

Szegedi Tudományegyetem
Természettudományi és Informatikai Kar
Elméleti fizikai tanszék

TDK dolgozat

**Spin-dominált és spines effektív egy test
gravitációs hullámformák összehasonlítása**

Tarjányi Tamás
II. éves fizikus Msc. hallgató

Témavezetők:

Tápai Márton, predoktor, SZTE TTIK Kísérleti Fizikai Tanszék
Dr. Gergely Árpád László, egyetemi tanár, az MTA doktora, SZTE TTIK
Elméleti fizikai Tanszék, SZTE TTIK Kísérleti Fizikai Tanszék

Szeged, 2016

Tartalomjegyzék

| | |
|--|-----------|
| 1. Bevezetés | 2 |
| 2. Gravitációs hullámok elméleti háttere | 4 |
| 2.1. Általános relativitáselmélet | 4 |
| 2.2. Gravitációs hullámok gyengetér közelítésben | 5 |
| 2.3. Általános megoldás | 8 |
| 2.4. Detektálás | 8 |
| 3. Posztnewtoni (PN) formalizmus | 12 |
| 4. Spines effektív egytest gravitációs hullámforma | 14 |
| 5. Spin-dominált hullámforma | 17 |
| 6. Összehasonlítás | 19 |
| 7. Összegzés | 26 |
| 8. Köszönetnyilvánítás | 27 |
| A. Függelék | 28 |

1. fejezet

Bevezetés

Az általános relativitáselmélet a téridőt az anyag által kialakított geometriai görbületként értelmezi, ennek függését az anyagtól az Einstein-egyenletek írják le. A gravitációs hullám a téridő görbületén keletkezett kis zavar hullámszerű terjedése. Az elmélet szerint akkor keletkeznek gravitációs hullámok, ha egy rendszer kvadrupólmomentumának első és második időderiváltja sem nulla. A fekete lyukak és neutroncsillagok által alkotott kompakt kettősök ilyen rendszerek. Közvetett bizonyítékot a létezésükre a Hulse-Taylor kettős pulzár rendszer vizsgálata során találtak először. A keringésük során a periódusváltozás igen nagy pontossággal illett az elmélet jóslta görbére. Ezért a munkáért 1993-ban Nobel díjat kapott Russel Hulse és Joseph Taylor [1]. Azóta több kettősre is igazolták a megfigyelésüket.

A LIGO nemzetközi tudományos kollaboráció azért jött létre, hogy gravitációs hullámokat mérjenek[2]. A szeizmikus zajszűrést 2015-ben javították Advanced LIGO projekt néven [3]. A LIGO berendezések nagy pontosságú Michelson-interferométerek, melyek alkalmasak a beérkező gravitációs hullámok kimutatására 10^{-18} hosszváltozás esetén is, mely 3 nagyságrenddel kisebb a protonnál. A modellek által jóslott hullámokat az illesztett szűrés („matched filtering”) eljárással hasonlítják össze a zajos adatokkal. 2015 szeptemberben sikerült közvetlen mérésekkel igazolnia a LIGO-nak a gravitációs hullámok létezését [4]. A becslések szerint 410_{-180}^{+160} megaparszekre volt a forrás, amely egy összeolvadó kompakt kettős fekete lyuk rendszer. A kisebbik tömege $29_{-4}^{+4} M_{\odot}$ a nagyobbik $36_{-4}^{+5} M_{\odot}$, az összeolvadás után az össztömeg $62_{-4}^{+4} M_{\odot}$, azaz $3_{-0.5}^{+0.5} M_{\odot}$ tömegnyi energia szabadult fel.

A jövőre vonatkozóan az a terv, hogy az űrbe telepítenek ki egy rendszert, melynek

5 millió kilométeres karhosszai lennének, ez a LISA. Az indítására kitűzött dátum 2034. Ez lehetővé tenné nagyobb tömegű fekete lyuk kettősök bespirálózása által keltett gravitációs hullámok detektálását, valamint a zajt is csökkentené[5]. Az alsó mérhető frekvencia határa az Advanced LIGO-nak 10 Hz, míg LISA-nak 10^{-5} HZ.

A kompakt kettősök összeolvadása három fázisra osztható: bespirálózás, összeolvadás és lecsengés. A bespirálózás analitikusan tárgyalható, posztnewtoni formalizmusban szokás. Az összeolvadás numerikus módszerekkel tárgyalható. A lecsengés során a két fekete lyuk már egybeolvadt és egy perturbált fekete lyukként lehet kezelni. Ezt a fázist is lehet analitikusan kezelni, melynek megoldása, hogy csillapodó gravitációs hullámot bocsát ki a rendszer [6].

Munkám során a bespirálózást leíró két modellt hasonlítottam össze Python-ban írt szkripteket futtatva. Mindkettő spines fekete lyuk kettősöket ír le, ezek a „spin-dominated waveform” (SDW) és „spinning effective one body-numerical relativity” (SEOBNR). Mindkét modell kihasználja, hogy a teljes impulzusmomentum (a pálya-impulzusmomentum és spinek összege) iránya állandó. Az SDW egyrészt posztnewtoni, valamint a pálya-impulzusnyomaték és a domináns spin hányadosa szerinti sorfejtést is felhasznál. Az SEOBNR Hamiltoni-formalizmust használ az úgynevezett kváziszférikus sorfejtésben. A két modell által jósolt hullámok egyezését vizsgáltam össztömeg és tömegarány változtatásával különböző spinekre és pálya-impulzusmomentumokra. Az összehasonlításokból látszó különbség oka az lehet, hogy a a megállási feltételek különbözőek a két modellben, valamint a SEOBNR bizonyos kis tömegarányú korrekciókat nem tartalmaz.

