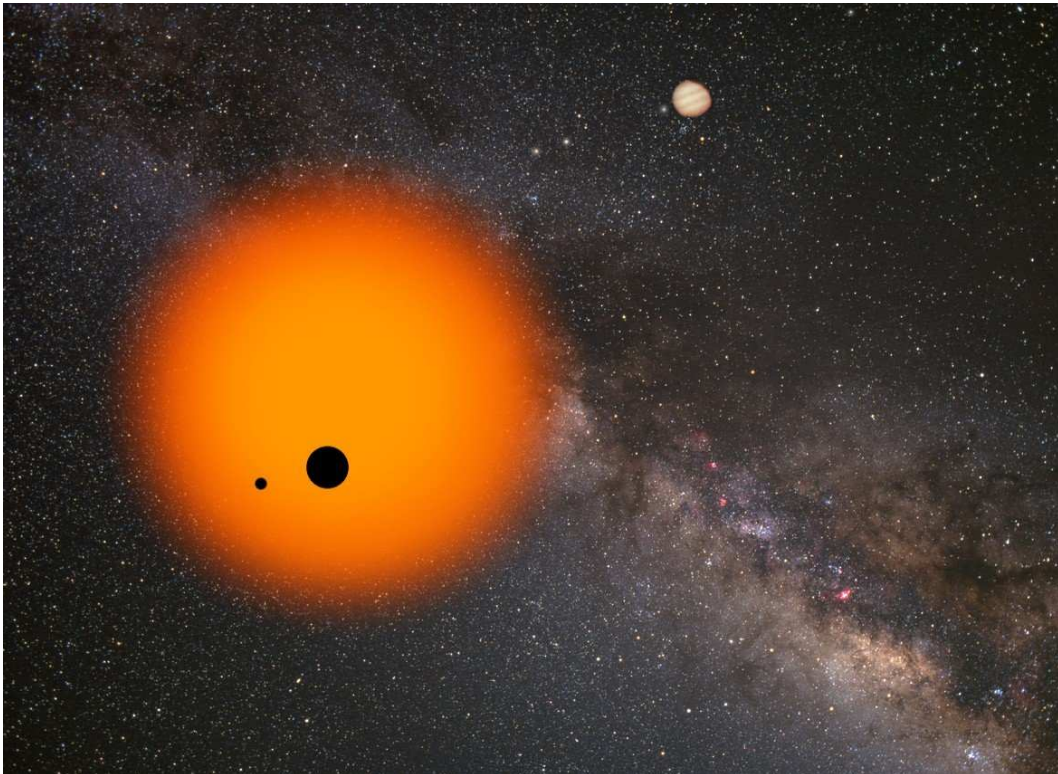


SZEGEDI TUDOMÁNYEGYETEM  
KÍSÉRLETI FIZIKAI TANSZÉK

# „Exoholdak” sugarának, tömegének és sűrűségének meghatározása fedési rendszerekben

TDK dolgozat



Készítette: Simon Attila, V. éves csillagász szakos hallgató  
Témavezetők: Dr. Szabó M. Gyula, tudományos segédmunkatárs  
Dr. Szatmáry Károly, habil. egyetemi docens

Szeged, 2006

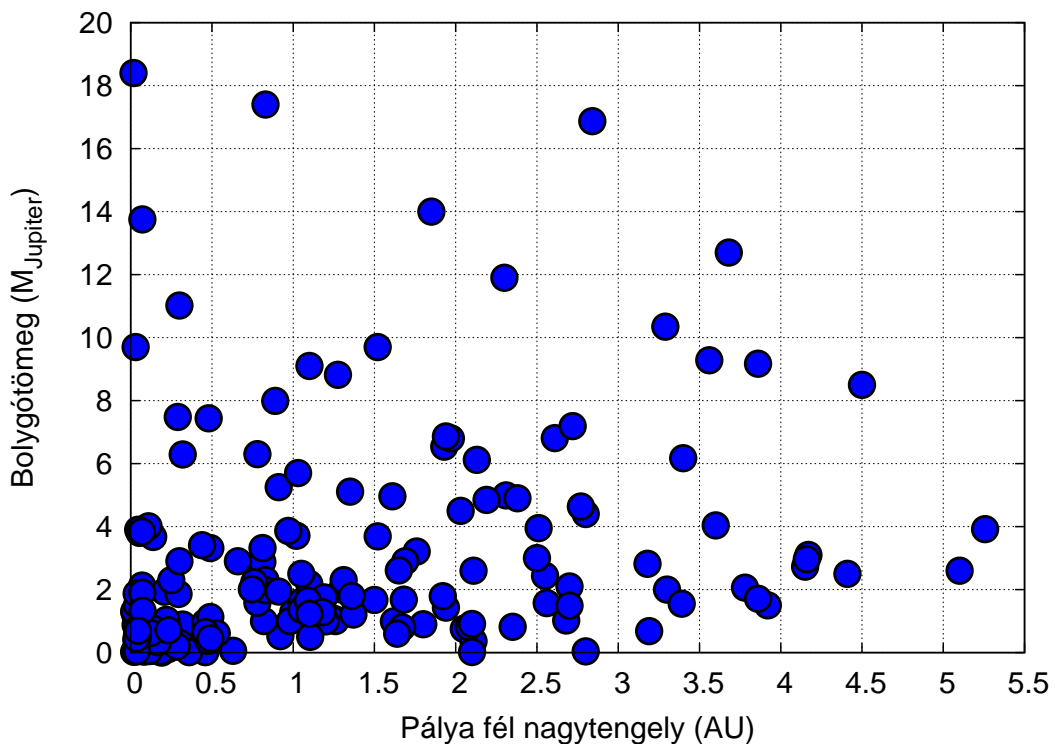
# Tartalomjegyzék

Bevezetés	2
<b>1. Exorendszerek</b>	<b>4</b>
1.1. Kutatási módszerek . . . . .	4
1.2. Kutató programok . . . . .	6
1.2.1. HAT (Hungarian Automated Telescope - Magyar Automatizált Teleszkóp) . . . . .	6
1.2.2. TrES (Transatlantic Exoplanet Survey - Transzatlanti exobolygó vizsgálat) . . . . .	6
1.2.3. SuperWASP (Wide Angle Search for Planets - Bolygók széles látószögű keresése) . . . . .	6
1.2.4. Nagylátómezejű robottávcsövek . . . . .	7
1.2.5. OGLE (Optical Gravitational Lensing Experiment - Optikai gravitációs lencse kísérlet) . . . . .	7
1.2.6. COROT (CONvection, ROTation and planetary Transits - Konvekció, forgás és bolygóátvonulás) . . . . .	7
1.2.7. KEPLER . . . . .	8
1.3. Schneider-katalógus . . . . .	8
<b>2. Exorendszerek dinamikája</b>	<b>9</b>
2.1. Dinamikai stabilitás . . . . .	9
2.2. Az elfogadott kinematikai modell (Sartoretti-Schneider, 1999) . . . . .	9
<b>3. Fénygörbe modulációk</b>	<b>11</b>
3.1. Fénygörbe-effektusok (Szabó és mtsai., 2006) . . . . .	11
3.2. A numerikus modellezés folyamata . . . . .	12
3.3. A paraméterek szerepe a fénygörbében (Simon, 2005) . . . . .	13
3.4. A Föld-Hold rendszer . . . . .	18
3.5. Extrém esetek . . . . .	19
<b>4. Egy új eljárás a hold tömegének, sugarának és sűrűségének meghatározására (Simon és mtsai., 2006)</b>	<b>21</b>
4.1. A fotometriai középpont . . . . .	21
4.2. Az időpont-eltolódás kifejezése tömeg- és sugárányokkal . . . . .	24
4.3. A sűrűség megbecslése . . . . .	26
4.4. Tesztelés a Föld-Hold rendszerre . . . . .	26
4.5. Alkalmazás ismert fedési rendszerekre . . . . .	27
<b>5. Következtetések</b>	<b>28</b>
<b>Köszönetnyilvánítás</b>	<b>31</b>
<b>Hivatkozások</b>	<b>32</b>
<b>Függelék</b>	<b>34</b>

## Bevezetés

Az exobolygók Naprendszerünkön kívüli, tehát más csillagok körül keringő bolygók (Szatmáry, 2003). Általában közel keringenek központi csillagukhoz, fényességük csillagukhoz képest igen csekély - körülbelül milliomod része annak, és erősen függ a csillag és a megfigyeléshez használt szűrő típusától -, ezért közvetlen módon igen nehéz kimutatni őket. Még nehezebb feladat az exobolygók körüli holdakat felfedezni.

„Más világok” keresésének és felfedezésének kérdésével az ókori görögök (Démokritosz, Epikurosz) foglalkoztak először. Munkásságuk számos középkori filozófust (Giordano Bruno, Fontenelle, Goethe, Kant, ...) is gondolkodásra ösztönzött, de először csak a Huygens (1698) próbált meg kimutatni bolygót más csillagok körül. Hamar rájött, hogy egy ilyen bolygó kimutatása messze meghaladja legjobb távcsövei lehetőségeit is. Ezután több mint két évszázadig nem is voltak hasonló megfigyelések. 1950-ben van de Kamp holland csillagász úgy gondolta, hogy a Napunk közelében lévő Barnard csillag körül bolygót fedezett fel, de nem sokkal később bebizonyosodott, hogy az csak egy hamis megfigyelés volt (Schneider, 2000). Wolszczan és Frail (1992) tették meg az első nagy lépést a bolygóvadászok körében, mikor pulzár körül exobolygót mutattak ki. A következő felfedezésre sem kellett „sokat” várni, ugyanis 1995-ben spektroszkópiai módszerrel a Napunkhoz hasonló 51 Pegasi csillag körül a dél-franciaországi Haute Provence Obszervatórium távcsövével exobolygót mutattak ki (Major és Queloz, 1995). Ezek után felfedezések sora követte egymást, mellyel az elmúlt években rohamosan nőtt az ismert Naprendszeren kívüli bolygók száma, jelenleg 179 rendszerben 209 bolygót ismerünk (Schneider, 2006).



1. ábra. Exobolygók tömegének és fél nagytengelyének összefüggése.

A bolygók között főleg a Jupiter tömegéhez, méretéhez hasonlókat találhatunk, de akadnak tízed, valamint tízszeres Jupiter tömeggel rendelkezők is (1. ábra). Pályájukat tekintve a felfedezett bolygók 90%-a közelebb kering a csillaghoz, mint 3 csillagászati egység, 42%-uk pályájának fél nagytengelye pedig még a Merkúrénál is kisebb. A felfedezett exobolygók közül a legtöbb tömegét csak alulról lehet becsülni (Szatmáry, 2003), ezért lehet, hogy a nagyobb tömegűek a valóságban még nagyobb tömeggel rendelkeznek, s így már inkább a barna törpékhez sorolhatjuk őket. Körülöttük holdat eddig még nem sikerült kimutatni (Brown és mtsai., 2001; Charbonneau és mtsai., 2005).

1999-ben Sartoretti és Schneider foglalkozott először exoholdak fotometriai kimutathatóságával. A vizsgált rendszerekben a bolygó és holdja elhalad a csillag előtt fényességcsökkenést okozva annak fényében. Ilyen fedési exorendszerekben dolgoztak ki eljárást a holdak tömegének megbecslésére. Munkámban egy újabb, a valóságot jobban közelítő módszert dolgoztam ki ezen exoholdak tömegének és sugarának meghatározására.

A problémával azért is érdemes foglalkozni, mivel a közeljövőben felbocsátásra kerülő, illetve működésbe lépő űrtávcsövek (COROT, 2006; KEPLER, 2008) számára a holdak által okozott effektusok már jobban vizsgálhatóak lesznek (Szabó és mtsai., 2006), elősegítve ezzel más naprendszerek tanulmányozását is.

Legelőször numerikus számításokat végeztem (Simon, 2005; Szabó és mtsai., 2006) azon kérdések megválaszolására, hogy egy, a csillag előtt elhaladó exobolygó által okozott fényességcsökkenést hogyan módosítja a bolygó körül keringő hold, és milyen modulációk rakódnak rá a fedési fénygörbére. Először olyan modellek előállítására és tanulmányozására volt a cél, amelyek különböző fizikai paraméterekkel (tömeg, sugár, keringési idő, inklináció) rendelkeztek. Ehhez számos rendszert kellett generálni, a rendszerek „fizikai realitását” (reális csillag modell; reális sűrűségű bolygó, hold; dinamikai stabilitás) is figyelembe kellett venni. Foglalkoztam egy exobolygó által létrehozott, valamint a holdja által modulált fénygörbe összehasonlításával. A rendszerben mindig csak egy fizikai paramétert változtatva megvizsgáltam, hogy mennyivel és milyen módon változik meg így a fénygörbe alakja. A modellt teszteltem a Naprendszerben a Föld-Hold párosra, valamint létrehoztam extrém, de még reális rendszereket is. A modellek által generált fénygörbékben a hold miatt fellépő fényességkülönbségek csak kevés esetben haladták meg a 0,1 millimagnitúdót. A fedés középidejében azonban jól mérhető, akár több perces eltolódások is megfigyelhetők, így ezen effektus mérése sokkal célravezetőbb a sugár- és tömegarány megbecslése szempontjából (Szabó és mtsai., 2006). Ezen időpont-eltolódás pontosabb vizsgálatával analitikus formulákat vezettem le a holdak tömegének és sugarának megbecslésére (Simon és mtsai., 2006). Az eredmények azt mutatják, hogy a fedés középideje pontosan egybeesik egy jól definiált fotometriai-középpont áthaladásának időpontjával. Ez a fotometriai középpont kering a rendszer tömegközéppontja körül, ami a fedés középidejének eltolódásához vezet.

A Naprendszerben szimuláltam a Föld-Hold rendszer elhaladását a Napunk előtt. A középidejű-eltolódás maximális nagyságát ismerve (Szabó és mtsai., 2006) és valós sűrűségarányt feltételezve az eredmények a valós értéktől kevesebb, mint 20%-ban tértek el. Számításokat elvégeztem olyan fedési exorendszerekben is, melyekben adottak voltak maximum időpont-eltolódás becslések. A számítások finomították a korábbi, Sartoretti és Schneider által jósolható maximális holdtömegeket, kb. felére-harmadára csökkentették az addig feltételezett értékeket.

# 1. Exorendszerek

## 1.1. Kutatási módszerek

Az utóbbi években a csillagászok számos módszert dolgoztak ki az exobolygók detektálására. Ezen módszereket két nagy csoportba sorolhatjuk: közvetlen módszerek, amikor a bolygót ténylegesen észleljük; illetve közvetettek, amikor egy-egy mérés bolygó jelenlétére utal (Szatmáry, 2006, honlap).

