

# Kozmológiai alapok és tachion skalármező sötétenergia

Szegedi Tudományegyetem  
Elméleti fizikai tanszék  
Kísérleti fizikai tanszék

Péter Gergely  
Témavezető: Dr. Keresztes Zoltán

2013/2014. tanév 1. félév

# Tartalomjegyzék

<b>1. Kozmológiai alapok</b>	<b>1</b>
1.1. A Friedmann-téridő . . . . .	1
1.1.1. A sík Friedmann-téridő geometriája . . . . .	1
1.1.2. Mozgásegyenletek . . . . .	3
1.1.3. A Friedmann-univerzum összetétele . . . . .	4
1.2. SNIa szupernóva adatok és a $\Lambda$ CDM modell . . . . .	6
<b>2. A tachion skalármező kozmológiai modell</b>	<b>8</b>
2.1. Kétkomponensű folyadék evolúciójának rekonstrukciója . . . . .	9
2.2. A tachion skalármező dinamikája . . . . .	10
2.3. Összevetés a megfigyelésekkel, jövőbeli evolúció . . . . .	13
<b>Irodalomjegyzék</b>	<b>16</b>

# 1. Kozmológiai alapok

## 1.1. A Friedmann-téridő

A Friedmann-téridő a térben homogén és izotróp Univerzumot írja le az általános relativitáselmélet keretein belül. A megfigyelések szerint ez a két feltétel csak elegendően nagy léptékeken ( $>300$  Mpc) lehet megfelelő közelítés [1]. 2013-ban pl. egy 10 milliárd fényév méretű struktúrát figyeltek meg, tehát nyitott maradt az Univerzum homogenitásának kérdése [2].

A homogenitás és izotrópia feltételeinek teljesülése mellett a következő három eset különbözthető meg: a térszerű hiperfelületek lehetnek

- pozitív görbületű, 4-dimenziós euklideszi térbe ágyazható 3-dimenziós gömbfelületek, zárt Univerzum
- nulla görbületű, 3-dimenziós euklideszi terek, az Univerzum sík
- negatív görbületű, 4-dimenziós Minkowski-térbe ágyazható 3-dimenziós hiperboloidok, az Univerzum nyílt

A megfigyelések (a mikrohullámú háttérsugárzás anizotrópiáinak vizsgálata) alapján a nulla görbületű eset a legvalószínűbb [1], a továbbiakban ennek fennállását feltételezzük.

### 1.1.1. A sík Friedmann-téridő geometriája

Ebben a szakaszban meghatározzuk a geometriát leíró metrikus tenzort, a Christoffel-szimbólumokat, továbbá a Ricci- és Einstein-tenzorok komponenseit. Sík Friedmann-univerzum esetén az ívelemnégyzet  $(\tau, x, y, z)$  koordinátákban, ahol  $\tau$  a kozmológiai idő,  $(x, y, z)$  pedig Descartes-koordináták, a következő:

$$ds^2 = -d\tau^2 + a^2(\tau) (dx^2 + dy^2 + dz^2). \quad (1)$$

Itt  $a(t)$  neve skálafaktor. Bevezetjük a Hubble-paramétert:

$$H = \frac{\dot{a}}{a}. \quad (2)$$

A metrikus tenzor nem eltűnő komponensei (1)-nek megfelelően:

$$g_{\tau\tau} = -1, g_{xx} = g_{yy} = g_{zz} = a^2(\tau). \quad (3)$$

A Christoffel-szimbólumokat a metrikus tenzorból a következő formulából lehet meghatározni:

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{kl} \{ \partial_i g_{jl} + \partial_j g_{il} - \partial_l g_{ij} \}. \quad (4)$$

Az eltűnő komponenseket kiegyszerűsítve a következő alakba írható a képlet:

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{(k)(k)} \{ \partial_i g_{j(k)} + \partial_j g_{i(k)} \} - \frac{1}{2} g^{k0} \partial_0 g_{ij}. \quad (5)$$

Az zárójelbe tett indexekre nem vonatkozik az Einstein-féle összegzési konvenció. Behelyettesítés után a nem eltűnő komponensek:

$$\Gamma^{\tau}_{xx} = \Gamma^{\tau}_{yy} = \Gamma^{\tau}_{zz} = \dot{a}a \quad (6)$$

$$\Gamma^x_{\tau x} = \Gamma^x_{x\tau} = \Gamma^y_{\tau y} = \Gamma^y_{y\tau} = \Gamma^z_{\tau z} = \Gamma^z_{z\tau} = \frac{\dot{a}}{a}. \quad (7)$$

A kozmológiai idő ( $\tau$ ) szerinti deriválást ponttal jelöltük. A Ricci-tenzor kapcsolata a Christoffel-szimbólumokkal:

$$R_{ij} = \partial_k \Gamma^k_{ij} - \partial_i \Gamma^k_{kj} + \Gamma^l_{ij} \Gamma^k_{lk} - \Gamma^l_{kj} \Gamma^k_{li}. \quad (8)$$

A kifejezésben szereplő egyes nem eltűnő tagok:

$$\partial_k \Gamma^k_{xx} = \partial_k \Gamma^k_{yy} = \partial_k \Gamma^k_{zz} = \ddot{a}a + \dot{a}^2, \quad (9)$$

$$\partial_{\tau} \Gamma^k_{k\tau} = 3 \frac{\ddot{a}a - \dot{a}^2}{a^2}, \quad (10)$$

$$\Gamma^l_{xx} \Gamma^k_{lk} = \Gamma^l_{yy} \Gamma^k_{lk} = \Gamma^l_{zz} \Gamma^k_{lk} = 3\dot{a}^2, \quad (11)$$

$$\Gamma^l_{k\tau} \Gamma^k_{l\tau} = 3 \frac{\dot{a}^2}{a^2}, \quad \Gamma^l_{kx} \Gamma^k_{lx} = \Gamma^l_{ky} \Gamma^k_{ly} = \Gamma^l_{kz} \Gamma^k_{lz} = 2\dot{a}^2. \quad (12)$$