2. fejezet

Gravitációs hullámok elméleti háttere

2.1. Általános relativitáselmélet

Az általános relativitáselmélet a téridőt az anyag által kialakított geometriai görbületként értelmezi, ennek függését az anyagtól az Einstein-egyenletek írják le. A geometria kifejezhető a g_{ab} metrikus tenzorral, amely mennyiség a gravitációs potenciállal áll kapcsolatban. Az ívelemnégyzettel a következő kapcsolatban áll:

$$ds^2 = g_{ab} dx^a dx^b, \quad (2.1)$$

ahol az ismétlődő alsó és felső indexek összegzést jelentenek. Ezek az indexek 0-tól futnak 3-ig, a 0 index jelenti az idő részt és 1,2,3 a tér részt. A Christoffel-szimbólumok a tér görbeségére vonatkozó mennyiség a differenciálgeometriában és a metrikus tenzorral így fejezhető ki:

$$\Gamma_{bc}^a = \frac{1}{2} g^{ad} (\partial_b g_{cd} + \partial_c g_{bd} - \partial_d g_{bc}). \quad (2.2)$$

A differenciálható sokaságokon értelmezett mennyiségek geometriáját leíró mennyiség a Riemann tenzor, az előző mennyiségekkel így írható fel:

$$R_{bcd}^a = \partial_c \Gamma_{db}^a - \partial_d \Gamma_{cb}^a + \Gamma_{ce}^a \Gamma_{db}^e - \Gamma_{de}^a \Gamma_{cb}^e, \quad (2.3)$$

ahol $\partial_c = \frac{\partial}{\partial x^c}$ deriválást jelenti. Ebből származtatható a Ricci tenzor, amely a spúrja a Riemann tenzornak:

$$R_{acb}^c = R_{ab}, \quad (2.4)$$

és a Ricci skalár pedig:

$$R = R^a_a. \quad (2.5)$$

Az indexek mozgatóját a következő képpen lehet megvalósítani:

$$V^a = g^{ab}V_b, \quad (2.6)$$

ahol g^{ab} az alsó indexes metrikus tenzor inverze, és az alsó indexes V_b mennyiség pedig egy egy-forma. Ezen geometriai mennyiségekkel írhatók le az Einstein-egyenletek, amelyek azt mondják meg, hogy az anyag milyen geometriát alakít ki, az ezt leíró egyenlet:

$$G_{ab} = R_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}R = -8\pi T_{ab}. \quad (2.7)$$

T_{ab} az energia-impulzus tenzor, amely az anyagra jellemző mennyiségekből áll és G_{ab} az Einstein tenzor. Az Einstein-egyenletek 10 független differenciálegyenletből épülnek fel. A megoldása szimmetria feltevésekkel és közelítéseket felhasználva lehetséges.

2.2. Gravitációs hullámok gyengetér közelítésben

A számolások során $c = G = 1$ a mértékegység, valamint a $(+, -, -, -)$ szignatúrát használom. A gravitációs hullámokat gyenge tér közelítésben a sík Minkowski metrikára ráakódott kis pertrubációként kezelik, ez a következőt jelenti:

$$g_{ab} = \eta_{ab} + h_{ab}. \quad (2.8)$$

Az abszolút értéke a pertrubációnak kicsi, azaz $|h_{ab}| \ll 1$ és a deriváltjai $|\partial_c h_{ab}| \ll 1$. A Minkowski metrika deriváltjai nullák, azaz $\partial_c \eta_{ab} = 0$. Az ebből számolt Christoffel-szimbólumot csak lineáris rendig számoljuk:

$$\Gamma_{bc}^a = \frac{1}{2}\eta^{ad}(\partial_b h_{cd} + \partial_c h_{bd} - \partial_d h_{bc}). \quad (2.9)$$

Ekkor a metrikából számolt Riemann tenzor:

$$R_{bcd}^a = \frac{1}{2}(\partial_c \partial_b h_d^a - \partial_c \partial^a h_{bd} - \partial_d \partial_b h_c^a + \partial_d \partial^a h_{bc}). \quad (2.10)$$

A spúrját számolva megkapjuk a Ricci tenzort:

$$R_{ab} = R_{acb}^c = \frac{1}{2} (\partial_b \partial_a h + \square^2 h_{ab} - \partial_c \partial_a h_b^c - \partial_b \partial^c h_{ac}), \quad (2.11)$$

ahol $h = h_a h^a$ és \square d'Alambert operátor a következőt jelenti:

$$\square = \partial^a \partial_a = g^{ab} \partial_b \partial_a. \quad (2.12)$$

Az ebből adódó Ricci skalár:

$$R = \square^2 h - \partial_a \partial_b h^{ab}. \quad (2.13)$$

Ezekből felírható az Einstein-egyenlet:

$$\partial_b \partial_a h + \square^2 h_{ab} - \partial_b \partial_e h_a^e - \partial_e \partial_a h_b^e - \eta_{ab} (\square^2 h - \partial_e \partial_i h^{ei}) = -8\pi T_{ab}. \quad (2.14)$$