### Közvetlen módszerek

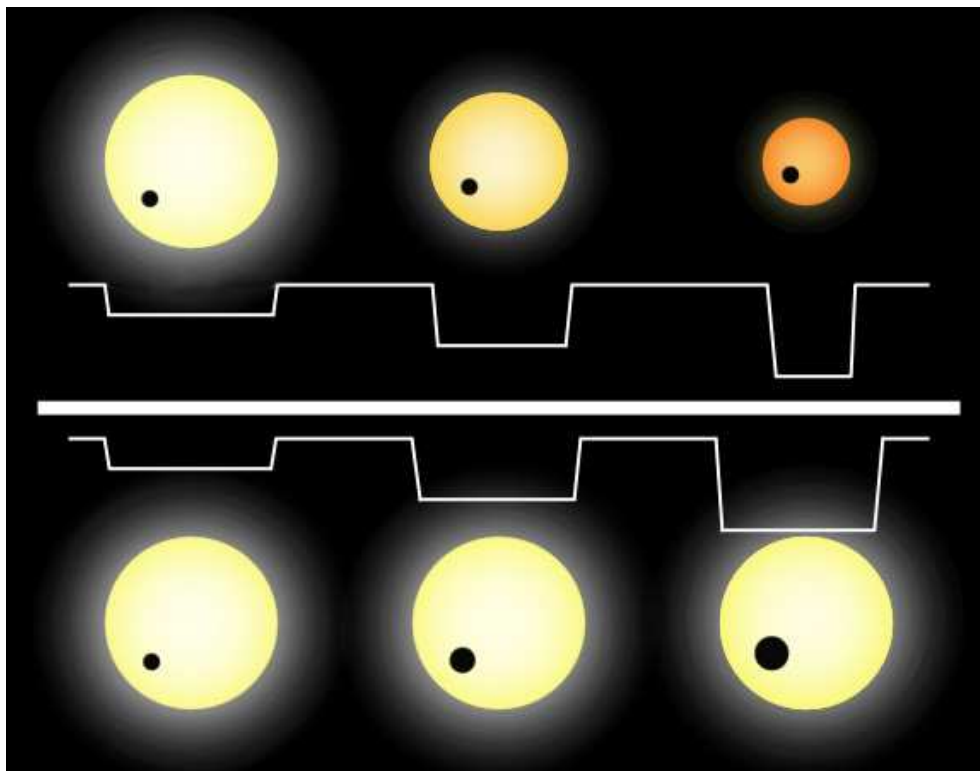
- **Közvetlen képalkotás**

Egy csillag körüli exobolygó képének direkt kimutatására akkor van lehetőség, ha a bolygó elég nagy, legalább Jupiter átmérőjű, s elegendően távol van a központi csillagtól. A felvételek elsősorban infravörösben készülnek, mivel ebben a tartományban a két égitest sugárzása kevésbé tér el egymástól, mint rövidebb hullámhosszon. A jobb felbontás érdekében a képek készítése a légkörön kívüli űrtávcsövekkel történik (Chauvin és mtsai., 2004).

- **Infravörös többletsugárzás**

A bolygó hőmérsékleti sugárzása hozzáadódik a csillagéhoz, melyet spektroszkópiai mérésekkel lehet kimutatni.

### Közvetett módszerek



2. ábra. Fedések mélységének függése a hőmérséklettől, sugáraránytól.

- **Fotometria**

A bolygó elhalad a csillag előtt, s részben eltakarja, a csillag látszó fényessége lecsökken. Hogy ezt meg tudjuk figyelni, a pályasíknak nagyon pontosan a látóirányunkba kell esnie, főleg ha a bolygó elég távol kering a csillagtól. A fénygörbe menetéből, a fedés mélységéből ki tudjuk számolni a bolygó sugarát, felhasználva a csillag már előzőleg meghatározott méretét (Charbonneau és mtsai., 2000). Ugyanakkor következtetni tudunk a bolygó pályájának látóirányunkkal bezárt szögére, valamint a csillag peremsötétedésére is. A fedés mélységét és a görbe alakját sok tényező befolyásolja: például a bolygó és a csillag sugarának a hányadosa, a halványodás annál nagyobb, minél nagyobb ez a hányados. A csillag hőmérsékletének és méretének csökkenésével a fényváltozás növekszik adott bolygósugár esetén (2. ábra). A csillag peremsötétedése, a pálya inklinációja pedig a fénygörbe alakját, illetve a fedés időtartamát határozza meg. A fényváltozás esetleg néhány század, általában pedig csak néhány ezred magnitúdó.

Amint a későbbiekben látni fogjuk, a fotometria az exoholdak felfedezésének fő eszköze lehet, mivel jelenlétük leginkább a fénygörbe menetére, annak alakjára van hatással, valamint szerepet játszik a fedések középidejének megváltoztatásában.

- **Asztrometria**

Ha a bolygó elegendően nagy tömegű, akkor gravitációs hatása révén „megrángatja” a csillagot. Ennek következtében a csillag sajátmozgása az égi koordináta rendszerben hullámszerű lesz. Az effektus akkor figyelhető meg a legjobban, ha a keringés síkja nem esik egybe a látóirányunkkal (Muterspaugh és mtsai., 2006).

- **Spektroszkópia**

Itt szintén a bolygó gravitációs „rángató” hatása játszik szerepet. A bolygó a keringés során egyszer közeledik felénk, máskor meg távolodik tőlünk. A csillag épp ellentétes irányban mozdul el, s színképében a vonalak a hosszabb (vörös), illetve a rövidebb (kék) hullámhosszak felé tolódnak el. Az előző effektussal ellentétben ez a hatás akkor mutatható ki a legjobban, ha a látóirányunk és a keringés síkja kis szöget zár be (Kaye és mtsai., 2006).

- **Pulzárjelek modulációja**

Kimutatására akkor van lehetőség, ha a bolygó egy pulzár körül kering. Ekkor a közös tömegközéppont körül keringő pulzár impulzusai hol sűrűbben, hol ritkábban érkeznek felénk. A pulzusok közötti időtartam változásából meghatározható a pulzár keringési ideje, tömege alapján pedig megbecsülhető a kísérő tömege (Wolszczan és Frail, 1992; Backer és mtsai., 1993).

- **Gravitációs-lencse-hatás**

A csillag és a bolygója kettős lencseként viselkedik. Ha egy ilyen rendszer halad el egy távoli csillag előtt, akkor a lencseobjektumok, a csillag és bolygója, kissé elgörbítik, egyszersmind fókuszálják a távolabbi csillagról érkező fénysugarakat, melynek hatása révén a háttércsillag felfényesedik. A felfényesedés a rendszer geometriájától függően többször következik be. Bolygó esetén a lencséző csillag hosszabb, míg maga a bolygó csak rövid ideig tartó, éles felfénylést okoz (Queloz, 2006).

A detektálási módszereket azonban csoportosíthatjuk a következőféleképpen is: gravitációs hatáson alapuló módszerek, amikor a bolygó kimutatható gravitációs modulációja játszik szerepet; illetve fotonikai hatáson alapuló módszerek, amikor a fény fizikai jellemzőit megváltoztatható hatásokról beszélünk. Mindkét csoportban számos új detektálási módszert dolgoztak ki, melyek új területeket nyitnak az exobolygók felfedezésének lehetőségére (Szatmáry, 2006).

## **1.2. Kutató programok**

### **1.2.1. HAT (Hungarian Automated Telescope - Magyar Automatizált Teleszkóp)**

Kezdjük a sort egy magyar exobolygó kereső programmal! Bakos Gáspár, Lázár József, Papp István és Sári Pál fejlesztette ki azokat az automata teleszkópokat, amelyek jelenleg két helyről pásztázzák az égboltot (HAT, 2006). Az arizonai Fred Lawrence Whipple obszervatóriumban négy, míg Mauna Kea-n (Hawaii-szigetek) két széles látószögű kamera működik. Az égboltot 2048x2048 pixeles kamerával figyeli, mely  $9 \times 9^\circ$ -os látómezőt biztosít. Fő célja fedési kettősök, pulzáló változók, GRB utófénylések megfigyelése, valamint nem utolsósorban exobolygók fotometriai módszeren alapuló keresése. Eredményeik közül fontos megemlíteni, hogy 2006 szeptemberében egy kettős rendszer egyik tagja körül exobolygót fedeztek fel, mely a HAT-P-1b nevet kapta (Bakos és mtsai., 2006).

### **1.2.2. TrES (Transatlantic Exoplanet Survey - Transzatlanti exobolygó vizsgálat)**

A kutatási programot Francis T. O'Donovan és munkatársai vezetik, melyben három kis átmérőjű teleszkópból álló rendszer vizsgálja az égboltot (TrES, 2006). A programban részt vevő obszervatóriumok a Föld különböző pontján helyezkednek el, lehetővé téve a folyamatos megfigyelést. Fedési exobolygók után kutatnak, eddigi eredmények a TrES-1 és TrES-2 exobolygók felfedezése (Alonso és mtsai., 2004; O'Donovan és mtsai., 2006).

### **1.2.3. SuperWASP (Wide Angle Search for Planets - Bolygók széles látószögű keresése)**

A SuperWASP az Egyesült Királyság vezető exobolygó felfedező programja, melyet nyolc híres akadémiai intézmény alapított (SuperWASP, 2006): Cambridge University, Instituto de Astrofísica de Canarias, Isaac Newton Group of telescopes, Keele University, Leicester University, Open University, Queen's University Belfast és a St. Andrew's University. Elsődleges feladata fedési exobolygók keresése.

A SuperWASP két robotizált obszervatóriumot foglal magába. Az egyik északon, La Palma szigetén található, a teleszkópok Isaac Newton csoportjánál; a másik délen, a Dél-Afrikai Csillagászati Obszervatórium kezelése alatt. Az obszervatóriumok nyolc egyforma távcsővel vannak felszerelve, melyek egyidejűleg pásztázzák az égboltot bolygófedések után kutatva. Az objektívek átmérője 200 mm, melyek végén egyenként 2048x2048-as CCD kamera található. Jelenleg is mindkét obszervatórium teljes időben végez méréseket, emellett elindult a 2004-es adatok feldolgozása is. Eddig két sikeres felfedezést tudhatnak magukénak, 2006 szeptemberében találták meg a WASP-1b és WASP-2b exobolygókat (Cameron és mtsai., 2006).

### 1.2.4. Nagylátómezejű robottávcsövek

A következő táblázatban összefoglaltam a további ismert kistávcsöves égboltfelmérő programokat és fontosabb paramétereiket. Ezek közül fontos kiemelni az XO programot, mely az XO-1 fedési exobolygó felfedezésével büszkélkedhet (McCullough és mtsai., 2006).

Projekt	$D[cm]$	$FR$	$W[^\circ]$	$N_{pix}[Mpix]$	$N_{CCD}$	$ps[''/pix]$	Szűrő
Sleuth	10,0	2,8	32,0	4,0	1	9,94	R
STARE	10,0	2,9	36,4	4,0	1	10,67	B, V, R
PSST	10,7	2,8	28,0	4,0	1	9,29	szélessávú
Vulcan	12,0	2,5	49,6	16,0	1	6,19	szélessávú
Vulcan-S	20,3	1,5	48,2	16,0	1	6,10	szélessávú
BEST	19,5	2,7	9,1	4,0	1	5,50	Null
PASS	3,6	1,4	780,6	1,0	15	98,22	?
XO	11,1	1,8	64,0	4,0	2	13,94	1/2B+v+R
SSO/APT	50,0	1,0	6,1	0,9	1	9,40	?
RAPTOR	7,0	1,2	382,4	4,0	4	34,38	Null
RAPTOR-F	14,0	2,8	17,6	4,0	1	7,37	Null
ASAS-3	7,1	2,8	62,8	4,0	2	13,93	V, I

1. táblázat. A robottávcsövek paramétereit.  $D$ : átmérő,  $FR$ : fényerő,  $W$ : távcső látómezeje egy CCD esetén,  $N_{pix}$ : pixelek száma,  $N_{CCD}$ : CCD-k száma,  $ps$ : egy pixel mérete (Bakos, 2004)

### 1.2.5. OGLE (Optical Gravitational Lensing Experiment - Optikai gravitációs lencse kísérlet)

A lengyel csillagászok kutatási programja 1992-ben indult, a varsói egyetem támogatásával (OGLE, 2006). Az OGLE program lényege az volt, hogy gravitációs mikrolencse-hatás által okozott fényességváltozást figyeljenek meg. Az 1,3 méteres távcső célpontjai a Kis- és Nagy Magellán-felhők, valamint Tejútrendszerünk központi vidéke, a bulge volt. Mivel ezen területek csillagokban gazdagok, ezért elég nagy eséllyel figyelhetünk itt meg mikrolencse-hatást. A megfigyelések során tapasztaltak olyan fényességváltozást is, amelyet nem mikrolencse-hatás, hanem másodlagos, kisebb tömegű objektum (bolygó jelölt) okozhatott. A fényváltozás mértékéből, valamint radiális sebesség méréseiből kiderült, hogy ezek a kísérők a Jupiter tömegének nagyságrendjébe eső bolygók. Így fedezték fel következő exobolygókat is: OGLE-TR-10b (Konacki és mtsai., 2005), OGLE-TR-56b (Konacki és mtsai., 2003), OGLE-TR-111b (Pont és mtsai., 2004), OGLE-TR-113b (Bouchy és mtsai., 2004), OGLE-TR-132b (Bouchy és mtsai., 2004).

### 1.2.6. COROT (CONvection, ROTation and planetary Transits - Konvekció, forgás és bolygóátvonulás)

Az űrprojekt a Francia Nemzeti űrügynökség (CNES) révén kerül megvalósításra a PROTEUS program keretében (COROT, 2006). Az űrtávcső 27 cm átmérőjű főtükrrel lesz felszerelve, s fő célja a csillagok fényváltozásainak megfigyelése lesz



a látható tartományban. A távcső detektora négy darab egyenként 2048x2048-as CCD-chip lesz, amely  $2,8 \times 2,8^\circ$ -os látómezőt eredményez. Két fő irányvonalban fog méréseket végezni. Egyrészt szeizmológiai mérésekkel megpróbálják a csillagok belső szerkezetét felderíteni, másrészt fedési exobolygók után fog kutatni majd. Exobolygó keresés céljából körülbelül 12000 darab 15,5 magnitúdónál fényesebb csillagot fog megvizsgálni. A standard expozíciós idő 8 perc lesz, de lehetőség lesz 32 kiemelt objektum 32 másodperces kiolvasására is. A Föld felett 896 km magasan fog keringeni az egyenlítőre merőleges pályán. Várható felbocsátási időpontja ez év december 22.

### 1.2.7. KEPLER

Várhatóan 2008 októberében fogják Földhöz hasonló pályára állítani a NASA felfedező programja keretében azt a kb. 300 millió dolláros űrtávcsövet, a KEPLER-t, amelynek célja a Tejútrendszer sávjába eső csillagokban gazdag látómező vizsgálata, s a csillagok körül Föld-méretű exobolygók keresése (KEPLER, 2006). A keresést a majd méteres (0,95m) átmérőjű objektívjével a Hattyú és Lant csillagképben fogja végezni 12 fok átmérőjű területen. 42 db 2200x1024 pixeles CCD-t tartalmazó kamerájával négy éven át közel 100000 darab, 14 magnitúdónál fényesebb csillagot vizsgálna meg, amelyeknek fényességét 0,0001 magnitúdó pontossággal mérné meg. A kiolvasási idő 1 perc lesz kiemelt objektumokra.

#### **Főbb feladatai:**

- A lakható zónában, illetve annak közelében található föld típusú illetve, annál nagyobb bolygók arányának meghatározása.
- Ezen bolygók pályájának osztályozása alak és méret szerint.
- A többes csillagrendszerekben található bolygók számának megbecslése.
- A rövid keringési periódusú óriások méretének, tömegének és sűrűségének meghatározása.
- Újabb tagok azonosítása a már felfedezett rendszerekben.
- Bolygó rendszerekkel rendelkező csillagok tulajdonságainak meghatározása.

### 1.3. Schneider-katalógus

Ez egy interaktív internetes katalógus naprakész adatokkal Jean Schneider (Observatoire de Paris) kezelésében. Különböző módszerekkel felfedezett exobolygók adatai találhatóak itt meg, úgy mint, tömeg, keringési periódus, fél nagytengely, esetlegesen pálya inklináció és excentricitás, valamint fedési exobolygóknál a bolygó sugara. Természetesen a központi csillag paramétereiről is sok információt nyerhetünk. Minden bolygó után felsorolásra kerül annak további elérhetősége, valamint az eddig róla megjelent publikációk listája. Az oldalon emellett lehetőség van különböző korrelációs és statisztikai diagrammok készítésére, valamint az adatok különböző formátumban való letöltésére is. Jelenleg 209 exobolygó adatait tartalmazza (Schneider, 2006).