A nem eltűnő Ricci-tenzor komponensek így:

$$R_{\tau\tau} = -3 \frac{\ddot{a}}{a}, \quad (13)$$

$$R_{xx} = R_{yy} = R_{zz} = \ddot{a}a + 2\dot{a}^2. \quad (14)$$

A vegyes indexű komponenseket a metrikus tenzor felhasználásával lehet megkapni:

$$R^i_j = R_{kj} g^{ki}, \quad (15)$$

$$R^{\tau}_{\tau} = 3 \frac{\ddot{a}}{a}, \quad R^x_x = R^y_y = R^z_z = \frac{\ddot{a}}{a} + 2 \frac{\dot{a}^2}{a^2}. \quad (16)$$

A Ricci-skalár a Ricci-tenzor nyoma:

$$R = R^i_i = 6 \left( \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} \right). \quad (17)$$

Az Einstein-tenzort definiáló képlet:

$$G^a_b = R^a_b - \frac{1}{2} R g^a_b = R^a_b - \frac{1}{2} R, \quad (18)$$

amelyből megkaphatók a nem eltűnő komponensek:

$$G^{\tau}_{\tau} = -3\frac{\dot{a}^2}{a^2}, \quad (19)$$

$$G^x_x = G^y_y = G^z_z = -2\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\dot{a}^2}{a^2}. \quad (20)$$

### 1.1.2. Mozgásegyenletek

A téridőt kitöltő anyag térbeli és időbeli eloszlása a téridő geometriája ismeretében az Einstein-egyenletből meghatározható, amely a  $\frac{8\pi G}{3} = 1$ ,  $c = 1$  mértékegységekben:

$$G^a_b = 3T^a_b. \quad (21)$$

Itt  $G^a_b$  az Einstein-tenzor és  $T^a_b$  az energia-impulzus tenzor.

A Friedmann-téridő esetében az energia-impulzus tenzor diagonális (mivel az Einstein-tenzor is az), és a vegyes indexű, nem eltűnő komponensei a következők:

$$T^{\tau}_{\tau} = -\rho, \quad (22)$$

$$T^x_x = T^y_y = T^z_z = p. \quad (23)$$

Ez egy ideális folyadék energia-impulzus tenzora, melynek energiasűrűsége  $\rho$ , izotróp nyomása pedig  $p$ .

A továbbiakban néhány nevezetes összefüggést vezetünk le a sík Friedmann-téridő esetére, amelyek a geometria és az anyag dinamikája közötti kapcsolat másfajta kifejezései. A (21) Einstein-egyenlet két oldalán szereplő tenzorok  $(\tau, \tau)$  komponenseinek összehasonlításával adódik a Friedmann-egyenlet:

$$H^2 = \rho. \quad (24)$$

A Hubble-paraméter időderiváltját kifejtve adódik:

$$\dot{H} = \frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\dot{a}^2}{a^2} \longrightarrow \frac{\ddot{a}}{a} = \dot{H} + H^2. \quad (25)$$

Az Einstein-tenzoregyenletnek a térszerű komponensekre vonatkozó részéből 25 felhasználásával kapjuk:

$$3p = -2\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\dot{a}^2}{a^2} = -2(\dot{H} + H^2) - H^2 = -2\dot{H} - 3\rho. \quad (26)$$

Átrendezve kapható a Raychaudhuri-egyenlet:

$$\dot{H} = -\frac{3}{2}(\rho + p). \quad (27)$$

A 27 bal oldalát a (24), (25) egyenletek segítségével  $a$ -val és deriváltjaival kifejezve megkapjuk a második Friedmann-egyenletet:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{1}{2}(\rho + 3p). \quad (28)$$

Az első Friedmann-egyenlet idő szerinti deriváltjából

$$\dot{\rho} = 2H\dot{H}, \quad (29)$$

$\dot{H}$ -ot kifejezve és a Raychaudhuri-egyenletbe behelyettesítve kapjuk a folytonossági egyenletet:

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + p) = 0. \quad (30)$$

### 1.1.3. A Friedmann-univerzum összetétele

A (24), (27), (28) és (30) egyenletek közül 2 független. A független változók száma 3:  $\rho$  - energiasűrűség,  $p$  - izotróp nyomás,  $H$  - Hubble-paraméter (amiből idő szerinti integrálással megkapható  $a$ , a skálafaktor). Az egyenletrendszer záró összefüggést az állapotegyenlet adja meg. Ez kapcsolatot állapít meg az energiasűrűség és a nyomás között, legegyszerűbb esetben a kapcsolat lineáris:

$$p = w\rho. \quad (31)$$

Elegendően nagy léptékben nézve az Univerzumot, az azt alkotó egyik folyadékkomponens részecskéinek a galaxisok tekinthetők, melyek ritkán ütköznek egymással. E folyadék komponens nyomása elhanyagolható. A  $w = 0$  állapotegyenletet teljesítő anyagkomponenst pornak nevezik. Jelenlegi modellek szerint két részből, a barionikus és a sötét anyagból áll. Az utóbbit alkotó részecskék nem ismertek. Létezésének feltételezése a galaktikus forgásgörbék, az Ia típusú szupernóvák adataiból származtatott luminozitás-vöröseltolódás reláció és a kozmikus mikrohullámú háttérsugárzás anizotrópiáinak elméleti magyarázatához szükséges.

A kozmikus mikrohullámú háttérsugárzás felfedezése mutatja, hogy van egy, az egész Univerzumot kitöltő elektromágneses sugárzás. A sugárzás állapotegyenletének paramétere:  $w = 1/3$ .

