresztül. Egy adatsor extrémális értékeit, vagyis maximumát, minimumát a rá legjobban illeszkedő függvény deriválásával kaphatjuk meg a legpontosabban. Egy függvény deriváltja definíció szerint a függvény adott pontjába húzott érintő meredeksége. Mivel a minimum pontjában ez a meredekség 0, az adott függvény deriváltját egyenlővé kell tenni 0-val:

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x} = 0$$

Annak érdekében, hogy az illesztendő függvény minél egyszerűbb legyen, nem a teljes adatsorra (fénygörbére) illesztettem, hanem annak csak egy kis részére, a fényességminimumokhoz közeli tartományra. Egyes fénygörbékre elég volt másod- vagy harmadfokú függvényt illeszteni, más esetekben negyed-, illetve ötödfokú függvényt illesztettem.

9.5.1. Másodfokú függvény illesztése

A legegyszerűbb esetben az

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

másodfokú függvényt illesztettem, melynek deriváltja

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(ax^2 + bx + c) = 2ax + b$$

Itt x jelöli az időt, az a, b, c értékek pedig az illesztési (iterálási) folyamat során kerülnek meghatározásra. A derivált függvény definíciója alapján

$$x = -\frac{b}{2a}$$

Az a és b végső⁵ értékeinek behelyettesítésével megkapjuk a minimum időpontját, ez lesz az egyik mért (*observed* - O) időpont. Egy másik minimumtartomány körüli illesztésből hasonló módon kaphatunk egy újabb időpontot. Két szomszédos időpont különbsége adja a periódust.

9.5.2. Harmadfokú függvény illesztése

Ha a másodfokú függvény nem illeszkedett elég pontosan, magasabb rendűt illesztettem:

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

Ennek deriváltja másodfokú, melyet ha egyenlővé teszünk 0-val, akkor két megoldása közül az egyik adja a minimum időpontját:

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(ax^3 + bx^2 + cx + d) = 3ax^2 + 2bx + c = Ax^2 + Bx + C$$

$$x_{1,2} = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$$

⁵A `gnuplot` a megadott függvényt több iterálási lépéssel közelíti az adatsorhoz, melyek során az a, b értékek változnak, hogy általuk a lehető legpontosabb legyen az illesztés.

9.5.3. Negyedfokú függvény illesztése

További pontosítások érdekében negyedfokú függvényt is használtam:

$$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$$

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$$

Mivel ebben az esetben egy harmadfokú egyenletet teszünk 0-val egyenlővé, ezért három megoldás közül kell a megfelelőt kiválasztani. Az egyenlet három gyöke a következő módon határozható meg [9]:

Vettem a függvény Taylor-sorát:

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + (x - x_0)^2 \frac{f''(x_0)}{2!} + (x - x_0)^3 \frac{f'''(x_0)}{3!}$$

x_0 -t úgy határoztam meg, hogy a függvény második deriváltja 0 legyen:

$$f''(x_0) = 6Ax_0 + 2B = 0$$

$$x_0 = -\frac{B}{3A}$$

Az x_0 segítségével megadható három megoldás közül kettő tartalmaz komplex számot is, ezért egy új paraméter bevezetésével [9], illetve annak vizsgálatával határoztam meg a megoldásokat:

$$\Delta = \frac{4(27A^2D^2 + B^3D + AC^3) - (9AD + BC)^2}{3}$$

Ha $\Delta > 0$, akkor a megoldások tartalmaznak komplex számokat. Ilyenkor visszatértem alacsonyabb fokú illesztéshez. Ha 0-nál kisebb, akkor egyik megoldás sem komplex:

$$x_1 = \frac{B + 2\sqrt{B^2 - 3AC}}{3A} \cos\left(\frac{1}{3} \arccos \frac{-(2B^3 - 9ABC + 27A^2D)}{2\sqrt{(B^2 - 3AC)^3}}\right) = R \cos\left(\frac{1}{3} \arccos Q\right)$$

$$\begin{aligned} x_{2,3} &= \frac{B + 2\sqrt{B^2 - 3AC}}{3A} \cos\left(\frac{2\pi \pm 1}{3} \arccos \frac{-(2B^3 - 9ABC + 27A^2D)}{2\sqrt{(B^2 - 3AC)^3}}\right) = \\ &= R \cos\left(\frac{2\pi \pm 1}{3} \arccos Q\right) \end{aligned}$$