## 2. Exorendszerek dinamikája

### 2.1. Dinamikai stabilitás

Egy csillag körül körpályán keringő bolygó esetén a korlátozott háromtest probléma értelmében nem mindig lehet a bolygó köré dinamikailag stabil holdat elhelyezni. Ahhoz, hogy a hold a bolygó környezetét ne hagyja el, ne tudjon megszökni a belső Lagrange-ponton keresztül, a hold mozgásának Hill-féle értelemben stabilnak kell lennie. A korlátozott háromtest problémának öt egyensúlyi megoldása létezik, ezek a Lagrange-pontok. Hill-stabilitás szempontjából nekünk az  $L_2$ , belső Lagrange-pont ( $L_2$ ) pont az érdekes. <sup>1</sup> Ehhez az  $L_2$  ponthoz tartozik egy ún. Jacobi-konstans ( $C_{L_2}$ ), amely az összes többi Lagrange-ponthoz tartozó konstansnál nagyobb (Érdi, 2003). Egy rendszer Hill értelemben stabil, ha a hold pályájához tartozó Jacobi-konstans értéke nagyobb, mint az  $L_2$  ponthoz tartozó érték. Matematikailag:

$$C_{hold} \equiv 2\Omega_{hold} - v_{hold}^2 > C_{L_2}, \quad (1)$$

ahol  $\Omega$  az effektív potenciál,  $v$  a hold sebessége és  $C_{L_2} = 2\Omega_{L_2}$ . Nap-Föld-Hold rendszerben a Holdhoz tartozó érték  $C_{Hold}=3,0012$ ; Nap-Föld rendszer  $L_2$  pontjának értéke  $C_{L_2}=3,0009$ . Mivel  $C_{Hold}>C_{L_2}$ , ezért a Hold mozgása Hill értelemben stabil.

A gyakorlatban azonban egy egyszerűbb közelítő formulát használnak a holdak stabilitásának vizsgálatához. Az

$$a_H = a_b \left( \frac{m_b}{3m_*} \right)^{1/3} \quad (2)$$

egyenletben  $a_H$  a Hill-sugár, amely egyenlő a  $C_{L_2}$  Jacobi-konstanshoz tartozó pálya fél nagytengelyével. Az  $a_b$  a bolygó pályasugara,  $m_b$  és  $m_*$  a bolygó és a csillag tömege. A hold ebben a megközelítésben akkor kering stabil körpályán, ha fél nagytengelye kisebb, mint a Hill-sugár.

### 2.2. Az elfogadott kinematikai modell (Sartoretti-Schneider, 1999)

Sartoretti & Schneider (1999), Deeg (2002) és Doyle & Deeg (2003) érveltek először amellyel, hogy exobolygó körül keringő Föld-méretű hold mérhető fotometriai effektusokat okozhat. Sartoretti & Schneider ezen felül még egy eljárást is kidolgozott, mellyel megbecsülhető volt a rendszerben keringő holdak maximális tömege. Az ötlet azon alapult, hogy a közös tömegközéppont körül keringő bolygót a hold „megrángatja”, így időpont-eltolódást lép fel a bolygó fedésének időpontjában. Itt a hold magában a fedésben nem vesz részt, így nem ad járulékot a fényességcsökkenéshez. A modellben rendszer tömegközéppontja szigorúan egyenletesen kering a központi csillag körül, sebessége a csillag tömegével ( $m_*$ ) és a bolygópálya fél nagytengelyével ( $a_b$ ) kifejezve:

$$v = \sqrt{\frac{\gamma m_*}{a_b}}. \quad (3)$$

Mivel a hold a fedések alkalmával, más-más pozícióban van a bolygóhoz képest, a bolygó fedésének időpontja ingadozik. Ennek az ingadozásnak a maximális ér-

---

<sup>1</sup>A belső Lagrange-pontra az irodalomtól eltérően sok helyen  $L_1$  pont jelöléssel hivatkoznak.

téke a fedés idejében történő maximális időeltolódás (továbbiakban csak időpont-eltolódás); formulával kifejezve

$$T_E = \frac{2}{v} T_k = \frac{2}{v} \frac{a_h m_h}{m_b + m_h}, \quad (4)$$

ahol  $T_k$  a tömegközéppont és a bolygó középpontja közötti távolság,  $a_h$  a hold fél nagytengelye és  $m_h$ ,  $m_b$  a hold és a bolygó tömege.  $T_k$ -ban a számlálót és a nevezőt is  $m_b$ -vel osztva és nevezőben  $\frac{m_h}{m_b}$ -t az 1 mellett elhanyagolva  $T_E$  a következőre egyszerűsödik:

$$T_E = \frac{2a_h}{v} \frac{m_h}{m_b}. \quad (5)$$

Ha egy rendszerben mérhető az időpont-eltolódás vagy maximális értékére létezik felső becslés, akkor az SS-modellben a holdak maximális tömege a következő képlet alapján becsülhető:

$$m_h = M_{hold,SS} = \frac{T_E v}{2a_h} m_b, \quad (6)$$

(Sartoretti & Schneider, 1999, 24-es egyenlet) ahol  $T_E$  maga az időpont-eltolódás. Ha holdak még éppen stabil pályán keringenek a bolygó körül, azaz fél nagytengelyük megegyezik a Hill-sugárral,  $a_h = a_H$ , akkor az egyenlet:

$$m_h = \frac{T_E v}{a_b} (3m_b^2 m_*)^{1/3}. \quad (7)$$

Barnes és O'Brien (2002) az exoholdak keringésére szigorúbb feltételeket állított fel: a holdak pályája hosszú időskálán csak akkor maradhat stabil, ha fél nagytengelyük maximális értéke nem haladja meg a Hill-sugár harmadát. Ezzel a megszorítással az SS-modellben a holdak maximális tömege körülbelül a kétszeresére növekszik, amely már számos esetben meghaladhatja egy fizikailag valós hold tömegét.

A SS-modell leírása azonban nem lehet teljes, mivel a hold által okozott fotometriai effektus elhanyagolták. A teljes leírásban figyelembe kell venni mind a bolygó, mind a hold fotometriai effektusait egyaránt. A hold nem mutatható ki mindig közvetlenül, de nagy hatással van a fedés középidejében történő időpont-eltolódásra. Dolgozatomban ebben a megközelítésben adtam becslést a holdak maximális tömegére, melyben ugyanazt az időpont-eltolódást kisebb tömegű hold is létre tudja hozni.

### 3. Fénygörbe modulációk

E fejezetben megvizsgáltam a csillag előtt elhaladó bolygó és holdja által létrehozott fedési fénygörbéket. Olyan valós rendszert hoztam létre, melyben a hold keringése annyira gyors, hogy egy tranzit alatt többször is megkerüli a csillagot; így a rendszerekben nemcsak a hold jelenléte, hanem a keringésének hatása is jól tanulmányozható. A modell paramétereit mindig csak egyet változtatva tanulmányoztam a fénygörbén bekövetkező változásokat, majd tesztelést végeztem a Föld-Hold párosra, valamint három extrém, de még fizikailag lehetséges rendszerre is.

#### 3.1. Fénygörbe-effektusok (Szabó és mtsai., 2006)

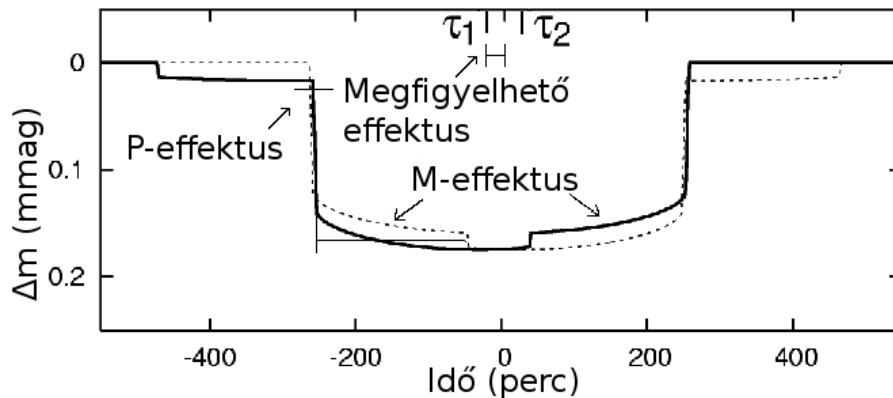
A fedés folyamán a fénygörbén megfigyelhető effektusokat három csoportba sorolhatjuk:

- **Időpont-eltolódások (timing-effects)**

A fedés középidejét a következőképpen definiáljuk:

$$\tau = \frac{\sum_{fedes} \Delta m_i t_i}{\sum_{fedes} \Delta m_i}, \quad (8)$$

ahol  $t_i$  és  $\Delta m_i$  a megfigyelés ideje és a mért magnitúdócsökkenés. Az összegző index azt jelenti, hogy csak a fedéshez tartozó fotometriai pontokat vesszük figyelembe.



3. ábra. Két fedés fénygörbéje; a hold folytonos vonal esetén vezető, szaggatott esetén követő szerepben van.

A közös tömegközéppont körüli keringés miatt a központi csillaga előtt elhaladó bolygó egyszer előbb, máskor később kezdi meg a fedést, ha van körülötte hold is. A hold fedésének időpontja is hasonlóan viselkedik. A két esetet sorrendben P- és M-effektusnak nevezzük (3. ábra). Ha a hold távolabb kering a tömegközépponttól, a M-effektus időben többszörösen meghaladhatja a P-effektust, míg magnitúdóban a különbség csak kevésbé jelentős. A hold vezető szerepe esetén a fénygörbe első fele kissé mélyebben halad, majd a hold fedésének befejeztével megemelkedik. A fenti definíció (8) értelmében a hold

által okozott többlet magnitúdócsökkenés miatt a fedés középideje kissé előbb következik be, mint hold nélküli esetben ( $\tau_1$ ). Az időpont-eltolódás létrejön akkor is, ha a hold nem okoz kimutatható torzulásokat a fénygörbében. A következő fejezetben ezt az effektust használjuk fel a holdak paramétereinek megbecslésére.

- **Önálló fedés** (Semi-transit effect)

Az effektust akkor tudjuk megfigyelni, amikor a hold egyedül fedi a csillagot a bolygó fedésének kezdete előtt, ill. vége után attól függően, hogy vezető vagy követő szerepben található. A fényességcsökkenés mértéke a hold méretétől függ, nagyságára tized és ezred millimagnitúdó közötti értékeket várhatunk:

$$P_E[mmag] = 2500 \log \frac{r_*^2}{r_*^2 - r_h^2}, \quad (9)$$

ahol  $r_*$  és  $r_h$  a csillag és a hold sugara.

- **Görbülés**

A fedés folyamán a fénygörbe alsó részének "begörbülését" értjük rajta. A csillag felületi fényessége nem egyenletes, a peremhez közel sötétebbnek látszik. Ez a jelenség a peremsötétedés, melynek mértéke függ a megfigyeléshez használt szűrő típusától (Girardi, 2002). A jelenség oka, hogy a bolygó a csillag közepe felé egyre nagyobb intenzitású területeket takar ki, így a tranzit közepén a fényességcsökkenés is nagyobb.

### 3.2. A numerikus modellezés folyamata

A fénygörbék előállításához írtam egy pascal programot (ld. függelék), mely két fő részből tevődik össze. Az első rész megvizsgálja, hogy a rendszer Hill-féle értelemben stabil-e, a második pedig kiszámolja fénygörbe menetét. A programban bemenő paraméterként lehet megadni a csillag peremsötétedését ( $u$ ) - a különböző szűrőkre vett értékeket modellszámítás alapján véve (Claret és mtsai., 1995); a három test tömegét ( $m_*$ ,  $m_b$ ,  $m_h$ ); a bolygó és hold sugarát ( $r_b$ ,  $r_h$ ), pályájuk inklinációját ( $i_b$ ,  $i_h$ ), keringési idejüket ( $P_b$ ,  $P_h$ ), valamint a hold mozgására jellemző kezdőfázist ( $\alpha$ ), amely a hold relatív helyzetét adja meg a program indulásakor.

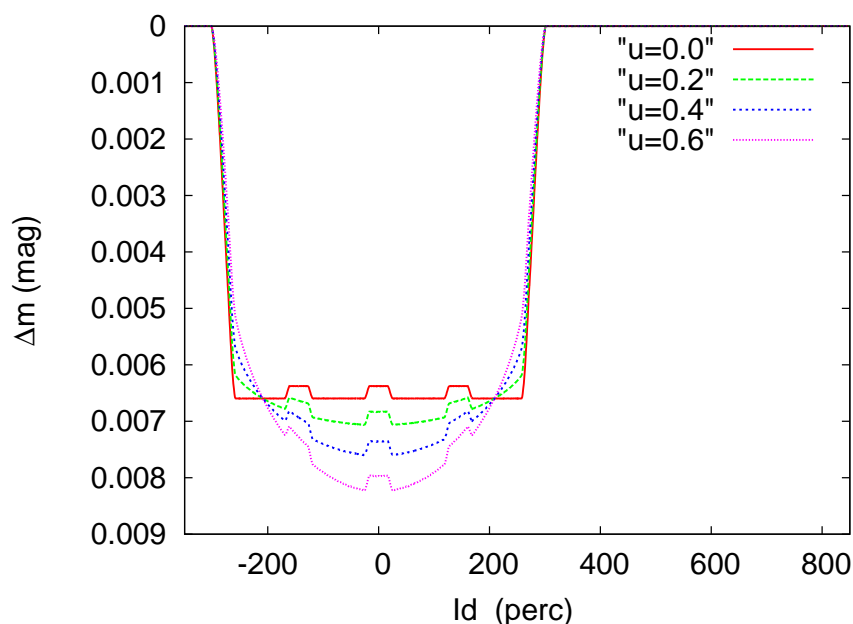
A program legelőször elvégzi a Hill-stabilitás vizsgálatát; kiszámítja a megfelelő képletek segítségével a Jacobi-konstansok értékeit, majd összehasonlítva azokat csak akkor fut tovább, ha stabil a rendszer (**A**). Ezután elkészít 4000x6000-es tömbön egy 1000 egység sugarú csillagot figyelembe véve a peremsötétedést (**B**), majd összeadva az egyes egységek intenzitásait, kiszámítja a csillag fluxusát (**C**). A következő lépésben bolygó- és holdtakarást számol, méghozzá úgy, hogy bolygó-hold közös tömegközéppontját elvonultatja a csillag előtt (**D1**, **D2**). Meghatározza az égitestek tömegközépponthez viszonyított helyzetét, majd összeszámolja a hold és bolygó által a csillagból kitakart rész fluxusát. Ezeket a fluxusokat vonja ki a csillag fluxusából. Ha pedig kölcsönös bolygó-hold fedés következik be, azaz komponensek egymást is takarják, akkor a bolygó és a hold által is kitakart rész fluxusát hozzáadja az eredő fluxushoz, mivel a közös rész mind a hold-, mind a bolygótakarás számolásának alkalmával le lett vonva, tehát kétszer. A program kimeneteként egy adatsor áll elő, melyet gnuplot-tal ábrázolva megkapjuk a fénygörbét.

### 3.3. A paraméterek szerepe a fénygörbében (Simon, 2005)

A következőkben vizsgáltam, hogy minden esetben csak egy bemenő paramétert változtatva, az milyen módon változtatja meg a fénygörbe menetét. Minden fénygörbéhez az alatta lévő táblázat tartozik, melyben az állandó paramétereket foglaltam össze, a változó paraméter az ábráról olvasható le.

- **Peremsötétedés**

Legelőször a peremsötétedés ( $u$ ) mértékét változtattam, melynek eredménye a 4. ábrán látható.



4. ábra. Peremsötétedés változtatásának hatása.