Bevezetjük az úgy nevezett nyom megfordított mennyiséget, amely a h_{ab} -ra a következő:

$$\bar{h}_{ab} = h_{ab} - \frac{1}{2} \eta_{ab} h. \quad (2.15)$$

Ennek a következő tulajdonságait használjuk ki a számolások során: $\bar{h} = -h$ és $h_{ab} = \bar{h}_{ab} - \frac{1}{2} \eta_{ab} \bar{h}$. Ekkor az Einstein egyenletek így fognak kinézni:

$$\square^2 \bar{h}_{ab} + \eta_{ab} \partial_e \partial_i \bar{h}^{ei} - \partial_b \partial_e \bar{h}_a^e - \partial_a \partial_e \bar{h}_b^e = -8\pi T_{ab}. \quad (2.16)$$

Bevezetjük a Lorentz-mértéktranszformációt, amely ezt jelenti:

$$h'_{ab} = h_{ab} - \partial_a \xi_b - \partial_b \xi_a, \quad (2.17)$$

Itt ξ^a tetszőleges függvények, mely koordinátatranszformációk miatt jönnek be. Az alábbiak szerint fog \bar{h}^{ab} transzformálódni:

$$\bar{h}'^{ab} = h'^{ab} - \frac{1}{2} \eta^{ab} h' = \bar{h}^{ab} - \partial^a \xi^b - \partial^b \xi^a + \eta^{ab} \partial_c \xi^c. \quad (2.18)$$

\bar{h}'^{ab} deriváltját a következőképpen lehet felírni:

$$\partial_b \bar{h}'^{ab} = \partial_b h'^{ab} - \square^2 \xi^a, \quad (2.19)$$

és úgy választjuk a $\xi^a(x)$ függvényeket, hogy teljesüljön a Lorentz-mérték feltétel:

$$\partial_b \bar{h}^{ab} = 0. \quad (2.20)$$

Ekkor azt kapjuk az Einstein-egyenletre a Lorentz-mértékfeltétel kirovásával, hogy:

$$\square^2 \bar{h}_{ab} = -16\pi T_{ab} . \quad (2.21)$$

Vákuum esetén T_{ab} energia-impulzus tenzor, 0 és megkapjuk (ez egy próbaközelítés):

$$\square^2 \bar{h}_{ab} = 0 . \quad (2.22)$$

erre a hullámeqyenletre a következő alakban keressük a (síkhullám) megoldást:

$$\bar{h}^{ab} = A^{ab} \exp(ik_c x^c) . \quad (2.23)$$

Visszahelyettesítve ez a megoldás kielégíti a hullámeqyenletet. Az amplitúdónak komplex része is van, valódi fizikai megoldást viszont csak a valós rész tartalmaz, ezért kell venni annak ezt a részét. Alkalmazva a Lorentz-mérték feltételt a megoldásra azt kapjuk, hogy:

$$\square^2 \bar{h}^{ab} = \eta^{cd} k_c k_d \bar{h}^{ab} = 0. \quad (2.24)$$

Ez a következőt jelenti:

$$\eta^{cd} k_c k_d = k^c k_c = 0, \quad (2.25)$$

az előzőekből ez tehető fel:

$$A^{ab} k_b = 0. \quad (2.26)$$

Kihasználva azt, hogy az A^{ab} amplitúdó tenzor szimmetrikus a két indexére, 10 független komponense lesz. A Lorentz mérték transzformáció után 6 lesz független. Majd megfelelően választva $\xi^a(x)$ -eket, hogy azok kielégítsék $\square^2 \xi^a = 0$, utána már csak két független mennyiség marad. Ez lesz a két polarizációs állapot és majd ezek összegéből áll össze az összes lehetséges állapot. Az $A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22}$ komponenseket együttesen egy a és b mennyiségekkel lehet jellemezni a következőképpen:

$$A_{TT}^{ab} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & 0 \\ 0 & b & -a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.27)$$

2.3. Általános megoldás

Az általános megoldás során T_{ab} energia-impulzus tenzor nem nulla. A (2.21) egyenletre keressük a megoldást. Ezt az elektrodinamikából ismert eljáráshoz hasonlóan tehetõ meg. A következõ Green függvényt vezetjük be:

$$\square_x^2 G(x^\sigma - y^\sigma) = \delta(x^\sigma - y^\sigma) . \quad (2.28)$$

Majd ennek a Green függvénynek a tulajdonságait kihasználva a linearizált Einstein-egyenletben szereplõ \bar{h}^{ab} -re a következõ összefüggést kapjuk:

$$\bar{h}^{ab}(ct, \mathbf{x}) = -\frac{4G}{c^4} \int \frac{T^{ab}(ct - |\mathbf{x} - \mathbf{y}|, \mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} d^3\mathbf{y} . \quad (2.29)$$

Ebbõl az összefüggésbõl fel lehet írni a multipólus sorfejtést:

$$\bar{h}^{ab}(ct, \mathbf{x}) = -\frac{4G}{c^4} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{l!} M^{abi_1 \dots i_l}(ct_r) \partial_{i_1} \dots \partial_{i_l} \left(\frac{1}{r} \right) , \quad (2.30)$$

itt a multipól momentumok a következõ tagok lesznek:

$$M^{abi_1 \dots i_l}(ct) = \int T^{ab}(ct, \mathbf{y}) y^{i_1} y^{i_2} \dots y^{i_l} d^3\mathbf{y} . \quad (2.31)$$