A megfigyelhető világegyetem 1999-ben felfedezett [4] gyorsuló tágulásának magyarázatához szükség van egy újabb anyagkomponens bevezetésére. A gyenge energiafeltétel szerint  $\rho > 0$ . A  $\rho + 3p > 0$  feltételt erős energiafeltételnek nevezzük. Az erős energiafeltétel teljesülése esetén az Univerzum tágulása lassuló,  $\ddot{a} < 0$ . Azt az anyagkomponenst, mely sérti az erős energiafeltételt, sötét energiának nevezzük. Amikor a sötét energia dominál, az Univerzum tágulása gyorsuló,  $\ddot{a} > 0$ . A gyenge energiafeltétel teljesülése esetén az erős energiafeltétel csak akkor sérülhet, ha  $p < 0$ . A sötét energia

leegyszerűbb modellje a kozmológiai állandó, amit a  $w = -1$  paraméterű állapotegyenlet jellemez. Ennek az anyagkomponensnek a létezését az Ia típusú szupernóvák adataiból kapott luminozítás-vöröseltolódás reláció mellett a kozmikus mikrohullámú háttérsugárzás eloszlása is igazolja.

A három elemi folyadék komponens esetére levezetjük a skálafaktor időfejlődését.

**Sugárzásdominált univerzumban ( $p = \rho/3$ ):**

A folytonossági egyenletbe (30) helyettesítve az állapotegyenletet:

$$\dot{\rho} + 4\frac{\dot{a}}{a}\rho = 0, \quad (32)$$

amiből kapjuk, hogy

$$(\ln \rho)' = \frac{\dot{\rho}}{\rho} = -4\frac{\dot{a}}{a} = (\ln a^{-4})'. \quad (33)$$

Legyen egy választott időpontban  $a = a_0$  és  $\rho = \rho_0$ , ekkor a fenti differenciálegyenlet megoldása

$$\rho = \rho_0 \left(\frac{a_0}{a}\right)^4. \quad (34)$$

A (24) Friedmann-egyenletbe helyettesítve, és kihasználva, hogy a megfigyelések szerint  $\dot{a} > 0$ :

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \rho_0 \left(\frac{a_0}{a}\right)^4 \longrightarrow \frac{\dot{a}}{a} = \sqrt{\rho_0} \left(\frac{a_0}{a}\right)^2 \longrightarrow a\dot{a} = \frac{d}{d\tau} \frac{a^2}{2} = \sqrt{\rho_0} a_0^2. \quad (35)$$

Integrálva, az integrálási konstanszt az  $a(t=0) = 0$  feltétellel rögzítve:

$$a^2(t) = 2\sqrt{\rho_0} a_0^2 t, \quad (36)$$

tehát  $a \propto t^{1/2}$ .

**Pordominált univerzumban ( $p = 0$ ):**

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}\rho = 0 \longrightarrow \frac{\dot{\rho}}{\rho} = -3\frac{\dot{a}}{a} \longrightarrow (\ln \rho)' = (\ln a^{-3})'. \quad (37)$$

$$\rho = \rho_0 \left(\frac{a_0}{a}\right)^3. \quad (38)$$

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \rho_0 \left(\frac{a_0}{a}\right)^3 \longrightarrow \frac{\dot{a}}{a} = \sqrt{\rho_0} \left(\frac{a_0}{a}\right)^{3/2} \longrightarrow a^{1/2}\dot{a} = \frac{d}{d\tau} \frac{2}{3} a^{3/2} = \sqrt{\rho_0} a_0^{3/2}. \quad (39)$$

$$a(t=0) = 0 \longrightarrow a = \left(\frac{3}{2}\right)^{2/3} \rho_0^{1/3} a_0 t^{2/3}, \quad (40)$$

tehát  $a \propto t^{2/3}$ .

**Kozmológiai konstans által dominált univerzumban ( $p = -\rho$ ):**

$$\dot{\rho} = 0 \longrightarrow \rho = \rho_\Lambda = const. \quad (41)$$

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \rho_\Lambda \longrightarrow \frac{\dot{a}}{a} = \sqrt{\rho_\Lambda} \longrightarrow (\ln a)' = \sqrt{\rho_\Lambda}. \quad (42)$$

$$a(t=0) = a_0 \longrightarrow a = a_0 \exp^{\sqrt{\rho_\Lambda} t}. \quad (43)$$

A skálafaktor időfejlődése exponenciális növekedést jelez.

## 1.2. SNIa szupernóva adatok és a $\Lambda$ CDM modell

Belátható [3], hogy a Friedmann-univerzumban az elektromágneses sugárzás  $\nu_{em}$  kibocsájtott és  $\nu_{rec}$  megfigyelt frekvenciája, a  $z$  vöröseltolódás, valamint a skálafaktor megfigyeléskori  $a_0$  és emittáláskori  $a$  értékei között a következő összefüggés áll fenn:

$$\frac{\nu_{em}}{\nu_{rec}} \equiv 1 + z = \frac{a_0}{a}, \quad (44)$$

Amikor  $\dot{a} > 0$ , az Univerzum tágul, és a távoli galaxisok fényének vöröseltolódása tapasztalható. Ha  $\dot{a} < 0$  állna fenn, a távoli galaxisok fényében kékeltoódás lenne megfigyelhető.

A  $\Lambda$ CDM modellben por, sugárzás és kozmológiai állandó is szerepel. Bevezetjük az

$$\Omega_{d,r,\Lambda} = \frac{\rho_{d,r,\Lambda}}{H^2} \Big|_0 \quad (45)$$

paramétert, ahol a 0 index a hányados jelenlegi értékére,  $d$  a porra,  $r$  a sugárzásra és  $\Lambda$  a kozmológiai állandóra utal. Felhasználva, hogy  $\rho_d \sim 1/a^3$ ,  $\rho_r \sim 1/a^4$  és  $\rho_\Lambda = const$ , a Friedmann-egyenlet (24) az alábbi alakba írható:

$$\frac{H^2}{H_0^2} = \Omega_\Lambda + \Omega_d \left(\frac{a_0}{a}\right)^3 + \Omega_r \left(\frac{a_0}{a}\right)^4 = \Omega_\Lambda + \Omega_d(1+z)^3 + \Omega_r(1+z)^4. \quad (46)$$

Az egyenlet  $a = a_0 \longrightarrow H = H_0$ -ra az

$$\Omega_\Lambda + \Omega_d + \Omega_r = 1 \quad (47)$$

kapcsolatot adja. Tehát  $\Omega_\Lambda$ ,  $\Omega_d$  és  $\Omega_r$  közül csak kettő független.