$i_b$ ( $^{\circ}$ )	$i_h$ ( $^{\circ}$ )	$m_*$ ( $m_N$ )	$m_b$ ( $m_J$ )	$m_h$ ( $m_F$ )	$P_b$ (nap)	$P_h$ (nap)	$r_b$ ( $r_J$ )	$r_h$ ( $r_F$ )	$\alpha$ (rad)
0	0	0,6	0,5	1	300	0,2	0,5	1	0

2. táblázat. Paraméterek

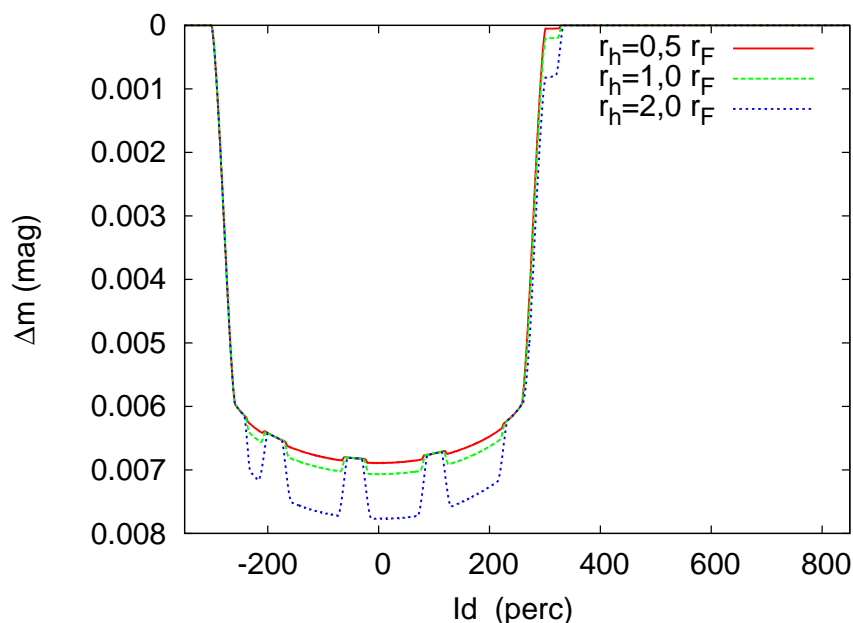
Látható, ha a csillagnak nincs peremsötétedése, akkor a fedés minimumában egyenest kapunk, melyre csak a hold hatása rakódik rá. Viszont egyre nagyobb  $u$  értéknél, azaz, ha csillag a pereme felé egyre erősebben sötétedik, akkor a fénygörbe egyre jobban begömbül.

Az effektust az okozza, hogy a bolygó illetve a hold a csillag belseje felé haladva egyre nagyobb intenzitású részeket takar ki, melynek következtében egyre több fluxus vonódik ki a csillag fluxusából, a magnitúdó fokozatosan csökken.

Egyenletes intenzitás-eloszlásnál a bolygó illetve a hold csak a fedés kezdetekor (végén) takar ki egyre nagyobb (kisebb) részt a csillagból, a közös fedés ideje alatt mindig ugyanakkora fluxusú rész kerül levonásra, ezért fényesség ezalatt állandó marad.

- **Hold sugár**

Holdak sugarának változtatásakor a fénygörbében létrehozott „fogak” közötti mélység változik, méghozzá úgy, hogy nagyobb holdsugár esetén mélység nagysága növekszik (5. ábra). Ezek a mélységek tehát a holdak sugarával kapcsolatosak, így maguk a „fogak” a kölcsönös fedések esetén jönnek létre, amikor a két komponens nemcsak a csillagot, hanem egymást is eltakarja.



5. ábra. Különböző holdsugarak esete.

$u$	$i_b$ ( $^\circ$ )	$i_h$ ( $^\circ$ )	$m_*$ ( $m_N$ )	$m_b$ ( $m_J$ )	$m_h$ ( $m_F$ )	$P_b$ (nap)	$P_h$ (nap)	$r_b$ ( $r_J$ )	$\alpha$ (rad)
0,2	0	0	0,6	0,5	1	300	0,2	0,5	$1,3 \cdot \pi$

3. táblázat. Paraméterek

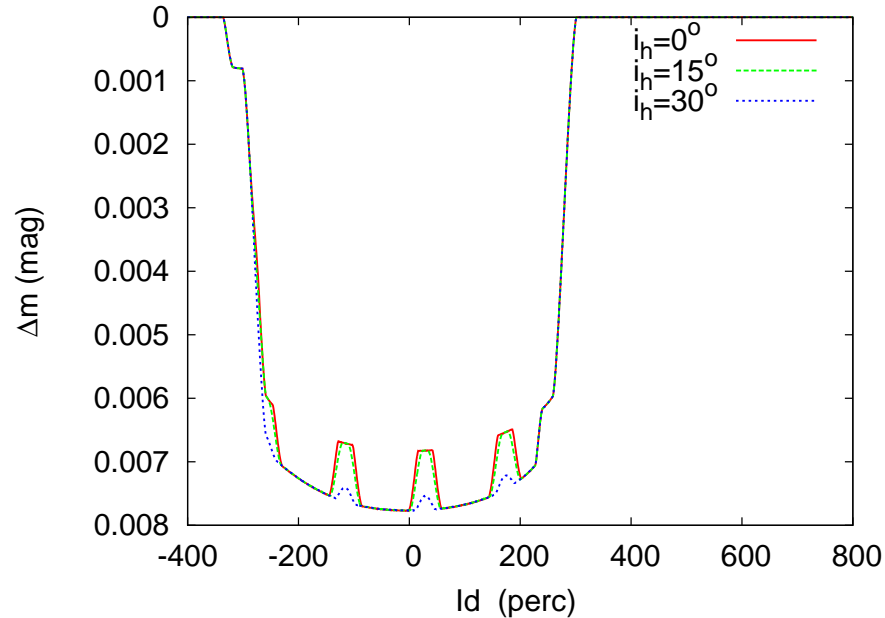
Két földátmérőjű hold -bár ez nem valószínű a valóságban- adott konfiguráció mellett már elég nagy, millimagnitúdós plusz fényességcsökkenést okoz, amely már igen kedvező lehet a kimutathatóság szempontjából.

A „fő” fénygörbe mélységét a bolygó mérete (hasonlóan a holdéhoz), illetve inklinációja határozza meg.

Csökken a „fő” fénygörbe és a fogak közötti rész mélysége akkor is, ha a rendszer a csillag széléhez közel halad el. A peremsötétedés miatt a komponensek kisebb intenzitású területet takarnak ki, mint a csillag középpontja közelében, tehát a széleken a fényességcsökkenés kisebb.

## • Holdpálya inklináció

A holdpálya inklinációját a nulla értékről folyamatosan növelve a 6. ábra fénygörbéin megfigyelhető „fogak” közötti bemélyedések értéke nem, csak a „fogak” magassága és szélessége változott.



6. ábra. Holdpálya inklinációjának változtatása.

$u$	$i_b$ ( $^\circ$ )	$m_*$ ( $m_N$ )	$m_b$ ( $m_J$ )	$m_h$ ( $m_F$ )	$P_b$ (nap)	$P_h$ (nap)	$r_b$ ( $r_J$ )	$r_h$ ( $r_F$ )	$\alpha$ (rad)
0,2	0	0,6	0,5	1	300	0,2	0,5	2	$0,8 \cdot \pi$

4. táblázat. Paraméterek

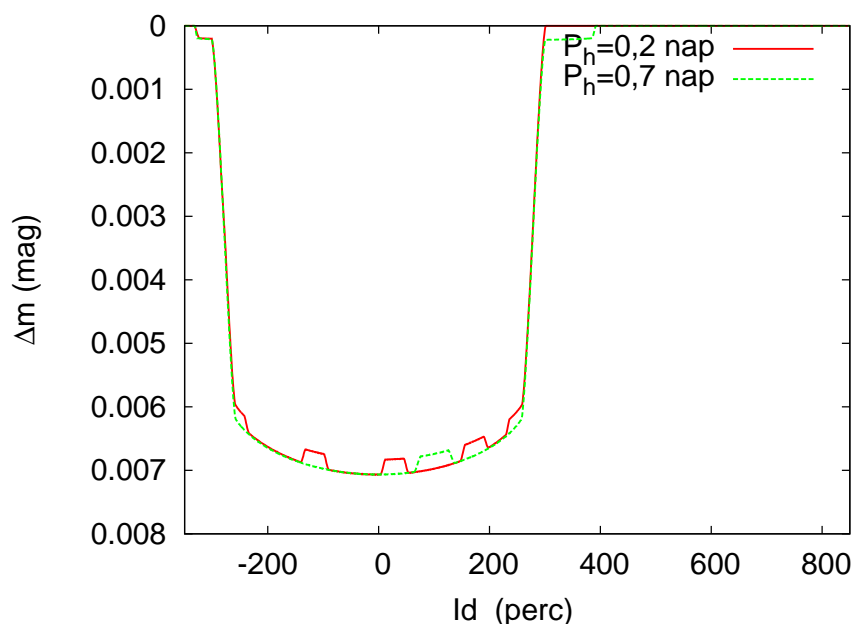
A programban ha a holdpálya inklinációja nulla, akkor éppen a bolygó átmérője mentén mozog. Ekkor a kölcsönös fedések időtartama a leghosszabb. Növelve az inklinációt a hold távolodik az egyenlítőtől, egyre kevesebb időt tölt a bolygó korongján belül, azaz a kölcsönös fedések időtartama csökken, így a „fogak” szélessége is. Az inklináció további növelésével eléri a bolygó pólusát, ahol kilép a bolygó takarásából. Ekkor ismét részt vesz a csillag kitakarásában csökkentve a csillag fényességét, melynek eredményeképpen a részleges fedések, azaz „fogak” nagysága is elkezd csökkenni. A fogak akkor tűnnek el véglegesen, ha a holdpálya inklinációja eléri azt az értéket, amelynél már a komponensek már nem tudják eltakarni egymást.



- **Keringési idő**

A hold, ill. a bolygó keringési periódusát változtatva a fénygörbén található modulációk száma, illetve helyzete is változik. A hold keringési idejét növelve a másodlagos fedések közötti távolság nő, számuk ebből következően csökken; míg a bolygó keringési idejét növelve a „fogak” távolsága csökken, számuk nő.

A 7. ábrán a jobb áttekinthetőség érdekében csak két fénygörbét tüntettem fel.



7. ábra. Különböző hold keringési idők.

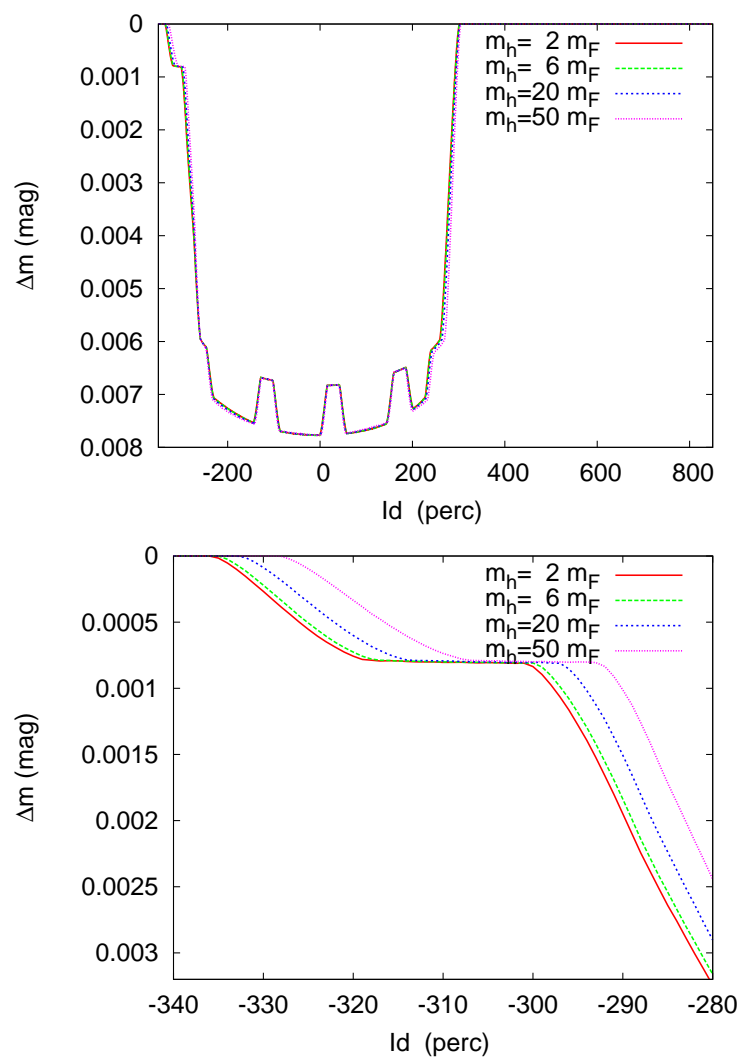
$u$	$i_b$ ( $^\circ$ )	$i_h$ ( $^\circ$ )	$m_*$ ( $m_N$ )	$m_b$ ( $m_J$ )	$m_h$ ( $m_F$ )	$P_b$ (nap)	$r_b$ ( $r_J$ )	$r_h$ ( $r_F$ )	$\alpha$ (rad)
0,2	0	0	0,6	0,5	1	300	0,5	1	$0,8 \cdot \pi$

5. táblázat. Paraméterek

Jelen esetben a bolygó periódusát változatlanul hagyva, a holdét növelve látható, hogy 0,2 napos periódus esetén körülbelül kétszer annyi a „fogak” száma, mint 0,7 naposnál, s a moduláció időtartama is rövidebb. A változások azért jelentkeznek, mert modulációk hossza és száma a bolygó és hold egymáshoz viszonyított periódusarányától függ.

- **Tömeg**

Vezető hold esetén a hold tömegének változtatásával a fedések kezdetének időpontjai a tömegközéppont áthaladásához képest késnek, egyre nagyobb hold esetén egyre később kezdődik a tranzit (8. ábra). Az extrém nagy hold-tömegek ( $20m_F$ ,  $50m_F$ ) egyértelműen irreálisak, csak a jelenség bemutatása érdekében lettek ábrázolva.



8. ábra. Holdtömegek változtatásának hatása; az alsó ábra hold belépését kinagyítva mutatja.

$u$	$i_b$ ( $^\circ$ )	$i_h$ ( $^\circ$ )	$m_*$ ( $m_N$ )	$m_b$ ( $m_J$ )	$P_b$ (nap)	$P_h$ (nap)	$r_b$ ( $r_J$ )	$r_h$ ( $r_F$ )	$\alpha$ (rad)
0,2	0	0	0,6	0,5	300	0,2	0,5	2	$0,8 \cdot \pi$

6. táblázat. Paraméterek

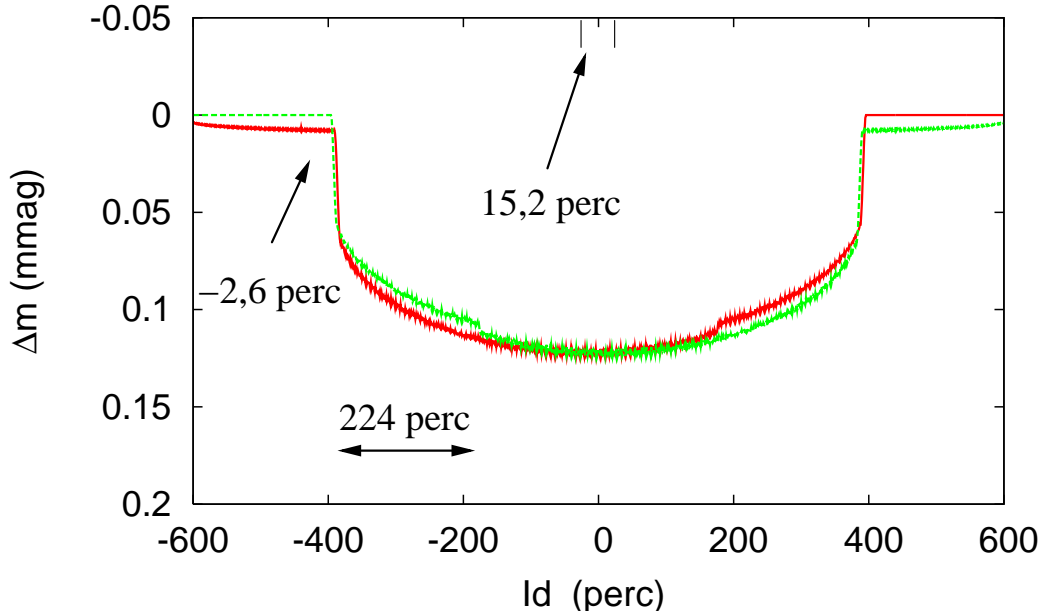
Jelen esetben a hold van vezető szerepben, így a konfiguráció a fedés kezdetekor: csillag, hold, tömegközéppont, bolygó. A hold kezdi meg a fedést. Na-

gyobb tömeg esetén a hold közelebb kerül a tömegközépponthez (ami egyenesen kering a csillag körül). Ugyanabban az időpontban távolabb van a csillag peremétől, haladnia kell még, hogy elérje azt, így a fedés kezdete később kezdődik. A változás kicsi, s csak extrém nagy tömeg változtatás hatására lesz érzékelhető. Az alsó ábrán látható, hogy 25x-ös tömegkülönbséghez 10 perces idő, valamint 0.001 (meredekebb rész) illetve 0.0005 (kevésbé meredekebb rész) magnitúdókülönbség tartozik.