A multipólus sorfejtés során az l -edik tagig megy a sorfejtés. Az energia-impulzus tenzorból kifejezhetünk egy úgynevezett kvadrupól momentum tenzort, amely a forrásra jellemzõ:

$$I^{ab}(ct) = \int T^{00}(ct, \mathbf{y}) y^a y^b d^3\mathbf{y} , \quad (2.32)$$

ekkor a gravitációs hullámot letudjuk írni a kvadrupól formulával:

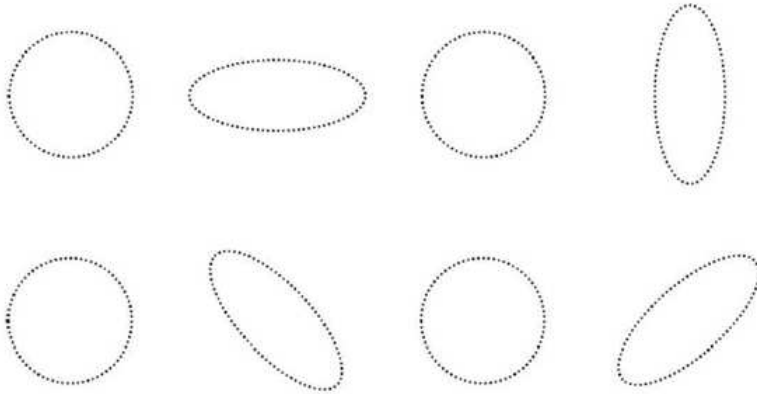
$$\bar{h}^{ab}(ct, \mathbf{x}) = -\frac{2G}{c^6 r} \left[\frac{d^2 I^{ab}(ct')}{dt'^2} \right]_r \quad (2.33)$$

Ezen alfejezetkhez Hobson[7] könyvét használtam fel.

2.4. Detektálás

A gravitációs hullámok megváltoztatják a relatív távolságot két általunk kijelölt objektum között. Ezt úgy szokás illusztrálni, hogy kör alakba rendezett tömegpárokat

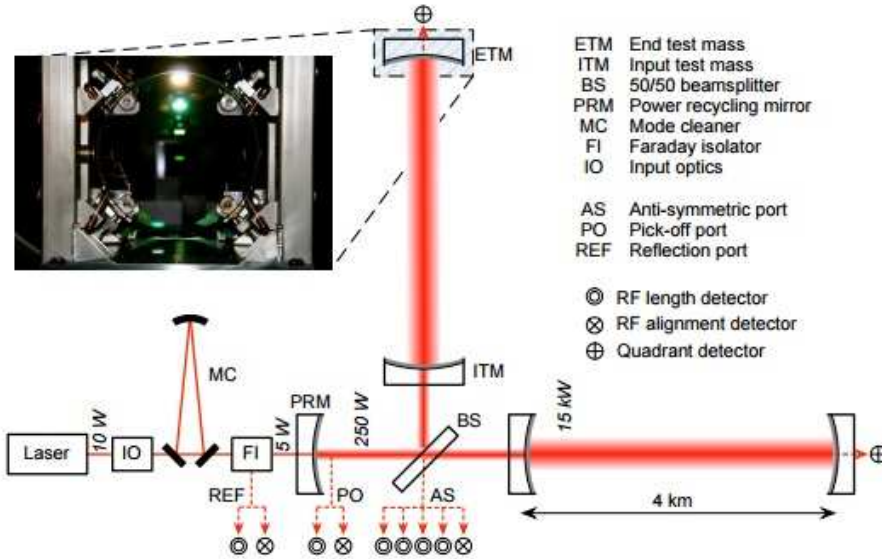
helyezünk el az x-y síkba és rájuk merőlegesen a z tengely irányából érkeznek a gravitációs hullámok. Ekkor a kör alak eltorzul ellipszissé, attól függően milyen fázisában éri a hullám őket és melyik polarizáció.



2.1. ábra. A két polarizáció szemléltetése merőlegesen beérkező gravitációs hullámok hatására a körben elhelyezett tömeg pontsorra.

A lézeres interferometria detektálási módszer a fenti jelenség alapján működik. A karokban a lézerfénye megtesz egy utat és ha gravitációs hullámok érik megváltozik a karhossz. A megváltozott karhossz változtat a felfogott interferenciaképen és ha a képet állandóan akarjuk tartani, akkor változtatni kell a karhosszt, ezt mérik. Ezekből a mért adatokból szűrik aztán ki a gravitációs hullámokat. A mért adatsorok nagyon zajosak és különböző algoritmusokat dolgoztak ki szűrésükre. A hullám időbeli lefutása azaz a $h(t)$ függvény írja le, amely az antenna függvények és a polarizációk lineáris kombinációjából áll össze [8].