9.5.4. Ötödfokú függvény illesztése

Egy fénygörbére több függvényt is illesztettem, hogy el tudjam dönteni, melyiket érdemes használni. Akadt olyan eset, ahol az ötödfokú polinom igen pontos eredményt adott.

$$f(x) = ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f$$

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f) = 5ax^4 + 4bx^3 + 3cx^2 + 2dx + e = Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E$$

A megoldásokhoz az előzőhöz hasonló módon jutottam el, vagyis első lépésben vettem a Taylor-sorát:

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + (x - x_0)^2 \frac{f''(x_0)}{2!} + (x - x_0)^3 \frac{f'''(x_0)}{3!} + (x - x_0)^4 \frac{f''''(x_0)}{4!}$$

x_0 -t úgy határoztam meg, hogy a harmadik derivált 0-t adjon:

$$f'''(x_0) = 24Ax_0 + 6B = 0$$

$$x_0 = -\frac{B}{4A}$$

Itt x_0 már szerepel a megoldásban:

$$x_1 = x_0 + \sqrt{y_1} + \sqrt{y_2} + \sqrt{y_3}$$

Az y -ok egy harmadfokú egyenlet gyökei, melynek tényezői (a későbbiekben K, L, M) megadhatók a negyedfokú függvény Taylor-sorában található deriváltakkal [10]:

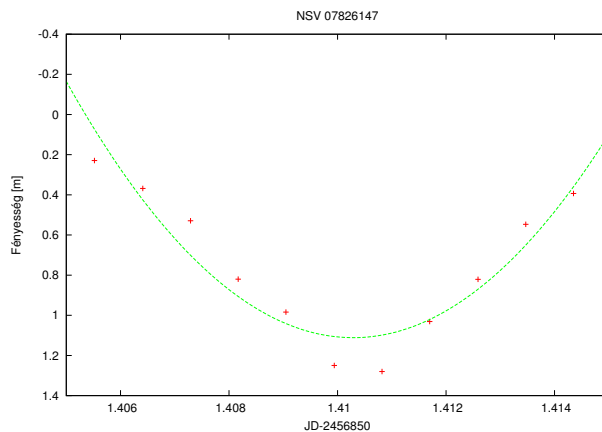
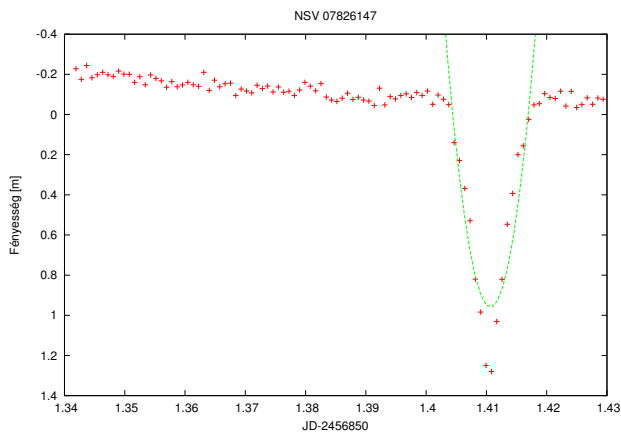
$$y^3 + 6 \frac{f''(x_0)}{f''''(x_0)} y^2 + \left[\left(3 \frac{f''(x_0)}{f''''(x_0)} \right)^2 - 6 \frac{f(x_0)}{f''''(x_0)} \right] y - \left(3 \frac{f'(x_0)}{f''''(x_0)} \right)^2 = 0$$