A 3.1-es fejezetben tárgyalt P-effektus nagysága a jelen konfiguráció és a fizikailag valós értékekre beállított paraméterek esetén nem mérhető. A hold ugyanis a fedés során többször megkerüli a bolygót, így a rángató hatása a fedés során átlagolódik, s a nullától csak nagyon kevéssel tér el. Kimutatható effektust csak óriási holdtömegek (pl. 50 Föld tömeg) esetén érhetünk el.

### 3.4. A Föld-Hold rendszer

Teszteltem a programot a Föld-Hold párosra, amint elhaladnak a Napunk előtt. Az inklináció kivételével, melyet a fedés biztos létrejöttéhez nullának vettem, minden paramétert a valós értékek megfelelően állítottam be. A tesztelésben a páros fedésének középidőpontjában történő eltolódás meghatározása volt a cél. Lefuttatva a programot a vezető és a követő holdas esetre is a 9. ábrán látható fénygörbéket kaptam.



9. ábra. A Föld-Hold rendszer által generált fénygörbe pirossal vezető, zölddel követő hold esetén.

Az időpont eltolódás kiszámolásához használjuk a (8)-as egyenletet. A Hold és a Föld által okozott fényességcsökkenéseket a magnitúdó definíciójának segítségével határozhatjuk meg: az  $\Delta m = m_1 - m_2 = -2.5 \log(I_1/I_2)$  egyenletben írjuk be az  $I_1$  intenzitás helyébe a hold, ill. a bolygó által csökkentett Nap intenzitását,  $I_2$

helyébe pedig a teljes intenzitást. Az egyszerűsítés után a kifejezés csak a sugarak négyzeteit fogja tartalmazni a következőképpen:  $\Delta m = -2.5 \log \frac{r_*^2 - r^2}{r_*^2}$ . Az  $r$  sugarak helyébe a Föld, illetve a Hold értékeit behelyettesítve kapjuk a komponensek által okozott magnitúdócsökkenéseket:  $\Delta m_h \approx 0,0085 \text{ mmag}$  és  $\Delta m_F \approx 0,1 \text{ mmag}$ . A számoláshoz szükségesek még a Föld és Hold fedési időpontjainak eltolódásai (P- és M-effektusok értékei), melyeket a numerikus adatsorból kaphatunk meg: sorrendben -2,6 (P) és 224 (M) perc. A fedés középidejének eltolódása a (8)-as egyenlet szerint ezen effektusoknak a magnitúdócsökkenéssel súlyozott átlagai. Vagyis a megfigyelhető időpont-eltolódás:  $(0,0085 \cdot 224 - 0,1 \cdot 2,6) / (0,1085) \approx 15,2$  perc. Az eredményt a későbbi számításokhoz még használni fogjuk.

### 3.5. Extrém esetek

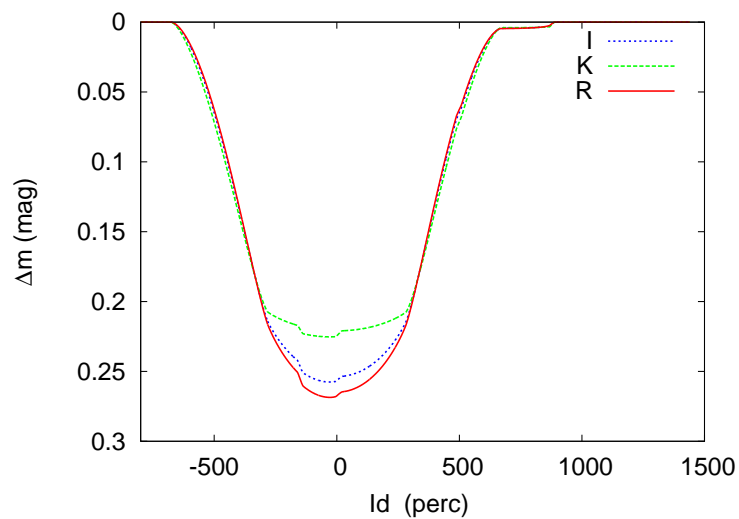
Ahhoz, hogy egy hold hatása periodikusan megfigyelhető legyen, vagyis jellegzetes „fűrészfogas” fénygörbét eredményezzen, a holdnak a tranzit időtartama alatt többször is meg kell kerülnie a bolygóját. Ez akkor lehetséges, ha a bolygó elég távol van a csillagtól, nagy a keringési periódusa. A következőkben ilyen rendszerek fénygörbéjét állítottam elő, melyeket három színszűrőben vizsgáltam. Mindhárom rendszerben a bolygó- és holdpálya inklináció értéke 0 fok, valamint a csillagok körül Jupiter tömegű és másfél Jupiter átmérőjű bolygók keringenek. A többi paraméter értékét a 7. táblázatban foglaltam össze.

Rsz/Paraméter	$u(r/i/k)$	$m_*$ ( $m_N$ )	$m_h$ ( $m_F$ )	$P_b$ (nap)	$P_h$ (nap)	$r_h$ ( $r_F$ )	$\alpha(\text{rad})$
rsz1	0,7/0,6/0,24	0,3	2	4330	0,9	2,3	$1,3\pi$
rsz2	0,6/0,5/0,26	1	2	4330	0,9	2,3	$0,8\pi$
rsz3	0,72/0,61/0,32	0,5	1	6330	1,2	2	$0,8\pi$

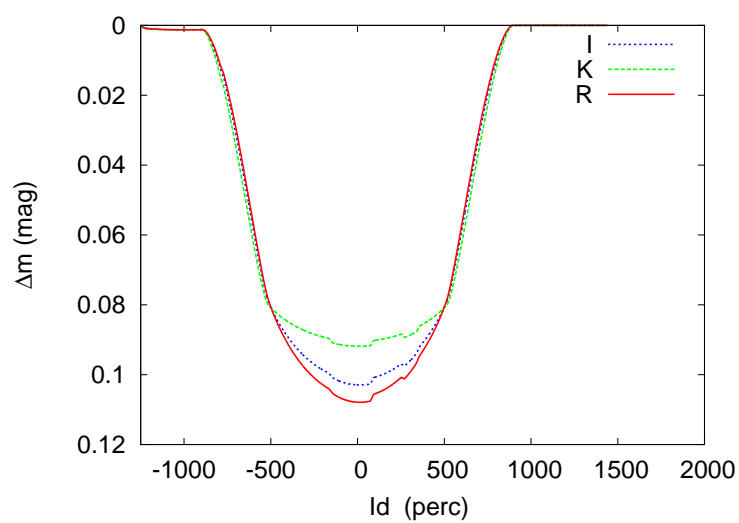
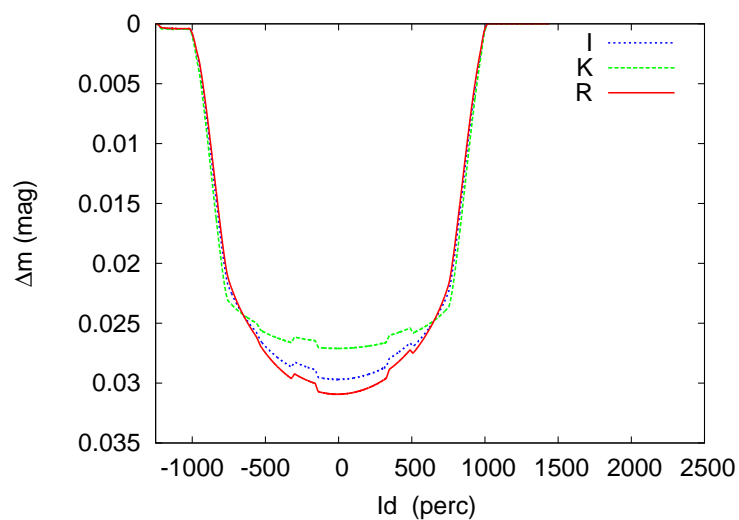
7. táblázat. A rendszerek paramétere

Az első rendszerben a központi csillag egy kis tömegű vörös törpe (10. ábra). Látható, hogy egy ilyen rendszerben a bolygó majd 0,3, a hold pedig 0,01(!) magnitúdós fényességcsökkenést okoz. Ezt a holdat akár földi távcsövekkel is ki lehetne mutatni. Azonban több hátránya van az ilyen rendszereknek. Egyrészt, mivel a bolygó nagy sugarú pályán kering, pályasíkjának nagyon pontosan a látóirányunkba kell esnie, az ettől való nagyon kis eltérés már megghiúsítaná a fedést. Másrészt mivel a bolygónak nagyon nagy (több, mint 10 év) a keringési periódusa, így a többszörös megfigyelés bár lehetséges, de elég reménytelen vállalkozásnak tűnik, főleg, hogy a periódus ismeretlen marad a második tranzitig.

A következő két rendszer is hasonló (11. ábra). Szintén távol keringenek a csillagtól, keringési idejük több, mint 10 év. A fénygörbéken több holdmoduláció is látszik, de azok nagysága már nem éri el az előző konfigurációt.



10. ábra. Az első rendszer fénygörbéje



11. ábra. A 2. és 3. rendszer fénygörbéje

## 4. Egy új eljárás a hold tömegének, sugarának és sűrűségének meghatározására (Simon és mtsai., 2006)

Szabó és mtsai. (2006) az általam írt program használatával további numerikus szimulációkat végeztek, amellyel megkérdőjelezték az Sartoretti-Schneider-modell helyességét. Megmutatták, hogy az SS-modell által jósolt  $T_E$  értékek gyakran összeegyeztethetetlenek a szimulációkkal. Arra következtettek, hogy a SS-modell leírása nem lehet teljes, ugyanis nem veszi figyelembe a hold fotometriai hatásait a fénygörbében. Habár a hold gyakran nem mutatható ki közvetlenül a fénygörbéből, hatása valójában részt vesz a középidejű pont eltolódásában. A teljes leíráshoz ezért a bolygó és hold effektusait is figyelembe kell venni. A következő alfejezetek ennek a modellnek a megvalósítását és eredményeit tárgyalják (Simon és mtsai., 2006).

### 4.1. A fotometriai középpont

Legyen egy bolygó-hold rendszerünk, amelynek a közös tömegközéppontja egyenletes sebességgel körpályán kering a központi csillag körül. A csillag tömege, valamint a bolygó pályasugara a legtöbb esetben ismert, amelyből a keringési sebessége közvetlenül adódik (3-as egyenlet).

A fedés folyamatának leírásához vezessünk be három fontos paramétert:

$$\mu = m_h/m_b, \quad \vartheta = r_h/r_b, \quad \chi = \rho_h/\rho_b, \quad (10)$$

melyek rendre a bolygó és hold tömeg-, sugár- és sűrűségaránya. Ezek közül kettő független, így mindegyik kifejezhető a másik kettő segítségével.

Ha a hold hatása a fénygörbében közvetlenül kimutatható, vagyis a hold által okozott fényességcsökkenés a fotometriai feloldás határán belül van, akkor a sugárarányt közvetlenül tudjuk mérni:

$$\frac{\Delta m_h}{\Delta m_b} = \frac{4\pi r_h^2/4\pi r_*^2}{4\pi r_b^2/4\pi r_*^2} = \frac{r_h^2}{r_b^2} = \vartheta^2, \quad (11)$$

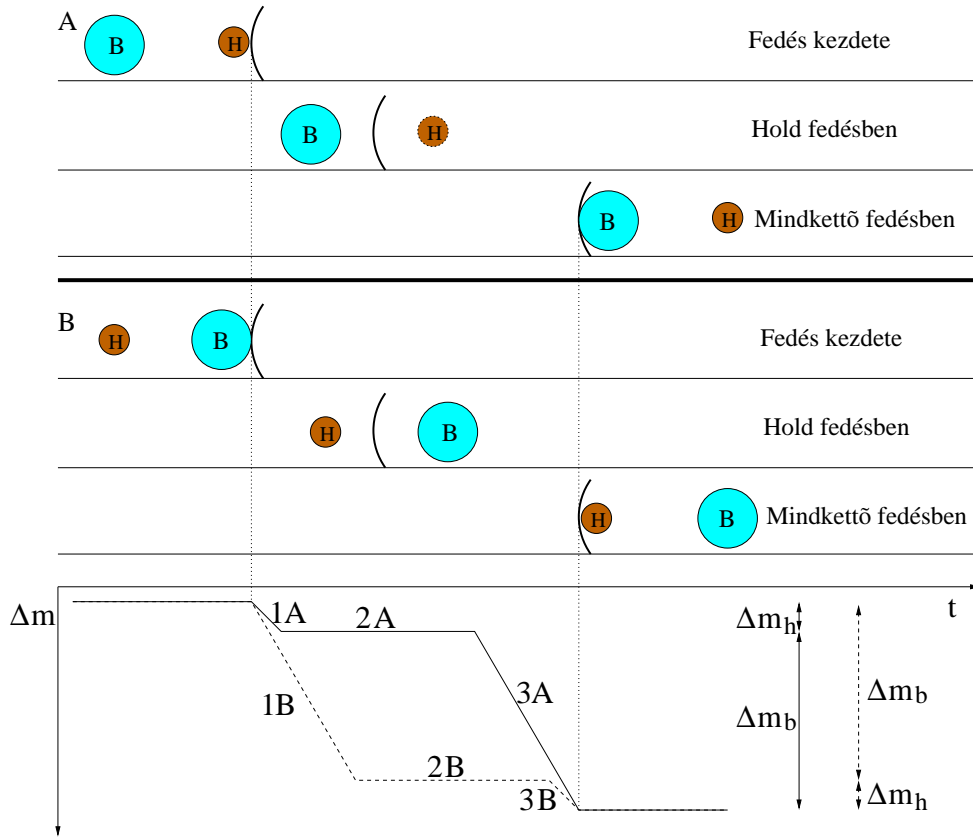
ahol  $\Delta m_h$  és  $\Delta m_b$  rendre a hold és a bolygó által okozott relatív fényességcsökkenés. Ha az effektus nem mérhető közvetlenül, akkor más eszközhöz kell folyamodni, melyet a fénygörbe pontosabb megvizsgálásával érthetünk meg.

Tekintsük a 12. ábrát, amely két idealizált fénygörbét ábrázol; vagyis eltekintünk a csillag peremsötétedésétől, a csillagot egyenletes felületi fényességűnek tesszük fel. Az ábra a fedés folyamatát, s egyben a folyamathoz tartozó fénygörbe menetét ábrázolja. Az „A” esetben a hold kezdi meg a fedést, a bolygó fejezi be; „B” esetben épp ennek a fordítottja történik. A fedés középidejét a következőképpen definiáljuk: a fedéshez tartozó fotometriai pontok középideje súlyozva a fénygörbe relatív fényességcsökkenésével:

$$\tau = \frac{\sum_{fedes} \Delta m_i t_i}{\sum_{fedes} \Delta m_i}. \quad (12)$$

Ez a képlet formálisan a súlypont definíciójával egyenértékű (ha  $t_i$  a „helykoordináta”,  $\Delta m_i$  a „tömeg”). Így  $\tau$  meghatározásához elég a poligonnak tekintett fénygörbe súlypontjának helyzetét vizsgálni.