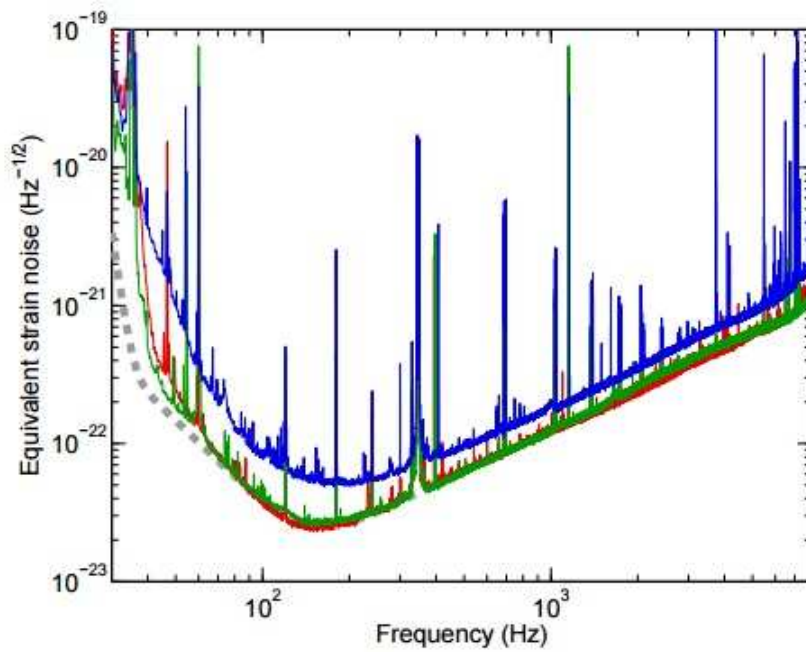
A LIGO (Laser Interferometer Gravitational-wave Observatory) egy olyan létesítmény melyet azért hoztak létre, hogy lézeres interferométerrel gravitációs hullámokat megfigyelhessenek[2]. Michelson interferométereket használnak kiegészítve Fabry-Perot karokkal. A karok 4km hosszúak, amikben vákuumrendszert alakítottak ki. A karokban 75-ször verődik vissza a fény amely az effektív hosszát növeli és ez felerősíti a jelenséget. Hasonló detektor az Olaszországban található Virgo is[9]. A detektorok érzékenyek a különböző külső zajokra. Az Advanced LIGO program keretében a külső zajszűrés javult[3].



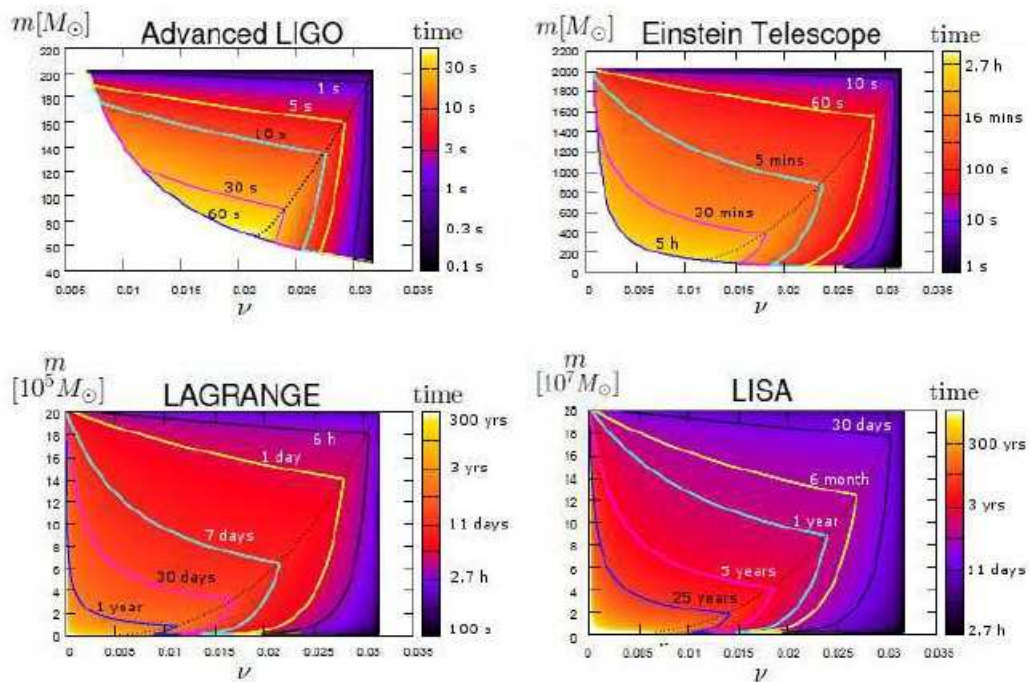
2.2. ábra. Michelson detektor ábrája, ez az ábra a LIGO cikkéből származik[2].

A jövőben telepítendő harmadik generációs Einstein teleszkóp alsó frekvencia tartománya 1 Hz [10], ami azt jelenti, hogy a maximális mérhető kettősök össz tömege $2020 M_{\odot}$. A tömegarányt beállítva úgy, hogy a kisebbik objektum tömege a neutron csillag legyen, a legkisebb mérhető tömegarány $\nu_{\min} \approx 7 \times 10^{-4}$. A világűrbe tervezik telepíteni a Lagrange teleszkópot[11] és a LISA űrszondát[5]. Ezek nagy össz tömegű fekete lyukak összeolvadása során keletkező gravitációs hullámokat is tudnának észlelni. A Lagrange teleszkóp alsó mérési frekvencia határa 10^{-3} Hz, míg a LISA-nak 10^{-5} Hz, a mérhető maximális össz tömeg az előbbire $2 \times 10^6 M_{\odot}$, utóbbira $2 \times 10^8 M_{\odot}$. A tömegarányok $\nu_{\min} \approx 7 \times 10^{-7}$ a Lagrange-ra, a LISA-ra $\nu_{\min} \approx 7 \times 10^{-9}$.