$$y^3 + Ky^2 + Ly + M = 0$$

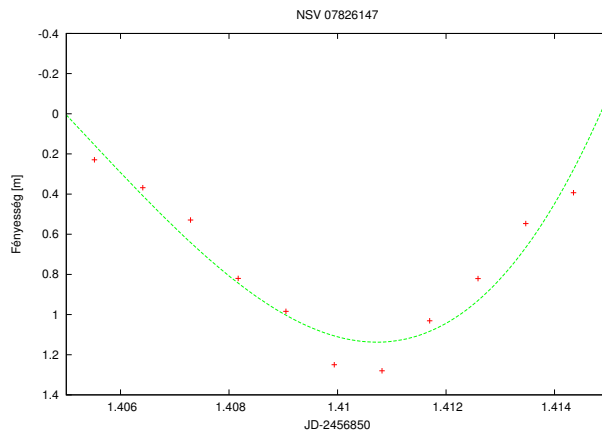
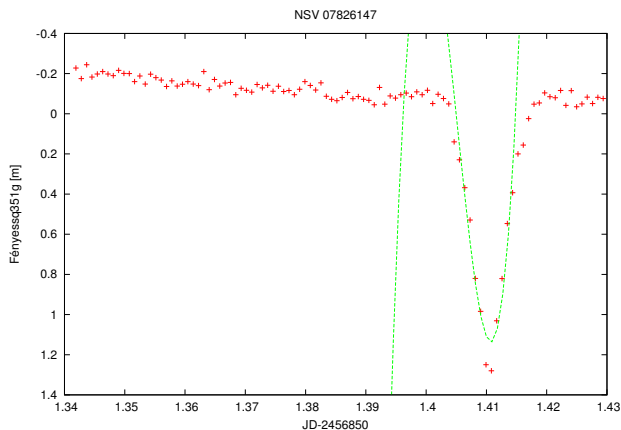
Eszerint a negyedfokú függvény egy megoldása visszavezethető egy harmadfokú függvény megoldásainak kiszámolására és egy konstans meghatározására.

9.5.5. NSV 07826147

Az NSV 07826147 minimumára másod- és harmadfokú polinomokat illesztettem. Csak egy nagyon szűk tartományt választottam ki, mivel a teljes adatsoron könnyebb lett volna egyenest illeszteni, vagy olyan polinomot, aminek minimuma nem esik egybe a fényesség minimumával.