A kozmikus háttérsugárzás majdnem tökéletes feketetest-sugárzás [3]. A feketetest-sugárzás energiasűrűsége a hőmérsékletének függvénye:

$$\rho_r = \alpha T^4, \quad (48)$$

ahol  $\alpha = \frac{\pi^2 k_B^4}{15\hbar^3}$ ,  $k_B$  a Boltzmann-állandó. Bevezetve a  $H_0 = 100h \frac{km}{s Mpc}$  kifejezéssel a dimenziótlan  $h$  paramétert és figyelembe véve, hogy mérések alapján  $T_0 = 0,275K$ , a sugárzáskomponens mennyiségére kapjuk:

$$\Omega_r = 2,47 \times 10^{-5} h^2. \quad (49)$$

A galaxisok távolodásának mértékéből  $h \approx 0,72$ , így  $\Omega_r \ll 1$ , elhanyagolható  $\Omega_\Lambda$  és  $\Omega_d$  mellett. A nagyléptékű struktúrák, a kozmikus mikrohullámú háttérsugárzás anizotrópiáinak



mért eloszlása és az Ia típusú szupernóva-megfigyelésekből származtatott luminozítás-vöröseltolódás reláció alapján a  $\Lambda$ CDM modell jól egyezik a megfigyelésekkel, ha  $\Omega_\Lambda \approx 0,692$ ,  $\Omega_d \approx 0,308$ . A luminozítástávolság-vöröseltolódás reláció definíciója:

$$d_L(z) = \left( \frac{L}{4\pi F} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (50)$$

Itt  $L$  a forrás luminozitása (az időegység alatt kibocsájtott energia),  $F$  a teleszkóp által detektált fotonfluxus (a teleszkóp fénysugárra merőleges felületén időegység alatt detektált energia).

A források luminozítástávolsága és vöröseltolódása közötti összefüggés elméleti úton az alábbi módon származtatható:

$$d_L(z) = (1+z) \int_0^z \frac{dz^*}{H(z^*)}. \quad (51)$$

A kifejezés a Hubble-paraméter időfejlődésétől függ.

Az Ia típusú szupernóvák színeképét hidrogénhiány jellemzi. Ezen belül az Ia típusúaknál jellemző a szilícium előfordulása. Az Ia típusú szupernóvák az elképzelések szerint szoros kettősök, egy fehér törpéből és egy kísérő óriásból álló rendszerek. Az utóbbiról anyag áramlik át a fehér törpére, fokozatosan növelve annak tömegét. Amikor a fehér törpe tömege eléri a Chandrasekhar-határt (1,4-1,5 naptömeg), az összeroskad. Az ekkor beinduló szénfúzió pedig teljesen szétszakítja a csillagot. Mivel hasonló állapotú fehér törpék robbanásáról van szó, így maximum idején luminozitásuk egyforma. Ezért standard gyertyaként szolgálnak az Univerzumban. A megfigyelt fluxusuk, és annak ismeretében, hogy milyen vöröseltolódásnál helyezkednek el, a luminozítástávolság-vöröseltolódás reláció segítségével következtethetünk a kozmológiai paraméterekre.

## 2. A tachion skalármező kozmológiai modell

Az egydimenziós, szabad részecske relativisztikus Lagrange-függvénye:

$$L_{rel} = -m\sqrt{1 - \dot{q}^2}, \quad (52)$$

ahol  $m$  a részecske tömege és  $q(t)$  a helykoordinátája. A következő megfeleltetésekkel:

$$\begin{aligned} q(t) &\longrightarrow T(x^a) \\ \dot{q}(t) &\longrightarrow -\partial^a T \partial_a T \\ m &\longrightarrow V(T) \end{aligned} \quad (53)$$

a relativisztikus részecske Lagrange-függvényéből az alábbi Lagrange-függvényhez jutunk:

$$L_{tach} = -V(T)\sqrt{1 + g^{ab}\nabla_a T \nabla_b T}, \quad (54)$$

ahol  $T$  a skalármező,  $V$  a potenciál. Az (54) Lagrange-függvénnyel jellemzett  $T$  mezőt tachion mezőnek nevezzük.

A kozmológiai szimmetriáknak megfelelően feltehetjük, hogy  $T$  csak a kozmológiai időtől függ. Ekkor a tachion mező energia-impulzus tenzora ideális folyadékot jellemez. Ennek az ideális folyadéknak az energiasűrűsége és nyomása:

$$\rho_T = \frac{V(T)}{\sqrt{1 - \dot{T}^2}}, \quad (55)$$

$$p_T = -V(T)\sqrt{1 - \dot{T}^2}. \quad (56)$$

A két egyenlet hányadosából

$$\dot{T}^2 = \frac{\rho_T + p_T}{\rho_T}. \quad (57)$$

Az ideális folyadékokra jellemző (27) Raychaudhuri- és (24) Friedmann-egyenletek hányadosa a következő:

$$\frac{\rho_T + p_T}{\rho_T} = -\frac{2}{3} \frac{\dot{H}}{H^2}, \quad (58)$$

így

$$0 < \dot{T}^2 = -\frac{2}{3} \frac{\dot{H}}{H^2}. \quad (59)$$

Az (55), (56) és (24) összefüggések segítségével kifejezhető a tachionpotenciál a Hubble-paraméterrel és annak időderiváltjával:

$$V = \sqrt{-p_T \rho_T} = \sqrt{[-(p_T + \rho_T) + \rho_T] \rho_T} = \sqrt{\left(\frac{2}{3} \dot{H} + H^2\right) H^2}. \quad (60)$$

## 2.1. A kozmológiai evolúció rekonstrukciója tachion mezővel kétkomponensű folyadék esetén

Az Univerzum késői fejlődési szakaszát egy kétkomponensű ideális folyadékkal jól lehet modellezni. A komponensek állapotegyenletei:

$$p_1 = w\rho_1, \quad p_\Lambda = -\rho_\Lambda, \quad (61)$$

ahol  $-1 \leq w \leq 1$ , és  $\Lambda$  a kozmológiai állandó. A  $\rho = \rho_1 + \rho_\Lambda$  és  $\Lambda = \rho_\Lambda$  jelölésekkel a két komponensből álló rendszer nyomása:

$$p = w\rho - (1+w)\Lambda. \quad (62)$$

Ez a folytonossági egyenletbe helyettesíthető:

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(1+w)(\rho - \Lambda) = 0, \quad (63)$$

aminek átrendezésével kapjuk:

$$\frac{\dot{\rho}}{\rho - \Lambda} = \frac{d}{d\tau} \ln(\rho - \Lambda) = 3(1+w)\frac{\dot{a}}{a} = \frac{d}{d\tau} \ln(a^{-3(1+w)}). \quad (64)$$

Az egyenlet integrálásából, az integrálási állandót úgy választva, hogy  $a = a_0$  esetén  $\rho = \rho_0$  teljesüljön, kapjuk:

$$\rho - \Lambda = (\rho_0 - \Lambda) \left(\frac{a_0}{a}\right)^{3(1+w)}. \quad (65)$$

A következő változócserét hajtjuk végre:

$$x = \sqrt{\frac{\Lambda}{\rho_0 - \Lambda} \left(\frac{a}{a_0}\right)^{\frac{3(1+w)}{2}}}. \quad (66)$$

A (24) Friedmann-egyenlet, (65) és (66) felhasználásával kapható a következő differenciálegyenlet:

$$\frac{\dot{x}}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{3(1+w)\sqrt{\Lambda}}{2}. \quad (67)$$

Ez az egyenlet egyszerűen integrálható az  $x = \sinh(y)$  változócserével és a  $\frac{d}{dx}(\sinh(x)\cosh(x)) = 2\cosh^2(x) - 1$  összefüggés felhasználásával. Az  $x$ -be való visszahelyettesítéssel megkapható a skálafaktor evolúciója, amely a következő:

$$\left(\frac{a}{a_0}\right)^{\frac{3(1+w)}{2}} = \sqrt{\frac{\rho_0 - \Lambda}{\Lambda}} \sinh\left(\frac{3(1+w)\sqrt{\Lambda}}{2}t\right). \quad (68)$$

A tachion mező időfüggvényének deriváltja (59) és (68) felhasználásával nyerhető.

$$\dot{T} = \mp \sqrt{-\frac{2}{3} \frac{\dot{H}}{H^2}} = \mp \frac{\sqrt{1+w}}{\cosh\left(\frac{3\sqrt{\Lambda}(1+w)}{2}t\right)}. \quad (69)$$

Integrálással megkapható a mező  $T$  értéke:

$$T = \frac{2}{3\sqrt{(1+w)\Lambda}} \left[ \frac{\pi}{2} \mp \frac{\pi}{2} \mp \arctan \sinh \left( \frac{3(1+w)\sqrt{(\Lambda)}t}{2} \right) \right]. \quad (70)$$

(69) és (70) hányadosából megkapható a  $H$  Hubble-paraméter időfejlődése:

$$H = \sqrt{\Lambda} \coth \left( \frac{3(1+w)\sqrt{\Lambda}t}{2} \right), \quad (71)$$

melynek idő szerinti deriváltja

$$\dot{H} = \frac{3(1+w)\Lambda}{2} - \frac{1}{\sinh^2 \left( \frac{3(1+w)\sqrt{\Lambda}t}{2} \right)}. \quad (72)$$

A tachion mező potenciálja (60) és (71)-(72) felhasználásával számítható ki:

$$V(t) = \sqrt{H^2 \left( \frac{2}{3} \dot{H} + H^2 \right)} = \Lambda \frac{\cosh^2 \left( \frac{3\sqrt{\Lambda}(1+w)t}{2} \right) - (1+w)}{\sinh \left( \frac{3\sqrt{\Lambda}(1+w)t}{2} \right)}. \quad (73)$$

A (70) kifejezés behelyettesítésével kapjuk:

$$V(T) = \frac{\Lambda \sqrt{1 - (1+w) \cos^2 \left( \frac{3}{2} \sqrt{\Lambda(1+w)}(T) \right)}}{\sin^2 \left( \frac{3}{2} \sqrt{\Lambda(1+w)}(T) \right)}. \quad (74)$$

Bevezetve az

$$y = \cos \left( \frac{3}{2} \sqrt{\Lambda(1+w)}T \right) \quad (75)$$

jelölést, a potenciál kifejezése:

$$V(T) = \frac{\Lambda \sqrt{1 - (1+w)y^2}}{1 - y^2}. \quad (76)$$

## 2.2. A tachion skalármező dinamikája

A (30) folytonossági egyenletet fejtjük ki (55) és (56) felhasználásával.

$$\dot{\rho}_T = \frac{\partial V}{\partial T} \frac{s}{\sqrt{1-s^2}} + \frac{V s \dot{s}}{\sqrt{1-s^2}^3}. \quad (77)$$

$$3H(\rho_T + p_T) = 3H \frac{V}{\sqrt{1-s^2}} - 3H \sqrt{1-s^2} V. \quad (78)$$

Bevezettük az  $s = \dot{T}$  változót. Az előző két mennyiség összege a folytonossági egyenlet miatt 0. Így  $\sqrt{1-s^2}$ -tel átszorítás után:

$$0 = \frac{\partial V}{\partial T} s + \frac{V s \dot{s}}{1-s^2} + 3HV - 3HV(1-s^2). \quad (79)$$

Ezt  $V$ -vel osztva és átrendezve kapjuk:

$$\frac{\dot{s}}{1-s^2} + 3Hs + \frac{1}{V} \frac{\partial V}{\partial T} = 0. \quad (80)$$

A fixpontokat az  $\dot{s} = 0$ ,  $s = 0$  kikötések adják. A (80) összefüggés alapján ezekkel ekvivalens feltételrendszer  $s = 0$ ,  $\frac{\partial V}{\partial T} = 0$ .