Ahhoz, hogy analitikusan is meghatározzuk  $\tau$  értékét, először osszuk fel három szakaszra a fénygörbe menetét. Az első szakaszban a hold („B” esetben bolygó)



12. ábra. A fénygörbe menete vezető (folyamatos vonal) és követő (szaggatott vonal) hold esetén.

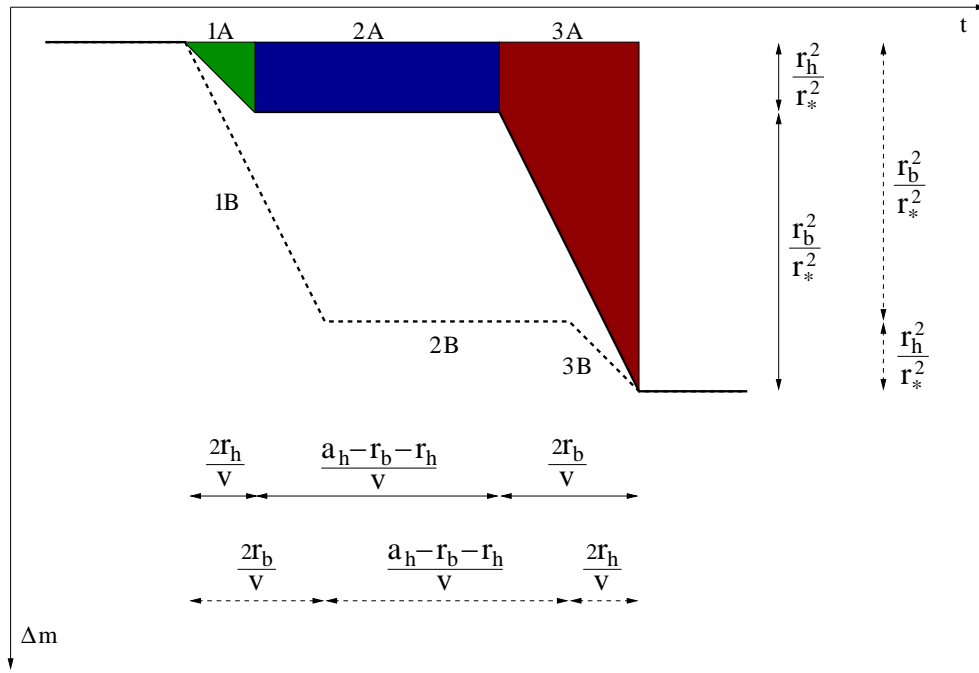
megkezdja a fedést és egyre nagyobb részt fed el a csillagból. A második rész egy vízszintes szakasz, a fedésben csak maga a hold („B” esetben bolygó) vesz részt. Végül a harmadik szakaszban a bolygó takar ki egyre nagyobb részt a csillagból. Számoljuk ki az egyes szakaszok által elfoglalt területeket. Ehhez a 13. ábra nyújt segítséget. A területek számértékeit az 8. táblázat tartalmazza, míg a fedés folyamán bekövetkezett összes fényesség-csökkenés:  $\sum_{fedes} \Delta m_i = \frac{r_h^2 + r_b^2}{r_*^2}$ .

A eset	$\sum \Delta m_i t_i$	B eset	$\sum \Delta m_i t_i$
1A	$\frac{r_h^3}{(r_*^2 v)}$	1B	$\frac{r_b^3}{(r_*^2 v)}$
2A	$\frac{r_h^2 (a_h - r_h - r_b)}{(r_*^2 v)}$	2B	$\frac{r_b^2 (a_h - r_h - r_b)}{(r_*^2 v)}$
3A	$\frac{(2r_h^2 + r_b^2) r_b}{(r_*^2 v)}$	3B	$\frac{(2r_b^2 + r_h^2) r_h}{(r_*^2 v)}$

8. táblázat. Az egyes szakaszok által lefedett területek vezető (A) és követő (B) hold esetén,  $r_*$  a csillagsugár.

A megfelelő tagok összegzése után kapjuk a fedés középidejét. „A” esetben a középidej a hold első kontaktusa után  $\tau_h$ , „B” esetben pedig a bolygó első kontaktusa  $\tau_b$  idővel következik be.

$$\tau_h = \left( \frac{a_h r_b^2}{r_b^2 + r_h^2} + r_h \right) \frac{1}{v}, \quad \tau_b = \left( \frac{a_h r_h^2}{r_b^2 + r_h^2} + r_b \right) \frac{1}{v}. \quad (13)$$



13. ábra. Fényességváltozások és időintervallumok a fedés alatt (A esetben az egyes szakaszok területei színekkel jelölve).

Az előző két kifejezést,  $\tau_h$ -t és  $\tau_b$ -t összeadva, a jobb oldalon  $a_h$ -t kiemelve és egyszerűsítve kapjuk a következő egyenletet:

$$\tau_h + \tau_b = (r_h + a_h + r_b) \frac{1}{v} \quad (14)$$

$$\tau_h + \tau_b = \frac{r_h}{v} + \frac{a_h}{v} + \frac{r_b}{v}. \quad (15)$$

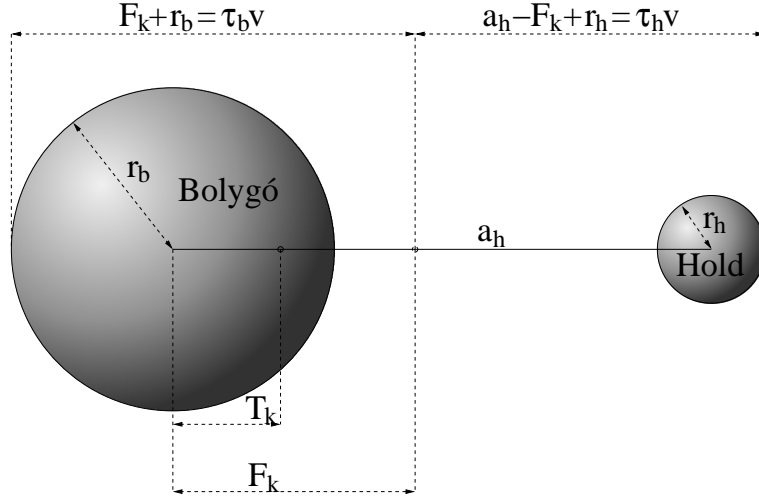
Vegyük észre, hogy a jobb oldali zárójelben (14) a rendszer „teljes nagysága” szerepel, azaz sebességgel osztva megkapjuk a belépéshez szükséges teljes időt. Ez három részből tevődik össze (15): (i) a hold első kontaktusa és a hold középpontjának a csillag peremén való áthaladása közötti idő; (ii) a hold fél nagytengelyének áthaladásához szükséges idő; (iii) a bolygó sugarának (hasonlóan a holdhoz) belépési ideje. A (13)-as egyenletben  $\tau_b$  második tag írja le az (iii) időtartamot, az első tag pedig a tömegközéppont analógiájához hasonló mennyiség, melyet jelen tárgyalásmódban fotometriai-középpontnak nevezünk el. Távolsága tehát a bolygó középpontjától:

$$F_k = \frac{a_h r_h^2}{r_b^2 + r_h^2}. \quad (16)$$

Ezek szerint a fedés középideje pontosan egybeesik a fent definiált fotometriai-középponttal. Helyzetét a 14. ábra szemlélteti, amely fix a bolygó-hold egyenesen. A tömegközépponthoz való relatív helyzetét vizsgáljuk meg úgy, hogy a bolygó és a hold sűrűségét azonosnak vesszük, majd ezt felhasználva írjuk a tömegközéppont definícióját a következő alakban:

$$T_k = \frac{a_h m_h}{m_b + m_h} = \frac{a_h r_h^3}{r_b^3 + r_h^3}. \quad (17)$$





14. ábra. A rendszer tömegközéppontjának és fotometriai-középpontjának helyzete (nem méretarányos).

Legyen a holdsugár harmada a bolygó sugarának, amely jó felső becslés az esetek többségére. Ekkor a

$$F_k = 0,1a_h,$$

$$T_k = 0,036a_h,$$

vagyis az esetek többségében a tömegközéppont közelebb lesz a bolygó középpontjához, mint a fotometriai-középpont a tömegközépponthez,  $0,036 \leq 0,1 - 0,036 = 0,064$ . Egyenlőség  $r_b = 2,206r_h$  esetén van. Ebből látszik, hogy sokkal nagyobb effektust kapunk akkor, ha kis tömegű, de nagyméretű hold kering a bolygó körül.

## 4.2. Az időpont-eltolódás kifejezése tömeg- és sugárárányokkal

A fedés alatt a rendszer tömegközéppontja egyenesen kering a csillag körül. A fedés középidejének ingadozása abból ered, hogy a fotometriai középpont kering a tömegközéppont körül, s a fedések alkalmával más-más pozícióban van. Az ingadozás maximális lehetséges értéke a  $T_E$  időpont-eltolódás, melyet megadhatunk a fotometria- és tömegközéppont geometriai távolságának kétszeresével.

$$T_E = \frac{2}{v} |F_k - T_k| \quad (18)$$

Beírva a  $F_k$  (16) és  $T_k$  (17) definícióját, valamint a (10)-es kifejezéseket, kapjuk:

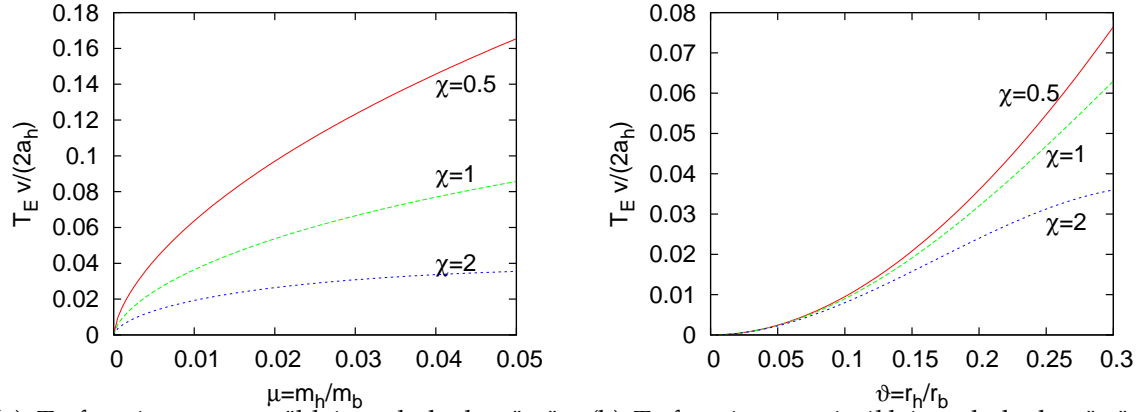
$$T_E = \frac{2}{v} \left| \frac{a_h r_h^2}{r_b^2 + r_h^2} - \frac{a_h m_h}{m_b + m_h} \right| = \frac{2a_h}{v} \left| \frac{\vartheta^2}{1 + \vartheta^2} - \frac{\mu}{1 + \mu} \right|. \quad (19)$$

A nevezőben elhanyagolhatjuk  $\vartheta^2$ -t és  $\mu$ -t az 1-es mellett, mivel értékük 0.01 körül van. Ekkor  $T_E$ -re a következő egyszerűbb kifejezést kapjuk:

$$T_E = \frac{2a_h}{v} |\vartheta^2 - \mu|. \quad (20)$$

Az (5)-ös és (20)-as egyenlet összehasonlítása mutatja a különbséget az SS-modell és a jelen szemléletmód között. Alap elgondolásban az SS-modell csak a bolygót, jelen

megközelítés pedig a fotometriai-középpontot veszi figyelembe a fedés folyamata során.



(a)  $T_E$  függése a tömegtől három különböző sűrűségarány esetén (b)  $T_E$  függése a sugártól három különböző sűrűségarány esetén

15. ábra.

A következőkben az időpont-eltolódást fejezzük ki a sugár-, tömeg- és sűrűségarányval, valamint a képezzük a kapott egyenletek teljes deriváltját a hibaterjedés vizsgálatához.

- Kifejezés sugárárányal

Visszaírva  $v$  és  $\mu$  definícióját a (20)-as egyenletbe, kifejezve a tömeget a sűrűség és a sugár segítségével a következőt kapjuk:

$$T_E = \frac{2a_h}{v} \frac{r_h^3}{r_b^3} \left| \frac{r_b}{r_h} - \frac{\rho_h}{\rho_b} \right| = \frac{2a_h}{v} \left| \frac{1}{v} - \chi \right| v^3, \quad (21)$$

melynek hibaterjedése

$$\Delta T_E = \frac{2a_h}{v} \{ [2v - 3v^2\chi] \Delta v - v^3 \Delta \chi \}. \quad (22)$$

A legtöbb esetben  $\frac{1}{v} - \chi >$ , ezért a (21)-es egyenletben a abszolútérték jelek lecserélhetők sima zárójelekre. Ezt azért tehetjük meg, mert (i) az óriásbolygók esetén  $v \ll 1$ , és  $\chi \approx 1$ , de extrém esetben is csak 5; (ii) Föld-típusú bolygók esetén pedig  $v < 1$  és  $\chi < 1$  az elfogadható.

- Kifejezés tömegarányal

A fentiekhez hasonlóan átalakítva a (20)-as egyenletet, csak most a sugarat fejezve ki a tömeg és sűrűség segítségével kapjuk, hogy:

$$T_E = \frac{2a_h}{v} \left| \left( \frac{m_h/\rho_h}{m_b/\rho_b} \right)^{\frac{2}{3}} - \frac{m_h}{m_b} \right| = \frac{2a_h}{v} \left| \left( \frac{\mu}{\chi} \right)^{\frac{2}{3}} - \mu \right| \quad (23)$$

$$\Delta T_E = \frac{2a_h}{v} \left\{ \left[ \frac{2}{3\chi^{\frac{2}{3}}\mu^{\frac{1}{3}}} - 1 \right] \Delta \mu - \frac{2\mu^{\frac{2}{3}}}{3\chi^{\frac{5}{3}}} \Delta \chi \right\}. \quad (24)$$

A  $\mu$  0,01 körüli értékét ( $0,01^{\frac{2}{3}} \approx 0,046$ ) és a fenti  $\chi$  értékeket véve belátható, hogy (23)-as egyenlet abszolútérték jelei itt is lecserélhetők sima zárójelekre.

Megvizsgálva a differenciálokat, a hiba analízis azt mutatja, hogy a (21)-es egyenlet kevésbé érzékeny a  $\chi$ -ben lévő változásokra, mint a (23). Ebből arra következtethetünk, hogy a jelen modell inkább alkalmasabb sugár, mint tömeg meghatározására. Ezt szemlélteti az 5.(a) és (b) ábra, amely különböző diszkrét  $\chi$ -knél mutatja  $T_E$  értékeit a tömeg és a sugár függvényében.

### 4.3. A sűrűség megbecslése

Meg tudjuk becsülni a felfedezett exorendszer sűrűségarányát, ha a megfigyelés során a hold elegendően nagy magnitúdócsökkenést okoz ahhoz, hogy az közvetlenül kimutatható legyen. Ebben az esetben a relatív fényességcsökkenés arányaiból kapott sugárarány eredményét ( $\vartheta$ ) és az időpont-eltolódás értékét ( $T_E$ ) felhasználva a (21)-es egyenletről a sűrűségarány ( $\chi$ ) meghatározható.