Másodfokú függvény illesztése 1,405 és 1,415 között

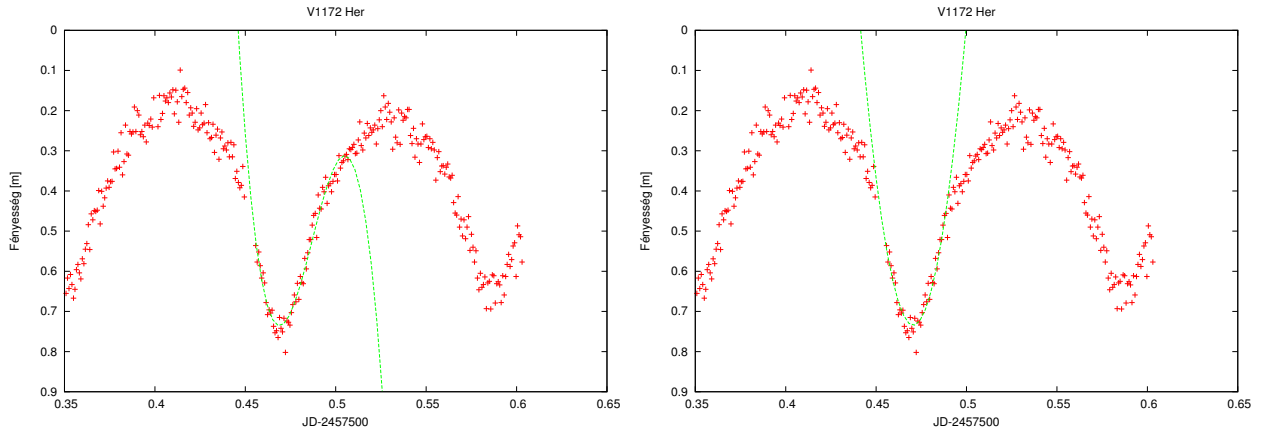


Harmadfokú függvény illesztése 1,405 és 1,415 között

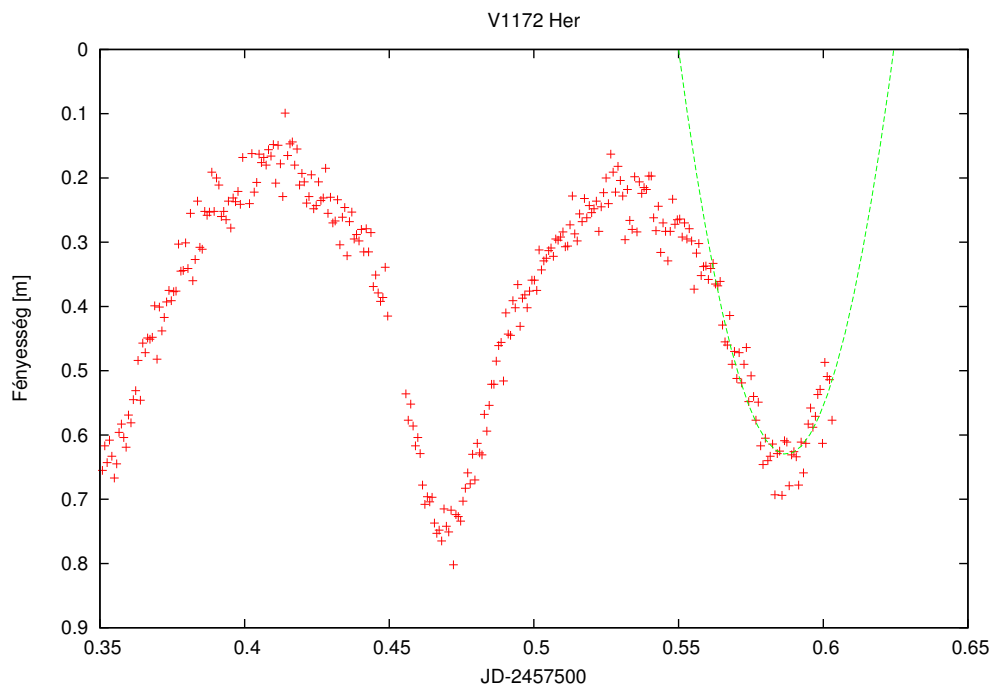
Illesztett függvény	Másodfokú	Harmadfokú
a	-45613,5	-3302430
b	128656	13923000
c	-90720,3	-19566100
d	-	9165360
x_1	1,410284236	1,41077
x_2	-	1,39989

9.5.6. V1172 Her

A V1172 Her esetében a főminimumra illeszttem egy másodfokú és egy harmadfokú függvényt, illetve egy másodfokút a mellékminimumra.



A két függvényt a 0,45 és 0,51 közötti, illetve 0,45 és 0,49 közötti tartományokra illeszttem



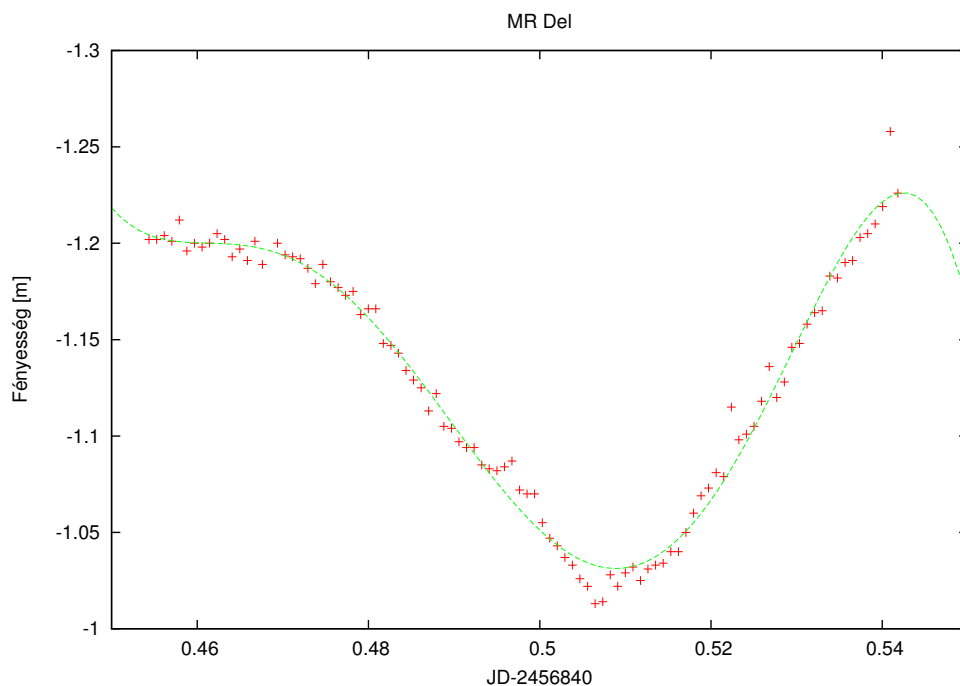
A mellékminimumra 0,56 és 0,61 között illeszttem

Illesztés helye	Mellékminimum	Főminimum	
		Másodfokú	Harmadfokú
a	-455,059	-868,567	18170,4
b	534,408	817,388	-26544,3
c	-156,268	-191,571	12908,1
d	-	-	-2088,95
x_1	0,587185397	0,470538254	0,468941
x_2	-	-	0,504961