A viselkedés kvalitatív jellege szerint a  $w$  paraméterértékek két osztálya különíthető el.

$-1 < w < 0$ :

A potenciál jól definiált az  $y^2 < 1$  tartományban. A potenciál szinguláris  $y^2 = 1$ -re. A  $H^2 = \rho_T = \frac{V}{\sqrt{1-s^2}}$  egyenlet biztosítja, hogy  $s^2 < 1$  az evolúció során. A Ricci-skalár kifejezése:

$$R = \frac{3V(4-3s^2)}{\sqrt{1-s^2}}. \quad (81)$$

Ez szinguláris, ha a potenciál az. A másik szingularitási hely  $s^2 = 1$ .

Belátható, hogy  $y^2 \rightarrow 1$ -re vagy  $s^2 \rightarrow 1$ -re  $a \rightarrow 0$ , vagyis ezek az esetek a standard Ősrobbanásnak felelnek meg [5]. A tartomány belsejében egyetlen fixpont van, amely az  $s_0 = 0$  és  $y_0 = 0$  értékekkel jellemezhető. Ez a fixpont attraktív pont, azok a görbék, amelyek elegendően közel kerülnek hozzá, bele is futnak. A fixpontban az univerzum fejlődését  $H = \sqrt{\Lambda}$  adja, ami a kozmológiai konstans esete. Az esethez tartozó potenciál az (1a), míg a trajektóriák az  $(T, s)$  fázissíkban a (1b) ábrán láthatók.

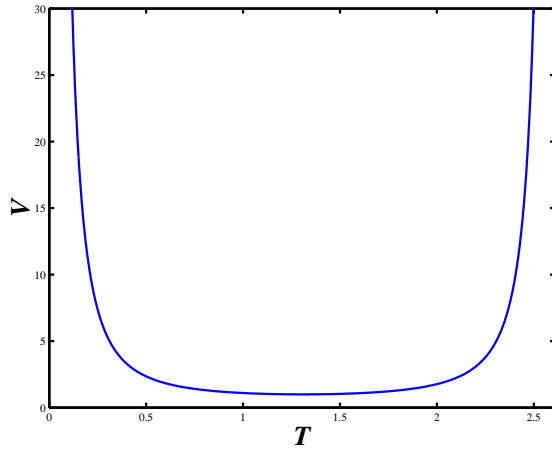
$0 < w < 1$ :

A potenciál valós a  $s^2 < 1$ ,  $y^2 \leq \frac{1}{1+w}$  tartományban. Ebben a tartományban egy attraktív pont és két instabil pont található, amelyek a (2b) ábrán középen, illetve a pirossal jelölt trajektóriák metszéspontjaiban láthatók. A (2a) ábrán is látható ez a viselkedés, a stabil pontnak a potenciál minimumhelye, az instabil pontoknak a maximumhelyei felelnek meg.

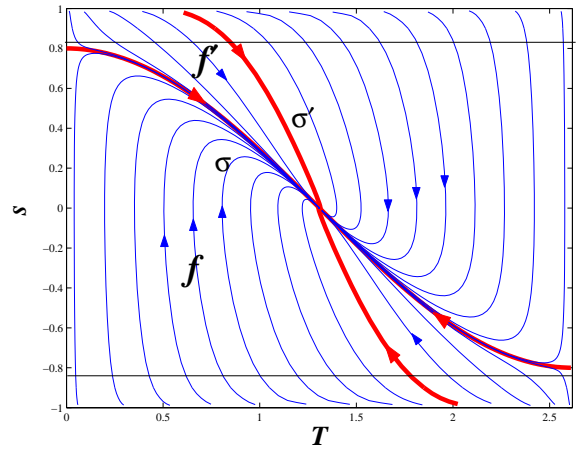
Azonban a potenciál képzetessé is válhat  $w > 0$  esetén, ez látszik a (74) kifejezésből, hiszen a gyökjel alatti kifejezés a számlálóban negatívvá válhat. A dinamika biztosítja azonban, hogy amikor  $V$  képzetessé válik, akkor  $s^2$  nagyobbá válik, mint 1. Így a dinamikai egyenletek valóságosak maradnak. A potenciál valósból képzetesbe négy sarokponton mehet át. Ezen pontoknál nem lép fel téridő-singularitás, a Ricci-skalár véges marad. A (2b) ábrán  $P, Q, P'$  és  $Q'$  jelöli a négy sarokpontot. Abban a fejlődési szakaszban, amikor  $V(T)$  valós, az energiasűrűség és a nyomás:

$$\rho = \frac{V(T)}{\sqrt{1-s^2}}, \quad (82)$$

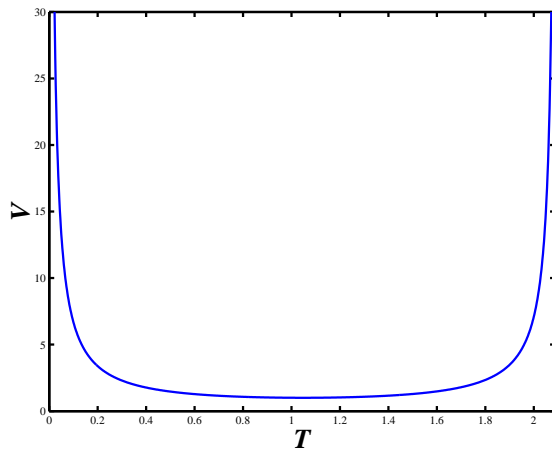
$$p = -V(T)\sqrt{1-s^2}. \quad (83)$$



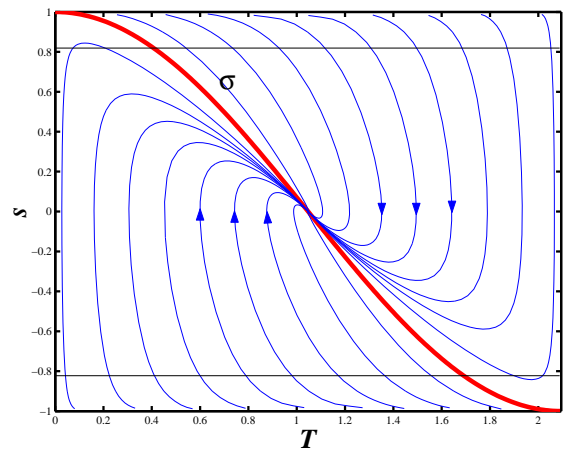
(a) A potenciál a  $w < 0$  esetben



(b) A fázisportré a  $w < 0$  esetben



(c) A potenciál a  $w = 0$  esetben



(d) A fázisportré  $w = 0$  esetben

1. ábra. A potenciál és a fázisportré a  $w < 0$  és a  $w = 0$  esetekben. Forrás: [5].