2015-ben rögzítettek két detektálást [4][12]. Az első forrás a becslések szerint 410_{-180}^{+160} megaparszekre volt, amely egy összeolvadó kompakt kettős fekete lyuk rendszer volt. A kisebbik tömege $29_{-4}^{+4} M_{\odot}$ a nagyobbik $36_{-4}^{+5} M_{\odot}$, az összeolvadás után az össz tömeg $62_{-4}^{+4} M_{\odot}$, azaz $3_{-0.5}^{+0.5} M_{\odot}$ tömegnyi energia szabadult fel. A második 440_{-190}^{+180} megaparszekre volt, a kisebbik tömege $7.5_{-2.3}^{+2.3} M_{\odot}$ a nagyobbik $14.2_{-3.7}^{+8.3} M_{\odot}$, az összeolvadás után az össz tömeg $20.8_{-1.7}^{+6.1} M_{\odot}$. Mindkét mérés szignifikanciája nagyobb volt mint 5σ .



2.3. ábra. Az Advanced LIGO mérési tartománya a frekvencia függvényében ez az ábra az Advanced LIGO cikkéből származik[3].



2.4. ábra. Az Advanced LIGO, Einstein teleszkóp, Lagrange teleszkóp és a LISA űrtávcső mérési tartományai különböző össztömegekre és tömegarányokra, ez az ábra az SDW cikkéből származik[13].

3. fejezet

Posztnewtoni (PN) formalizmus

A PN sorfejtés azt jelenti, hogy az $\varepsilon \approx \frac{Gm}{c^2 r} \approx \frac{v^2}{c^2} \ll 1$ kis paraméter szerint sorfejtjük a mozgásegyenletet. Itt m a két fekete lyuk össztömege, G a gravitációs állandó, r a fekete lyukak szeparációja, c a fénysebesség és v a szeparáció deriváltja. A poszt-newtoni közelítés $\varepsilon \approx 0,1$ -ig érvényes. A mozgásegyenletek így a következők lesznek:

$$\frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2} = - (m \mathbf{x} / r^3) [1 + O(\varepsilon) + O(\varepsilon^{3/2}) + O(\varepsilon^2) + O(\varepsilon^{5/2}) + \dots] , \quad (3.1)$$

itt $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2$ és $r = |\mathbf{x}|$, x_i pedig a koordináták. A pályamenti szeparáció időben nem változik, tehát $\dot{r} = 0$, az impulzusmomentum deriváltjai viszont nem nullák, ezt hívják körpálya közelítésnek. Ekkor a gravitációs hullámforma ez lesz[8]:

$$h^{ij} = \frac{2}{D} [Q^{ij} \{1 + O(\varepsilon^{1/2}) + O(\varepsilon) + O(\varepsilon^{3/2}) + \dots\}]_{TT} , \quad (3.2)$$

ahol D a távolság a forrás és a megfigyelő között és a TT a transzverzális trace mentesítést jelenti. A különböző rendekben megjelennek a spin és pálya kölcsönhatásai-ból származó elkülöníthető tagok. Így fognak kinézni a rendek az 1PN rendig:

$$Q^{ij} = 2 \left[v^i v^j - \frac{m}{r} n^i n^j \right] , \quad (3.3)$$

$$P^{0.5} Q^{ij} = \frac{\delta m}{m} \left\{ 3 \frac{m}{r} [2n^{(i} v^{j)} - \dot{r} n^i n^j] (\hat{\mathbf{N}} \cdot \hat{\mathbf{n}}) + \left[\frac{m}{r} n^i n^j - 2v^i v^j \right] (\hat{\mathbf{N}} \cdot \mathbf{v}) \right\} , \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned}
PQ^{ij} = & \frac{1}{3} \left\{ (1 - 3\eta) 4 \frac{m}{r} [3\dot{r}n^i n^j - 8n^{(i} v^{j)}] (\hat{\mathbf{N}} \cdot \hat{\mathbf{n}}) (\hat{\mathbf{N}} \cdot \mathbf{v}) + 2 \left[3v^i v^j - \frac{m}{r} n^i n^j \right] \right. \\
& \times (\hat{\mathbf{N}} \cdot \mathbf{v})^2 + \frac{m}{r} \left[(3v^2 - 15\dot{r}^2 + 7\frac{m}{r}) n^i n^j + 30\dot{r}n^{(i} v^{j)} - 14v^i v^j \right] (\hat{\mathbf{N}} \cdot \hat{\mathbf{n}})^2 \left. \right\} \\
& + \frac{4m}{3r} \dot{r} (5 + 3\eta) n^{(i} v^{j)} + \left[(1 - 3\eta) v^2 - \frac{2}{3} (2 - 3\eta) \frac{m}{r} \right] v^i v^j \\
& + \frac{m}{r} \left[(1 - 3\eta) \dot{r}^2 - \frac{1}{3} (10 + 3\eta) v^2 + \frac{29m}{3r} \right] n^i n^j, \tag{3.6}
\end{aligned}$$

$$PQ_{SO}^{ij} = \frac{2}{r^2} (\mathbf{\Delta} \times \hat{\mathbf{N}})^{(i} n^{j)}. \tag{3.7}$$