Az eredmények tekintetében két fontos dolgot kell megjegyezni: nem mindegy, hogy milyen tartományon illesztünk, illetve milyen függvényt. A főminimum esetében a másodfokú polinom nagyobb értéket adott a minimumra, mint a harmadfokú, különbségük 0,001597254 nap, ami kerekítve 2,3 percnak felel meg. Ez nem tűnik nagy különbségnek, de ha perces nagyságrendű hibával kellene számolni periódust, már kis N -re is jelentős eltérés mutatkozna a valóságtól. Itt N jelöli azt az egész számot, mellyel megszorozzuk a periódust. Ez megmutatja az O–C diagramok egyik legnagyobb hibáját: az időpontokat igen nagy pontossággal kell megadni, de a függvényillesztéses módszerrel nem lehetünk benne biztosak, melyik eredményt fogadhatjuk el helyesnek.

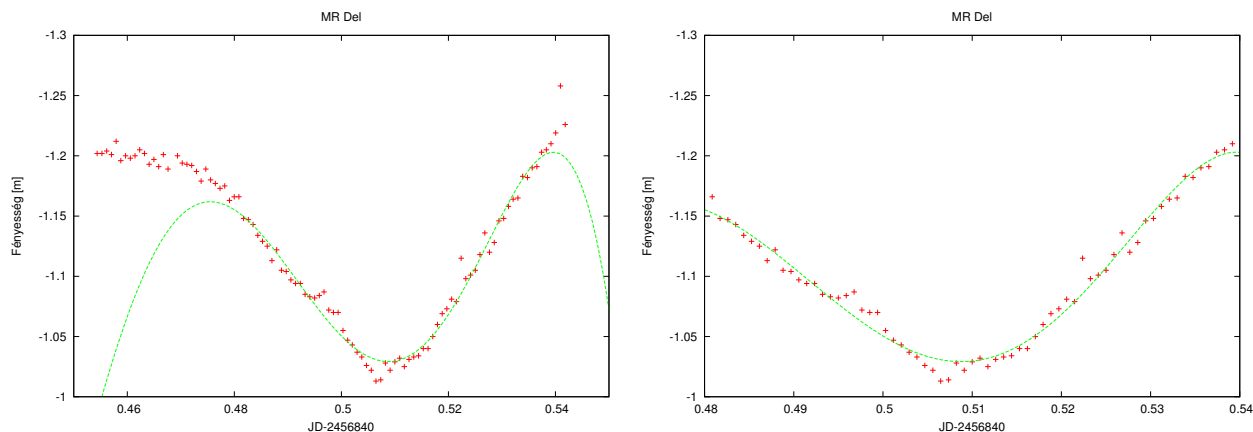
9.5.7. MR Del

Az MR Del esetében az ötödfokú függvény illeszkedett a legpontosabban az összes közül.



Illesztés a teljes tartományra

A teljes tartományra való illesztésnél azonban olyan a, b, c, d, e értékeket kaptam, amelyekkel nem lehetett nagy pontossággal meghatározni a minimum helyét, ezért szűkítettem az illesztési tartományt.



Az illesztési tartományt 0,48 és 0,54 közé vettem

A kapott és számolt adatokat a következő táblázatok tartalmazzák:

a	b	c	d	e
1606910	-3933510	3843280	-1873490	455627

K/3	L/2	M	R	Q
-0,000511018	$2,45549 \cdot 10^{-7}$	$-1,63731 \cdot 10^{-12}$	-0,00011329	0,288846

x_0	$\sqrt{x_1}$	$\sqrt{x_2}$	$\sqrt{x_3}$	x
0,489574	-	0,010639625	0,008437239	0,508650865

Ezek szerint az MR Del minimuma az $x = 0,508650865$ helyen (időpontban) következett be.

9.6. A számolt (C) időpontok és az O–C diagram

A minél pontosabban kiszámolt periódus segítségével egyszerűen kaphatunk további időpontokat úgy, hogy annak N -szeresét hozzáadjuk az egyik, függvényillesztéssel már meghatározott O időponthoz:

$$C = O + N \cdot P$$

Ha az adatsor több minimumot is tartalmaz, könnyebben ellenőrizhető, hogy a számolt időpontok mennyire térnek el a mértektől. Ez az eltérés lesz az O és C különbsége, amit ábrázolhatunk az idő függvényében. Ez lesz az O–C diagram.