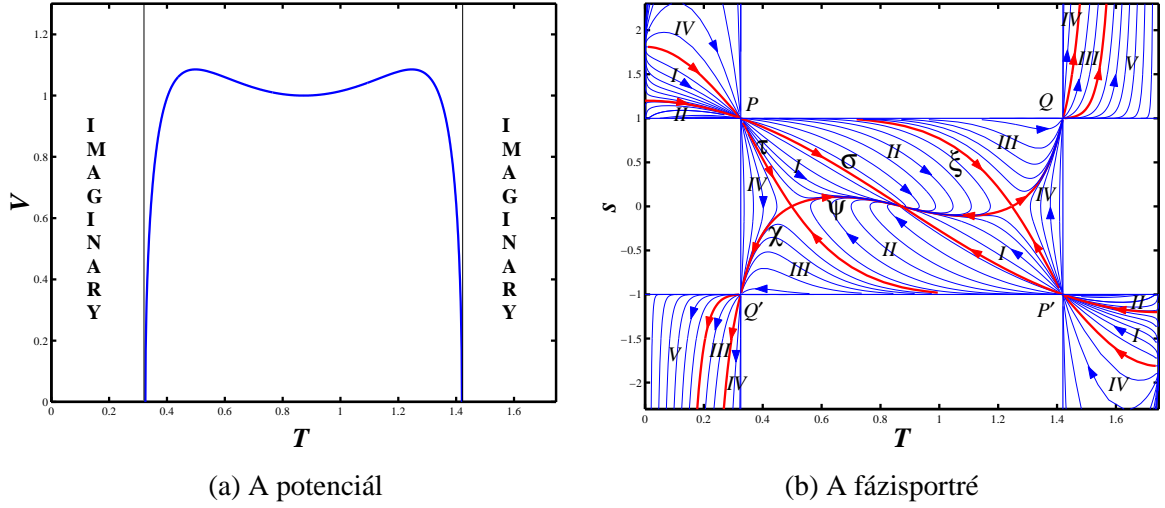
Mivel a nyomás negatív, a mező ebben a fejlődési szakaszban sötét energiaként viselkedhet. Amikor  $s^2 > 1$ , a  $V(T)$  potenciál képzetes, így bevezethetünk egy új,  $W(T) = -iV(T)$  valós potenciált. E fejlődési szakaszban a mező energiasűrűsége és nyomása:

$$\rho = \frac{W(T)}{\sqrt{s^2 - 1}}, \quad (84)$$

$$p = W(T)\sqrt{s^2 - 1}. \quad (85)$$

A mező nyomása pozitív, így a kozmológiai tágulás lassuló.

Figyelemre méltó, hogy  $s^2 = \infty$  esetén a mező (84) energiasűrűsége, és így a Hubble-paraméter is eltűnik. Mivel a skálafaktor véges, a Hubble-paraméter eltűnése azt jelenti, hogy a skálafaktor deriváltja 0, tehát az Univerzum tágulása megáll. A (85) nyomás szinguláris, ezért (28) miatt a skálafaktor második deriváltja mínusz végtelen. Ezt a szingularitást Big Brake-nek (Nagy Fékezés) nevezik. A (2b) ábrán a *III*, *IV* és *V* tartományok trajektóriái rendelkeznek ezzel a tulajdonsággal.



2. ábra. A potenciál és a fázisportré a  $w > 0$  esetben. Forrás: [5]

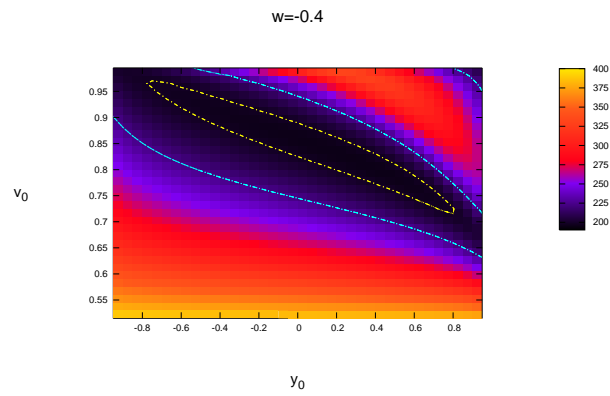
### 2.3. Összevetés a megfigyelésekkel, jövőbeli evolúció

A luminozitástávolság és a szupernóvák adatainak illesztését [6]-ban publikálták. A cikkben megmutatták, hogy a tachion skalármező kozmológiai modell nincs ellentmondásban a megfigyelésekkel. A (3), (4) és (5) ábrák a megfigyelési adatok és a modell illeszkedését ábrázolják a  $\chi^2$ -teszt szerint az  $(y_0, v_0)$  paramétersíkon, ahol

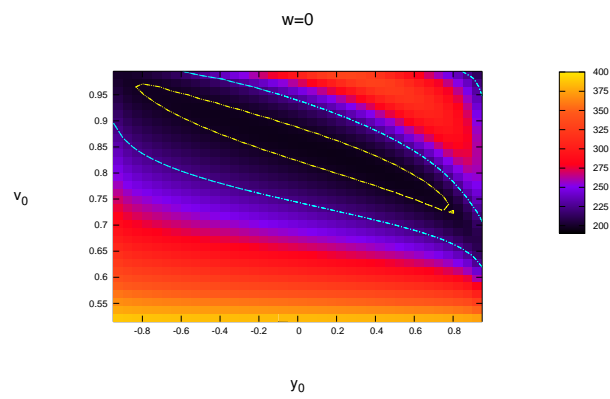
$$y = \cos\left(\frac{3}{2}\sqrt{\Lambda(1+w)T}\right), \quad (86)$$

$$v_0 = \frac{1}{1+s_0^2}. \quad (87)$$

A  $\chi^2$  értékeket az ábrák melletti színskálákról lehet leolvasni. A kisebb értékek jelentenek jobb illeszkedést. A kontúrok a 95.4% ( $2\sigma$ )-hoz és a 68.3% ( $1\sigma$ )-hoz tartozó konfidenciatartományok határainak felelnek meg.