Ha nem tudjuk így becsülni a komponensek sűrűségarányát, de szeretnénk a társak sugarára és tömegére hozzávetőleges becslést tenni, akkor a már ismert bolygó méretének megfelelő sűrűséget válasszunk. Föld-típusú bolygók esetén a bolygónál kisebb, óriások esetén nagyobb sűrűségű hold választása lehet a megfelelő. Az egyszerűség kedvéért jelen esetben válasszuk az azonos sűrűségű komponenseket, legyen  $\chi = 1$ . Ekkor a (21)-es és a (23)-as egyenlet a következő egyszerű alakot veszi fel:

$$T_E \approx \frac{2a_h}{v} \vartheta^2 (1 - \vartheta), \quad (25)$$

$$T_E \approx \frac{2a_h}{v} (\mu^{2/3} - \mu). \quad (26)$$

A fenti egyenletek csak egyetlen ismeretlent tartalmaznak, így egyenes utat adnak a megoldáshoz. A következőkben ezen egyenleteket fogjuk használni ismert fedési exorendszerek sugár- és tömegarányának megbecsléséhez. A méret meghatározása nem annyira sűrűségérzékeny, mint a tömegé, ezért a (25)-ös egyenlet megoldása jobb eredményre vezet, míg a (26)-os csak a tömeg durva megbecslésére alkalmas. A számolásokban a hold fél nagytengelyét mindenütt a Hill-sugár harmadára állítjuk be,  $a_h = a_H/3$ ; a szükséges mennyiségeket,  $m_*$ ,  $m_b$ ,  $a_b$  a spektroszkópiai mérések eredményeiből vesszük.

### 4.4. Tesztelés a Föld-Hold rendszerre

A fent tárgyalt modell jó ellenőrzésére szolgál, ha teszteljük egy olyan rendszerben, melyben ismerjük a komponensek minden paraméterét. Egy ilyen speciális rendszer a Naprendszerünkben a Föld-Hold páros. A 3.4 fejezetben a páros időeltolódására végeztem numerikus számításokat. Figyelembe véve a Nap peremsötétetését, a komponensek valós méretét és keringési idejét eredményül  $T_E = \pm 15,2$  perc adódott. Ennek megfelelően  $T_E v / (2a_s) = 0,054$  a Föld adatai alapján.

Tegyük fel először, hogy a sűrűségarányt nem ismerjük, ezért számoljunk  $\chi = 1$  értékével. A fenti  $T_E$  eredményt felhasználva rendszerünk sugárarányára  $\vartheta = 0.274$ , tömegarányára  $\mu = 0.020$  értéket kapjuk. Holdunk méretére kapott eredmény elég pontosnak bizonyul a valódihoz képest, míg tömege a valós kétszerese. Ebből is látható, hogy a méret meghatározásának pontossága jobb, mint a tömegé. Habár a  $\chi = 1$  feltétel csak hozzávetőleges becslésre elegendő, sűrűségarány ismeretének hiányában  $\vartheta$ -ra még elfogadható eredményt ad. Ha valahonnan tudjuk, hogy

$\chi = 0.605$ , akkor a Föld-Hold rendszer mindkét paraméterére elfogadhatóan precíz eredményt kapunk,  $\vartheta = 0.253$ ,  $\mu = 0.010$  (9. táblázat, utolsó három sor). Mindkét érték a valóstól csak 20%-ban tér el.

Név	$v$ (km/s)	$1/3a_H$ ( $10^3$ km)	$T_E$ (s)	$T_E \cdot v / (2a_h)$
HD 149026 <sup>1</sup>	165	93.2	<120	<0.106
HD 189773 <sup>2</sup>	150	120.3	<120	<0.075
XO-1b <sup>3</sup>	135	160.5	$\lesssim 27$	$\lesssim 0.011$
Tres-1 <sup>4</sup>	140	118.9	<100	<0.059
OGLE-TR-113b <sup>5</sup>	173	92.9	$\approx 43$	$\approx 0.040$
Föld ( $\chi = 1$ )	29.8	499.6	1824	0.054
Föld ( $\chi = 0.605$ )	29.8	499.6	1824	0.054
Föld (valós)	—	—	—	—

Név	$\vartheta = r_h/r_b$	$\mu = m_h/m_b$	$M_{hold}$ ( $M_{Fold}$ )	$M_{hold,SS}$ ( $M_{Fold}$ )
HD 149026 <sup>1</sup>	<0.432	<0.081	<9.23	<12.1
HD 189773 <sup>2</sup>	<0.336	<0.038	<13.83	<27.3
XO-1b <sup>3</sup>	$\lesssim 0.112$	$\lesssim 0.0015$	$\lesssim 0.43$	$\lesssim 3.2$
Tres-1 <sup>4</sup>	<0.288	<0.024	<4.64	<11.4
OGLE-TR-113b <sup>5</sup>	$\approx 0.228$	$\approx 0.012$	$\approx 5.01$	$\approx 16.7$
Föld ( $\chi = 1$ )	0.274	0.020	0.020	0.054
Föld ( $\chi = 0.605$ )	0.253	0.010	0.010	0.054
Föld (valós)	0.272	0.012	0.012	—

9. táblázat. Felső becslés ismert fedési exorendszerek holdjainak sugarára és tömegére. Az utolsó oszlop tartalmazza az SS-modell által meghatározható holdtömegeket a (7)-es képlettel ( $a_h = a_H/3$ ) számolva a könnyebb összehasonlítás végett ( $a_h = a_H/3$ ). Az időpont-eltolódás értékei a következő referenciákból származnak: <sup>1</sup>: Charbonneau és mtsai., 2005; <sup>2</sup>: Bakos és mtsai., 2006; <sup>3</sup>: McCullough és mtsai., 2006; <sup>4</sup>: Steffen és mtsai., 2005; <sup>5</sup>: Gillon és mtsai., 2006.

#### 4.5. Alkalmazás ismert fedési rendszerekre

Az irodalomban öt fedési exorendszer szerepel, amely rendelkezik meghatározott időpont-eltolódás értékkel. A 9. táblázat foglalja össze a rendszerek paramétereit, a külső forrásból származó értékeket, valamint a számolások eredményeit. A hivatkozások által közölt időpont-eltolódás adatok csupán felső becslések vagy körülbelüli értékek, nagyságuk 27 és 120 másodperc között van.

Mivel a rendszerek sűrűségaránya ismeretlen, ezért a számolások során a komponensek sűrűségét azonosnak vettem. A (25)-ös és (26)-os egyenletekkel elvégzett számítások eredményeit az alsó táblázat 2., 3. és 4. oszlop tartalmazza. Az 5. oszlopban az összehasonlítás kedvéért szerepelnek az SS-modell által meghatározható maximális holdtömegek. Az összehasonlításból látható, hogy a jelen modell ugyanazt az időpont-eltolódást kisebb holdtömegekkel is létre tudja hozni.

Érdekes példa az OGLE-TR-113 esete. A bolygó körül keringő hold tömegének meghatározásával Gillon és mtsai. is foglalkoztak. Ők azt találták, hogy egy 7,7 Föld-tömegű hold tudja létrehozni a fedés középidejében megfigyelhető 43 másodperces időpont-eltolódást. Azonban, ha a hold fél nagy tengelyét lerövidítjük a Hill-sugár harmadára, akkor ez a tömeg már meghaladja a 16 Föld-tömeget. Munkájukban azt is kifejtették, hogy nem csak egy hold okozhatta ezt az időpont eltolódást, hanem a rendszerben található második bolygó is. A dolgozatban tárgyalt modell esetén ez az érték a Hill-sugárnál 2, s annak a harmadánál is csak 5 Föld-tömeg. Ez az szám is elég nagy, de egy ilyen méretű és tömegű hold sokkal valószínűbb, és létezése sem zárható ki teljes biztonsággal.

Az XO-1b rendszerben az időpont eltolódás nem kevesebb, mint 27 másodperc. Jelenleg csak ennek a párosnak a hold tagja rendelkezik kisebb tömeggel, mint a maga Föld, értéke 0,43 Föld-tömeg. Ez az SS-modellben 3,23 Föld-tömeg, ha mindkét esetben a hold a Hill-sugár harmadánál kering.

A számítások során megvizsgáltam a rendszerek Roche-sugarát is. Ez azért fontos, mert, ha a Hill-sugár harmada kisebb, mint a Roche-sugár, akkor az ott keringő holdat rövidtávon az árapály erők feldarabolják. A formula a következő:

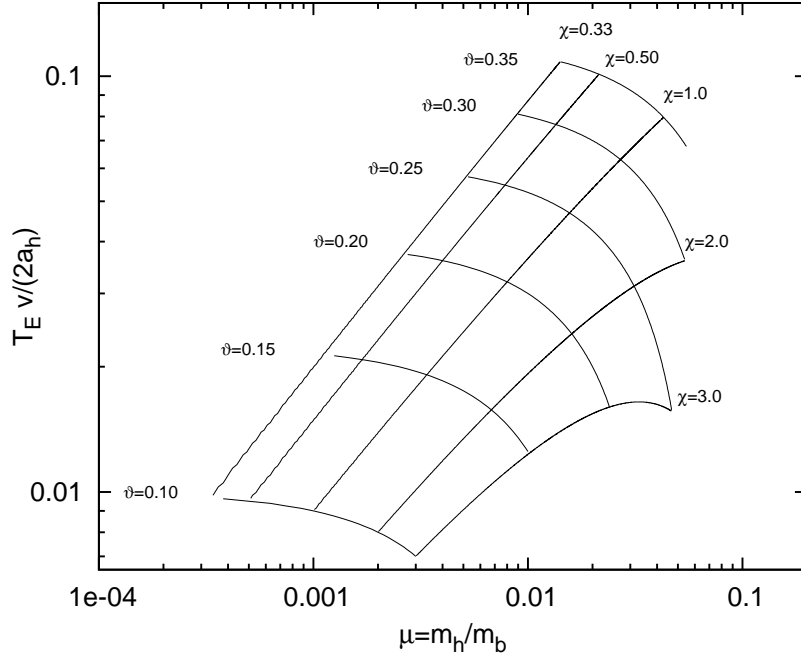
$$a_R = r_b \left( \frac{2}{\chi} \right)^{\frac{1}{3}}, \quad (27)$$

ahol  $a_R$  a Roche-sugár (Roche, 1847-50). Ha behelyettesítjük a számítások során használt  $\chi = 1$  értéket formulánk nagyon egyszerű alakot ölt, egyenlő lesz a sugár 1,26 szorosával ( $\sqrt[3]{2}$ ),  $a_R = \sqrt[3]{2} \cdot r_b$ . Egyetlen probléma az OGLE-TR-113 esetében volt, ahol is a Roche-sugár nagyobbak adódott, mint az  $a_H/3$ . Ez a rendszer ebben a formában nem létezhet, de mivel óriásbolygóról van szó (Schneider, 2006), a hold feltehetőleg sűrűbb a bolygónál. A problémát egy másfélszer nagyobb sűrűségű hold már megoldja.

A 16. ábrán tudjuk összehasonlítani különböző sűrűség- és sugárányok esetén a különböző tömegű holdak által okozott időpont-eltolódást. A konstans  $\chi$  és  $\vartheta$  vonalak segítségével nagyságrendileg meg tudjuk becsülni, hogy ismert sűrűségarány és pozitív időpont-eltolódás detektálása esetén mekkora a rendszer sugár- és tömegaránya.

## 5. Következtetések

Dolgozatomban új modellt dolgoztam a fedési exorendszerekben tapasztalható középidejű időpont-eltolódásra. A modell segít megbecsülni a rendszerben feltételezett hold sugarát és tömegét. A modell abban különbözik az előző SS-modelltől, hogy figyelembe veszi a hold bolygó körüli mozgását és az ebből származó fény változást. Az ebből származó fontos következmény, hogy jelen modellben az időpont-eltolódás nem haladhat meg egy bizonyos határértéket a holdtömeg növekedésével, míg az SS-modellben maga az effektus egyenesen arányos a hold tömegével (5). Ugyanakkor egy nulltömegű és egy túlságosan nagy hold sem képes időpont-eltolódás okozására a fedés középidejében. Vizsgáljunk meg két szélsőséges esetet! Vegyünk először egy nulltömegű holdat (természetesen a sugár is nulla), amely nyilvánvalóan nem okoz időpont-eltolódást. Az (5)-ös és (20)-as egyenletek segítségével könnyen belátható, hogy ezt a feltételt mindkét modell teljesíti. Mi történik akkor, ha veszünk



16. ábra. Különböző sugár- és sűrűségarányok hálós ábrázolása

egy kettőst, melyben a komponensek mérete és tömege pontosan megegyezik? A szimmetria miatt tömeg- és a fotometriai-középpont egybeesik, s az a reális, ha a rendszer nem produkál időpont-eltolódást. A (20)-as egyenletbe  $\vartheta$  és  $\mu$  helyébe 1-et helyettesítve az egzakt megoldást kapjuk,  $T_E = 0$ . Az SS-modell azonban egy  $a_h/v$ -vel arányos effektust hoz létre, mely a modell használhatóságának korlátait mutatja meg.

A 16. ábráról is hasonló következtetéseket vonhatunk le. A konstans  $\chi$  vonalak mentén a tömeg növekedésével egyre nő az időpont-eltolódás, de nem minden esetben. Például  $\chi = 3$  vonal mentén  $T_E$   $\mu = 0.034$  esetén eléri maximális értékét, majd  $\mu$  növekedésével csökken. Másrészt a konstans  $\vartheta$  vonalak (fix holdsugarak) azt mutatják, hogy a sűrűség alacsony értékénél  $T_E$  maximális. Adott átmérőnél ugyanis, ha a sűrűség csökken, akkor csökken a tömeg is. Ez azt eredményezi, hogy a tömeg-középpont közelebb kerül a bolygó középpontjához, míg a  $\vartheta$ -tól függő fotometriai-középpont helyben marad, azaz nő kettőjük között a távolság, nő a  $T_E$  értéke is. Ez a távolság azonban nem haladhatja meg a bolygó középpontja és a fotometriai-középpont közötti távolságot, vagyis  $T_E$ -nek is lesz maximális értéke.

Ez a maximális érték analitikus úton meghatározható, ha a (21)-es és (23)-as egyenleteknek megvizsgáljuk a maximumát egy adott sűrűségaránynál.  $\chi = 1$  esetén a (25)-ös és (26)-os egyenleteket deriválva és egyenlővé téve nullával az időpont eltolódás maximumára  $vT_E/2a_h \approx 0.148$  kapjuk, melyet két egymással ekvivalens érték,  $\vartheta = 2/3$  és  $\mu = 8/27$  esetén vesz fel. Így a megfigyelések nézőpontjából értelmetlen az a becslés, amely meghaladja egy fizikailag lehetséges hold által okozott időpont-eltolódás maximumát.

Nagy értékkel rendelkező  $T_E$ -nek is lehet azonban fizikai jelentése. Ismerünk olyan folyamatokat, amelyek a fénygörbe középidéjében nagyobb eltolódást okoznak, mint az exoholdak. Ilyen például egy második bolygó perturbációi által okozott időpont-eltolódás (Steffen, 2006; Gillon és mtsai., 2006), vagy éppen a Jupiter

kisbolygó családjához hasonló exotrójaiak hatása (Ford & Gaudi, 2006).

A megfigyelésekből származó nagy  $T_E$  esetében tehát először meg kell vizsgálni a fenti lehetőségek mindegyikét, s csak ezután dönthető el teljes bizonyossággal, hogy melyik rendszer okozhatta a fénygörbe középidejének eltolódást. Kis értékek esetén nagy valószínűséggel tehetjük fel, hogy az effektust egy hold okozta, mivel a többi lehetséges konfiguráció csak nagyobb mértékű időpont-eltolódást képes okozni.

A dolgozat eredményeit öt pontban lehet összefoglalni.