10. Összefoglalás

Szakedolgozatomban bemutattam a fedési kettőscsillagok fotometriájával kapcsolatos legfontosabb ismereteimet, a vizsgálataimhoz használt eszközöket és módszereket. Munkám során a nyersképekből fénygörbéket állítottam elő, majd azokra függvényt illesztve meghatároztam a fedések minimumának időpontjait. Ezalatt egyre több ismeretet szereztem az IRAF programcsomagról és a *gnuplot* programról, illetve ezek használatáról. A továbbiakban szeretném folytatni a méréseket és még több adatot gyűjteni, hogy O–C diagramot is elő tudjak állítani.

11. Köszönetnyilvánítás

Szeretném megköszönni Dr. Székely Péternek, hogy elvállalta a témavezetésem, megtanította a Szegedi Csillagvizsgáló 40 cm-es távcsövének kezelését, és megismertette velem az IRAF programcsomag alapjait, illetve több Linux alapú szoftver használatát. Emellett a felmerülő problémák megoldásában is mindig segített és hasznos tanácsokat adott. Köszönöm Dr. Szatmáry Károlynak, hogy engedélyt adott a Szegedi Csillagvizsgáló műszereinek használatához.

Hivatkozások

- [1] <http://astro.u-szeged.hu/oktatas/asztrofizika/html/node75.html>
- [2] <http://www.konkoly.hu/evkonyv/ccd/furesz.html>
- [3] <http://archive.sbig.com/sbwhtmls/st7.htm>
- [4] <http://archive.sbig.com/sbwhtmls/st9E.htm>
- [5] Fűrész G.: 1997, CCD alapismeretek IV., Meteor 27. No.3. 17-20., 35.
- [6] <http://astronomy.science.upjs.sk/projectdwarf/>
- [7] <http://astro.u-szeged.hu/oktatas/asztrofizika/html/node96.html>
- [8] <http://astro.u-szeged.hu/oktatas/asztrofizika/html/node83.html>
- [9] http://sajo.ro/files/egyenlet_3.htm
- [10] http://sajo.ro/files/egyenlet_4.htm

12. Függelék

Az ötödfokú függvény illesztésekor kapott a, b, c, d, e paramétereket ebbe az időigényes számolásokat elvégző, általam írt programba helyettesítettem be:

```
#!/bin/bash
awk 'BEGIN { a= ; b= ; c= ; d=; e=;
A = 5*a; B = 4*b; C = 3*c; D = 2*d; E = e;
x = -1/4*(B/A);
f0 = A*x^4 + B*x^3 + C*x^2 + D*x + E;
f1 = 4*A*x^3 + 3*B*x^2 + 2*C*x + D;
f2 = 12*A*x^2 + 6*B*x + 2*C;
f4 = 24*A;
K = 6*f2/f4;
L = (K/2)^2 - 6*f0/f4;
M = -1*((3*f1/f4)^2);
print K/3, L/2, M, x; } > 4.dat
```

Negyedfokú függvény illesztésekor kapott a, b, c, d adatokat egy másik általam írt programba lehet beírni. Ha a $K/3, L/2, M$ értékeket helyettesítjük be b, c, d -be, vigyázni kell, hogy $a = 1/4$ legyen:

```
#!/bin/bash
awk 'BEGIN { a= ; b=; c=; d=;
A = 4*a; B = 3*b; C = 2*c; D = d;
x = -1/3*(B/A);
delta = 1/3*(4*(27*(A*D)^2 + D*B^3 + A*C^3) - (9*A*D + B*C)^2);
R = -1*(B + 2*sqrt(B^2 - 3*A*C))/(3*A);
Q = (-1*(2*B^3 - 9*A*B*C + 27*D*A^2))/(2*sqrt((B^2 - 3*A*C)^3));
print delta, sqrt(delta), R, Q; } > 3.dat
```

Ha $\sqrt{\Delta}$ negatív (komplex) lenne, akkor R lesz a koszinuszt szorzó tag, Q pedig az arkusz koszinusz argumentuma. Ha $\sqrt{\Delta} > 0$, akkor Q és R lesz komplex.

13. Nyilatkozat

Alulírott Papp Sándor BSc szakos hallgató (ETR azonosító: PASUACT.SZE) a „Fedési kettőscsillagok fotometriája” című szakdolgozat szerzője fegyelmi felelősségem tudatában kijelentem, hogy dolgozatom önálló munkám eredménye, saját szellemi termékem, abban a hivatkozások és idézések általános szabályait következetesen alkalmaztam, mások által írt részeket a megfelelő idézés nélkül nem használtam fel.

Szeged, 2016.05.12.

.....
Papp Sándor