Itt a kövekező mennyiségek lettek bevezetve: $\delta m = m_1 - m_2$, $\hat{n} = x/r$, $\mathbf{v} = d\mathbf{x}/dt$, $\mathbf{\Delta} = m(\mathbf{S}_2/m_2 - \mathbf{S}_1/m_1)$ és $\hat{\mathbf{N}}$ a kettős tömegközéppontjától a megfigyelé felé mutató egységvektor. A posztnewtoni rendekben megjelenik a spin-pálya korrekció, ezek mellett 2 PN rendnél a spin-spin kölcsönhatás, valamint a spin-pálya kölcsönhatásnak egy korrekciója adódik hozzá. Az egyes fekete lyukak spinje a következő:

$$\mathbf{S}_i = \chi_i m_i^2, \tag{3.8}$$

ahol $\chi_i \in [0, 1]$, dimenziómentes paraméter. Kis tömegarány esetén a nagyobb tömegű fekete lyuk spinje válik dominánsá. A folyamat alatt a teljes impulzusmomentum állandó azaz $\dot{J} = 0$, ez a pálya impulzusmomentumból és az egyes spinekből tevődik össze:

$$J = L + S_1 + S_2. \tag{3.9}$$

4. fejezet

Spines effektív egytest gravitációs hullámforma

A Spines effektív egy test gravitációs hullámforma (SEOBNR) modellben Hamiltoni-formalizmusban írják fel a dinamikát, majd kváziszférikus sorfejtésben adják meg a gravitációs hullámot [16]. A dinamikát leíró Hamilton függvények ebben a cikkben találhatóak [14], a következő Poisson zárójelekkel írhatóak fel:

$$\frac{d\mathbf{r}}{d\hat{t}} = \left\{ \mathbf{r}, \hat{H}_{real} \right\} = \frac{\partial \hat{H}_{real}}{\partial \mathbf{p}}, \quad (4.1)$$

$$\frac{d\mathbf{p}}{d\hat{t}} = \left\{ \mathbf{p}, \hat{H}_{real} \right\} + \hat{\mathbf{F}} = \frac{\partial \hat{H}_{real}}{\partial \mathbf{p}}, \quad (4.2)$$

ahol $\hat{t} = t/M$ és \hat{H}_{real} a redukált Hamilton-függvény, $\hat{\mathbf{F}}$ a redukált radiációs reakciós erő [15]. A redukált Hamilton-függvény az effektív Hamilton-függvénnyel kifejezve a következő:

$$\mu \hat{H}_{real} = M \sqrt{1 + 2\nu \left(\frac{H_{eff}}{\mu} - 1 \right)} - M$$

A spinekre is felírhatóak a Poisson zárójelek:

$$\frac{d\mathbf{S}_1}{dt} = \left\{ \mathbf{S}_1, \mu \hat{H}_{real} \right\} = \mu \frac{\partial \hat{H}_{real}}{\partial \mathbf{S}_1} \times \mathbf{S}_1, \quad (4.3)$$

$$\frac{d\mathbf{S}_2}{dt} = \left\{ \mathbf{S}_2, \mu \hat{H}_{real} \right\} = \mu \frac{\partial \hat{H}_{real}}{\partial \mathbf{S}_2} \times \mathbf{S}_2, \quad (4.4)$$

ahol $\mu = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$, a spinek vektorok $\mathbf{S}_i(t) = \chi_i m_i^2 \hat{\mathbf{S}}_i$ és $\hat{\mathbf{S}}_i$ pedig a spin irányát megadó egység vektorok. A redukált radiációs reakciós erőt a következőképpen lehet

kifejezni:

$$\hat{\mathbf{F}} = \frac{1}{\nu \hat{\Omega} |\mathbf{r} \times \mathbf{p}|} \frac{dE}{dt} \mathbf{p}, \quad (4.5)$$

itt $\hat{\Omega}$ a dimenziómentes pálya frekvencia, $\frac{dE}{dt}$ a kváziszférikus pályákhoz tartozó energia fluxus, ezek a következők:

$$\hat{\Omega} = M |\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}| / r^2, \quad (4.6)$$

$$\frac{dE}{dt} = \frac{\hat{\Omega}^2}{8\pi} \sum_{l=2}^8 \sum_{m=-l}^l m^2 \left| \frac{R}{M} h_{lm} \right|^2. \quad (4.7)$$

A pálya-impulzusmomentum newtoni vezető rendű tagjához hozzá adódnak a poszt-newtoni és a spin-pálya korrekciók:

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}_N + \mathbf{L}_{PN} + \mathbf{L}_{SO} + O(c^{-4}), \quad (4.8)$$

$$\mathbf{L}_{PN} = \mathbf{L}_N \left[\frac{1}{2} \nu^2 (1 - 3\nu) + (3 + \nu) \frac{M}{r} \right], \quad (4.9)$$

$$\mathbf{L}_{SO} = -\frac{2\mu}{r} \left[(\mathbf{S}_{eff} \cdot \hat{\mathbf{L}}_N) \hat{\mathbf{L}}_N + (\mathbf{S}_{eff} \cdot \hat{\lambda}) \hat{\lambda} \right]. \quad (4.10)$$