- Dolgozatomban exobolygók körül keringő holdak vizsgálatával foglalkoztam. Olyan rendszerekben végeztem numerikus számításokat, melyekben a bolygó és a hold elhalad a központi csillaguk előtt csökkentve annak fényességét. A páros által létrehozott fedési fénygörbék tanulmányozásából arra a következtetésre jutottam, hogy a hold fotometria hatásai közül a legfontosabb a fedés középidejének időpontjában történő eltolódás.
- A szakirodalomban ennek az időpont-eltolódásnak a magyarázatára az eddig még numerikus úton nem tesztelt Sartoretti-Schneider-modell adott választ (továbbiakban SS-modell). Szabó és mtsai. (2006) által végzett numerikus szimulációkban azonban olyan eredmények születtek, melyek nem voltak összeegyeztethetőek a SS-modell által jósolt értékekkel. A részletesebb elemzések kimutatták, hogy a probléma az SS-modellel van, ugyanis olyan bolygó-hold konfigurációk esetén is mutatott ki időpont eltolódást, amikor a rendszer szimmetriája miatt nem jöhetne létre (például azonos méret és tömeg esetén). Az eltérő eredmények abból adódtak, hogy az SS-modell nem vette figyelembe a hold fénygörbére gyakorolt hatásait. Modellemben ezeket hatásokat már számításba vettem, így a szimulációkkal már összhangban álló eredményeket kaptam. Az új modell használatával megoldódtak az SS-modell problémái és korlátai, valamint az exobolygók körül keringő holdaknak nem csak a tömege, hanem sugara és a sűrűsége is becsülhető.
- Az új modellt megvizsgáltam a megfigyelések szempontjából is, amely azt mutatta, hogy egy adott időpont-eltolódás esetén a páros sűrűségarányának változtatásából eredően a meghatározott holdtömeg szélesebb skálán vesz fel értékeket, mint a sugár. Ebből az következik, hogy a modell pontosabb eredményt ad a méret meghatározására, melyet az esetleges jövőbeli megfigyeléseknek is figyelembe kell venni.
- A mérések szempontjából fontos az az eredmény is, hogy adott sűrűségarány mellett az időpont-eltolódásnak létezik maximuma. A megfigyelések szemszögéből az ennél nagyobb becsült értékek nem tartozhatnak egy fizikailag valós bolygó-hold rendszerhez.
- A Föld-Hold rendszer szimulált fedésének vizsgálatával a modell a helyes eredményeket adta vissza a Hold paramétereire. Ismert fedési rendszerekben végzett számításaim kimutatták, hogy ugyanazt az időpont eltolódást az új modell kisebb holdtömegek esetén is létre tudja hozni, melynek eredményeképpen a korábbi SS-modell által megjósolható maximális holdtömegek felére-harmadára csökkentek.

## Köszönetnyilvánítás

Szeretnék köszönetet mondani témavezetőimnek, Dr. Szabó M. Gyulának és Dr. Szatmáry Károlynak, hogy lehetőséget adtak a tudományos kutató munkába való bekapcsolódáshoz; továbbá, hogy észrevételeikkel, szakmai tanácsaikkal segítettek a dolgozat készítése alatt felmerülő problémák helyes felismerésében és megoldásában. Köszönettel tartozom Székely Péternek, hogy bevezetett az angol formalizmusok helyes értelmezésébe, valamint Csák Balázsnak, hogy segített megoldani a dolgozatom „papír formába való öntését”. Köszönet illeti Divéki Zsoltot, valamint szobatársamat Csányi Attilát is a programozás rejtelmeibe való bevezetésért. Nem utolsó sorban szeretnék köszönetet mondani a családomnak a rengeteg támogatásért, s hogy végig kiálltak mellettem.



## Hivatkozások

- [1] Agol, E., Steffen, J., 2005, MNRAS 359, 567
- [2] Alonso, R., Brown, T.M. és mtsai., 2004, ApJL, 613, L153
- [3] Auvergne, M., Boisnard, L., Buey, J-T. M. és mtsai., 2003, SPIE, 458, 170
- [4] Backer, D.C., Foster, R.S. & Sallmen, S., 1993, Nature, 365, 817
- [5] Bakos, 2004, személyes közlés, (PhD védés)
- [6] Bakos, G.A., Knutson, H., Pont, F. és mtsai., 2006, astro-ph/0603291
- [7] Barnes, J.W., O'Brien, D.P., 2002, ApJ, 575, 1087
- [8] Borucki, W.J., Koch, O.G., Lissauer, J.J., 2003, SPIE, 458, 129
- [9] Bouchy, F., Pont, F. és mtsai., 2004, A&A, 421, 13
- [10] Brown, T.M., Charbonneau, D. és mtsai., 2001, ApJ, 552, 699
- [11] Cameron, A.C., Bouchy, F., Hebrard, G., 2006, MNRAS, beküldve, astro-ph/0609688
- [12] Charbonneau, D., Brown, T. M. és mtsai., 2000, ApJ, 529, L45
- [13] Charbonneau, D., Winn, J.N., Latham, D. W. és mtsai., 2005, ApJ, 636, 445
- [14] Chauvin G., Lagrange A.M. és mtsai., 2004, A&A, 425, L29
- [15] Claret, A., Díaz-Cordovés, J., & Giménez A., 1995, A&AS 114, 247
- [16] COROT, 2006, <http://smc.cnes.fr/COROT/>
- [17] Deeg, H.J., 2002, ESA SP-514, 237
- [18] Érdi, B., 2003, Égi mechanika, ELTE, 176-209 o.
- [19] Ford, E.B., Gaudi, B.S., 2006, ApJL, beküldve, astro-ph/0609298
- [20] Gillon, M., Pont, F., Moutou, C., 2006, astro-ph/0606395
- [21] Girardi, L., Bertelli, A., Bressan, C. és mtsai., 2002, A&A, 391, 195
- [22] HAT, 2006, <http://cfa-www.harvard.edu/~gbakos/HAT/intro.html>
- [23] Huygens, C., 1698, The Celestial Worlds Discover'd, hasonmás kiadás, CASS, 1968
- [24] Kaye, T.G., Vanaverbeke, S., Innis, J., 2006, JBAA, 116, 78
- [25] KEPLER, 2006, <http://www.kepler.arc.nasa.gov/>
- [26] Konacki, M., Guillermo, T. és mtsai., 2003, Nature, 421, 507
- [27] Konacki, M., Guillermo, T. és mtsai., 2005, ApJ, 624, 372

- [28] Mayor, M. & Queloz D., 1995, *Nature*, 378, 355
- [29] McCullough, P.R., Stys, J.E., Valenti, J.A. és mtsai., *ApJ*, 648, 1228
- [30] Muterspaugh, M.W., Lane, B.F. és mtsai., 2006 *SPIE*, 6268, 16
- [31] O'Donovan, F.T., Charbonneau, D. és mtsai., 2006, *ApJL*, 651, L61
- [32] OGLE, 2006, <http://www.astrouw.edu.pl/~ogle/>
- [33] Pont, F., Bouchy, F. és mtsai., 2004, *A&A*, 426, 15
- [34] Queloz D., 2006, *Nature*, 439, 400
- [35] Roche É., 1847-50, *Acad. des sciences de Montpellier*, 1, 243
- [36] Sartoretti, P., Schneider, J., 1999, *A&AS*, 134, 550
- [37] Schneider, J., 2000, *Encyclopedia of Astronomy and Asrtophysics*, 759 o.
- [38] Schneider, J., 2006, *The Extrasolar Planets Encyclopaedia*,  
<http://exoplanet.eu/catalog.php>
- [39] Simon, A., 2005, *SZTE*, Nyári dolgozat
- [40] Simon, A., Szatmáry, K., Szabó, Gy.M., 2006, *A&A*, beküldve
- [41] Steffen, J.H., 2006, PhD dissertation, University of Washington,  
[astro-ph/0609492](http://astro-ph/0609492)
- [42] Steffen, J.H., Agol, E., 2005, *MNRAS L*, 364, 96
- [43] Szabó, Gy.M., Szatmáry, K., Divéki, Zs. and Simon, A., 2006, *A&A*, 450, 395
- [44] Szatmáry, K., 2003, *Bolygók más csillagok körül*, Meteor csillagászati évkönyv,  
204 o.
- [45] Szatmáry, K., 2006, *Magyar Tudomány*, 8, 968. o.
- [46] Szatmáry, K., 2006, <http://astro.u-szeged.hu/ismeret/exo/extrasol.html>
- [47] SuperWASP, 2006, <http://www.superwasp.org/index.html>
- [48] TrES, 2006, <http://www.astro.caltech.edu/~ftod/tres/tres.html>
- [49] Wolszczan, A. & Frail D., 1992, *Nature*, 355, 145

# Függelék

```

var
  i,j,k:longint;
  starint: array[-3000..3000,-2000..2000] of real;
  ib,ih,ik: array[-2000..2000] of real;
  r1,r2,hatv,rcsillag,mul,mu2,nu,l2x,l2y,v,rb,rh,ker,t,vh,h1,h2,ab,ah:real;
  I0,l,gamma,delta,xtkp,ytkp,deltax,deltay,xb,yb,xh,yh,tb,th,tk:real;

const
  inkb=: {bolygo inklinacio}
  inkh=: {hold inklinacio}

  u=: {peremsotetedes}

  m1=: {csillag tomege napegys}
  m2=: {bolygo tomege jupiteregys}
  m3=: {hold tomege foldegys (pl.:ganymedes)}

  pb=: {bolygo ker ido napokban}
  ph=: {hold ker ido napokban}
  alfa=: {hold kezdofazisa}

  rbolygo=: {bolygo sugara jupiteregys}
  rhold=: {hold sugara foldegys}

function C(x,y,a,b:real):real;
begin
  r1:=sqrt(sqr(x-a)+y*y); {naptol valo tav}
  r2:=sqrt(sqr(x+1-a)+y*y); {foldtol valo tav}
  C:=((1-a)*r1+r1+a*r2*r2)+2*(1-a)/r1+2*a/r2-b*b; {C definicioja}
end;

procedure stability; {hill stabilitas vizsgalo resz} (A)
begin
  if m1<1 then hatv:=0.85 else hatv:=0.56; {csillag tomeg-sugar osszefugges}
  rcsillag:=exp(hatv*ln(m1))*696000; {csillag sugara napegys}

  mul:=(m2/1047.37)/(m2/1047.37+m1); {tomegarany (1047.37=jupiter/nap)}

  nu:=exp((1/3)*ln(mul/(3-3*mul))); {definicio}

  l2x:=mul-1+nu*(1.0-nu/3-nu*nu/9-23/81+nu*nu*nu+151/243*sqr(sqr(nu))-sqr(sqr(nu))*nu/9);
  {L2 pont x koord}
  l2y:=0; {L2 pont y koord}

  v:=0; {L2 pont sebessege}

  rb:=exp((1/3)*ln(7.496e-6*pb*pb*(m2/1047.37+m1))); {bolygo naptol valo tav (CSE)}
  {7.469e-6 kostansok szorzata, kepler III-at hasznalva}
  rh:=exp((1/3)*ln(7.157e-9*ph*ph*(m3/316.66+m2))); {hold foldtol valo tav (CSE)}
  {7.157e-9 kostansok szorzata, kepler III-at hasznalva}

  ker:=2*rh/rb*pi; {holdpalya kerulete}
  t:=((2*pi)/pb)*ph; {hold ker ideje 2pi egys.ben (def.)}
  {(2*pi)/pb a forgo koord. rsz. szogsebessege}
  vh:=ker/t; {hold sebessege}

  h1:=mul-1-rh/rb; {hold helyzete: H-B-N}
  h2:=mul-1+rh/rb; {hold helyzete: B-H-N}

  ab:=69000*rbolygo/rcsillag; {bolygo sugara csillagsugar egysegben}
  ah:=6378*rhold/rcsillag; {hold sugara csillagsugar egysegben}
  rb:=rb*149600000/rcsillag; {bolygo palyasugara csillagsugar egysegekben}
  rh:=rh*149600000/rcsillag; {hold palyasugara csillagsugar egysegekben}
  mu2:=m3/(m2*316.6666); {hold es bolygo tomegaranya}

end;

```

```

procedure starmodel;      {elkesziti az 1000 "egyseg" sugaru csillagot}
begin
  for i:=-3000 to 3000 do
  begin
    for j:=-2000 to 2000 do
    begin;
      if ((i+i+j*j) <= 1000*1000) then starint[i,j]:=1-u+u*sqrt(1-(i+i+j*j)/1000000)
      else starint[i,j]:=0;

    end;
  end;
end;

```

(B)

```

procedure starflux;      {egyszeru integralas a -1000:1000,-1000:1000 racson}
begin
  for i:=-1000 to 1000 do
  begin
    for j:=-1000 to 1000 do
    begin;
      I0:=I0+starint[i,j];
    end;
  end;
end;

```

(C)

```

procedure bolygotakaras; {bolygo es kozos takarast szamol}
begin
  ib[k]:=0;
  ik[k]:=0;
  if (trunc((xb-ab)*1000)-1>-3000) and (trunc((xb+ab)*1000)+1<3000) then
  begin;
    for i:=trunc((xb-ab)*1000)-1 to trunc((xb+ab)*1000)+1 do
    begin;
      for j:=trunc((yb-ab)*1000)-1 to trunc((yb+ab)*1000)+1 do
      begin;
        if (sqr(i-xb*1000)+sqr(j-yb*1000)<=ab*ab*1e6) then ib[k]:=ib[k]+starint[i,j];
        if ((sqr(i-xb*1000)+sqr(j-yb*1000)<=sqr(ab)*1e6) and
            (sqr(i-xh*1000)+sqr(j-yh*1000)<=sqr(ah)*1e6)) then ik[k]:=ik[k]+starint[i,j];
      end;
    end;
  end;
end;

```

(D1)

```

procedure holdtakaras;  {holdtakarast szamol}
begin
  ih[k]:=0;
  if (trunc((xh-ah)*1000)-1>-3000) and (trunc((xh+ah)*1000)+1<3000) then
  begin;
    for i:=trunc((xh-ah)*1000)-1 to trunc((xh+ah)*1000)+1 do
    begin;
      for j:=trunc((yh-ah)*1000)-1 to trunc((yh+ah)*1000)+1 do
      begin;
        if (sqr(i-xh*1000)+sqr(j-yh*1000)<=ah*ah*1e6) then ih[k]:=ih[k]+starint[i,j];
      end;
    end;
  end;
end;

```

(D2)

BEGIN

```

stability;
starmodel;
starflux;

```

```

if ((C(h1,0,mul,vh)+C(h2,0,mul,vh))/2<C(l2x,l2y,mul,v)) or (ab+ah>rh) then {letezik-e a rsz.?.}
begin
  writeln('nincs ilyen rendsz. ');
  writeln('C(hold):', (C(h1,0,mul,vh)+C(h2,0,mul,vh))/2:8:6, ' ?> C2:', C(l2x,l2y,mul,v):8:6);
  writeln('hold sugara+bolygo sugara:', ah+ab:8:6, ' ?< b-h tavolsag:', rh:8:6);
end

```

```

else
begin;
if 360*pb<1440 then l:=360*pb else l:=1440; {ne kelljen sokat varni}
if 1000+1000*(rh+ah)>1000*rb*(sin(inkb*pi/180)/cos(inkb*pi/180)) then {fedes lehet-e}
begin;
for k:=-trunc(l) to trunc(l) do
begin;
gamma:=2*pi*k/(1440*pb); {y koord tengely also szarától merve}
delta:=alfa+2*pi*k/(1440*ph); {y koord tengellyel || tengelytől merve}

xtkp:=rb*sin(gamma); {hold-bolygo rsz tkp-janak x koord}
ytkp:=-rb*cos(gamma)*sin(inkb*pi/180); {hold-bolygo rsz tkp-janak y koord}

deltax:=rh*sin(delta);
deltay:=-rh*cos(delta)*sin(inkh*pi/180);

xb:=xtkp-mu2/(1+mu2)*deltax;
yb:=ytkp-mu2/(1+mu2)*deltay;

xh:=xtkp+1/(1+mu2)*deltax;
yh:=ytkp+1/(1+mu2)*deltay;

bolygotakaras; {csak a bolygo koruli negyzetben szamol intenzitast}
holdtakaras; {csak a hold koruli negyzetben szamol intenzitast}

tb:=0;th:=0;tk:=0;

tb:=ib[k];
th:=ih[k];
tk:=ik[k];

writeln(k, ' ', -2.5*(ln((I0-(tb+th)+tk)/I0)/ln(10)));
{hozzadja a kozost, ami ketszer lett levonva, ha bolygo-hold fedes van}
{itt szamitja a magnitudot a takarasok figyelembe vetelevel}
end;
end else writeln('nincs fedes');
end;
END.

```