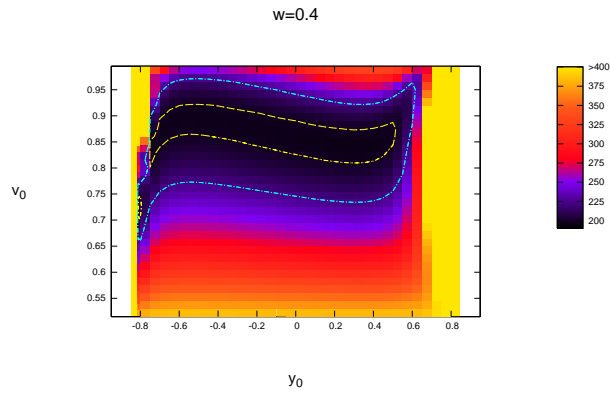
3. ábra. A modell és a szupernóvaadatokat illeszkedése  $w = -0.4$  esetén



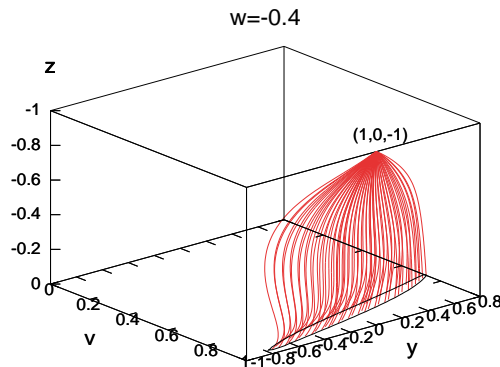
4. ábra. A modell és a szupernóvaadatokat illeszkedése  $w = 0$  esetén

A jövőbeli evolúció numerikus számítását a szupernóvaadatokkal jól illeszkedő kezdeti paraméterekre [6]-ban végezték el. A (6), (7) és (8) ábrákon láthatók a  $w$  paraméter különböző értékei melletti lehetséges trajektóriák. A de Sitter univerzum az ábrán a  $(v_{dS} = 1, y_{dS} = 0, z_{ds} = -1)$  pontként, a Big Brake szingularitás pedig a  $(v_{BB} = 0, -1 < y_{BB} < 0, -1 < z_{BB} < 0)$  síkban jelenik meg.

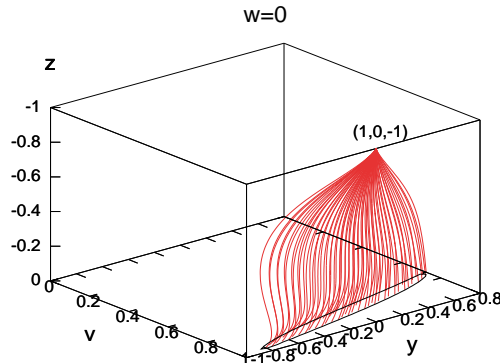




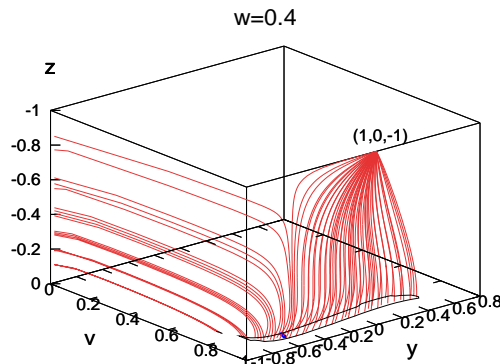
5. ábra. A modell és a szupernóvaadatok illeszkedése  $w = 0.4$  esetén



6. ábra. A jövőbeli evolúció  $w = -0.4$  esetén



7. ábra. A jövőbeli evolúció  $w = 0$  esetén



8. ábra. A jövőbeli evolúció  $w = 0.4$  esetén

## Hivatkozások

- [1] Keresztes Zoltán: *Randall-Sundrum 2-es típusú bránelméletek és tachion sötét energia modell* (doktori értekezés)
- [2] [http://en.wikipedia.org/wiki/Hercules-Corona\\_Borealis\\_Great\\_Wall](http://en.wikipedia.org/wiki/Hercules-Corona_Borealis_Great_Wall)
- [3] Hobson M., Efstathiou G., Lasenby A.: *General relativity.. an introduction for physicists*, Cambridge University Press (2006)
- [4] Saul Perlmutter, Michael S. Turner, and Martin White: *Constraining Dark Energy with Type Ia Supernovae and Large-Scale Structure*, *Physical Review Letters*, July 26, 1999, Volume 83, Issue 4, pp. 670-673)
- [5] V. Gorini, A. Yu. Kamenshchik, U. Moschella, V. Pasquier, *Phys. Rev. D* **69** 123512 (2004)
- [6] Z. Keresztes és tsai, *Phys. Rev. D* **79** 083504 (2009); e-print: arXiv:0901.2292
- [7] Z. Keresztes és tsai, *Phys. Rev. D* **82** 123534 (2010); e-print: arXiv:1009.0776
- [8] Z. Keresztes és tsai, *Phys. Rev. D* **86** 063522 (2012); e-print: arXiv:1204.1179
- [9] Z. Keresztes és tsai, *Phys. Rev. D* **88** 023535 (2013); e-print: arXiv:1304.6355
- [10] R. M. Wald: *General Relativity*, The University of Chicago Press (1984)