$\hat{\lambda} = (\hat{\mathbf{L}}_N \times \mathbf{r}) / r$ egységvektor $\hat{\mathbf{L}}_N$ körül forog Ω szögsebességgel, az effektív spin pedig a következőt jelenti:

$$\mathbf{S}_{eff} = \left(1 + \frac{3m_2}{4m_1} \right) \mathbf{S}_1 + \left(1 + \frac{3m_2}{4m_1} \right) \mathbf{S}_2 \quad (4.11)$$

A dimenziótlan spin paraméterek lineáris kombinációjával számolnak a sorfejtés során, ezek a következőképpen néznek ki:

$$\chi_S = \frac{\chi_1 + \chi_2}{2}, \quad (4.12)$$

$$\chi_A = \frac{\chi_1 - \chi_2}{2}. \quad (4.13)$$

A precesszáló esetben $\hat{\mathbf{L}}_N(t)$ levetítésével a spinekre kifejezhető az időfüggésük:

$$\chi_S(t) = \frac{1}{2} \left(\frac{\mathbf{S}_1(t)}{m_1^2} + \frac{\mathbf{S}_2(t)}{m_2^2} \right) \cdot \hat{\mathbf{L}}_N, \quad (4.14)$$

$$\chi_S(t) = \frac{1}{2} \left(\frac{\mathbf{S}_1(t)}{m_1^2} - \frac{\mathbf{S}_2(t)}{m_2^2} \right) \cdot \hat{\mathbf{L}}_N. \quad (4.15)$$

Az SEOBNR kvázi-szférikus sorfejtésben adja meg a hullám alakját, az összeolvadásra is tartalmaz egy becslést és a lecsengést is leírja a teljes hullámforma:

$$h_{lm}^{EOB}(t) = h_{lm}^{inspiral-plunge}(t)\theta(t_{match}^{lm} - t) + h_{lm}^{merger-RD}\theta(t - t_{match}^{lm}), \quad (4.16)$$

ahol t_{match}^{lm} azaz időpont ahol összeillesztik a két hullámot. A bespirálózást leíró tag a $h_{lm}^{inspiral-plunge}(t)$, amely a következőképpen néz ki:

$$h_{lm}^{inspiral-plunge} = h_{lm}^F N_{lm}, \quad (4.17)$$

ahol

$$h_{lm}^F = h_{lm}^{(N,\epsilon)} \hat{S}_{eff} T_{lm} e^{i\delta_{lm}} (\rho_{lm})^l, \quad (4.18)$$

itt ϵ a paritását írja le a hullámformának. Az \hat{S}_{eff} effektív spin a következő:

$$\hat{S}_{eff}(r, p_{r^*}, p_\phi, \mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2) = \begin{cases} \hat{H}_{eff}(r, p_{r^*}, p_\phi, \mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2), & \epsilon = 0, \\ \hat{L}_{eff} = p_\phi v_\Omega, & \epsilon = 1, \end{cases}, \quad (4.19)$$

ahol $v_\Omega = \hat{\Omega}^{1/3}$. T_{lm} a vezető rendű logaritmusai az uszály-járulékoknak:

$$T_{lm} = \frac{\Gamma(l+1 - 2imH_{real}\Omega)}{\Gamma(l+1)} \exp[\pi m \Omega H_{real}] \exp[2im\Omega H_{real} \log(2m\Omega r_0)], \quad (4.20)$$

ahol $r_0 = 2M/\sqrt{e}$. $h_{lm}^{(N,\epsilon)}$ a newtoni rendek és így néznek ki:

$$h_{lm}^{(N,\epsilon)} = \frac{M\nu}{R} n_{lm}^{(\epsilon)} c_{l+\epsilon}(\nu) V_\phi^l Y^{l-\epsilon, -m} \left(\frac{\pi}{2}, \phi \right), \quad (4.21)$$

ahol R a távolság a megfigyelő és a forrás között, M az össztömeg, ν a tömegarány, $Y^{l,m}(\Theta, \phi)$ a szférikus harmonikus skalárok, $V_\phi^l = v_\phi^{l+\epsilon}$ ez pedig:

$$v_\phi = r_\Omega \hat{\Omega} = \hat{\Omega} \left(\frac{\partial \hat{H}_{real}}{\partial p_\phi} \Big|_{p_r=0} \right)^{-2/3}. \quad (4.22)$$

5. fejezet

Spin-dominált hullámforma

Megfelelően kis tömegarány esetén a második spin elhanyagolható, valamint a bespirálózás végére a nagyobb tömegű fekete lyuk spinje lesz domináns, míg a pálya-impulzusmomentum mellette elhanyagolható. A Spin-dominált hullámforma (SDW) [13] egyrészt ε posztnewtoni, valamint a pálya-impulzusnyomaték és a domináns spin hányadosa szerinti sorfejtést is felhasznál, ezek a következőket jelentik:

$$\varepsilon \approx \frac{Gm}{c^2 r} \approx \frac{v^2}{c^2}, \quad (5.1)$$

$$\xi = \varepsilon^{-1/2} \nu, \quad (5.2)$$

ahol ν a tömegarány, m az össztömeg, G a gravitációs állandó, c a fénysebesség, r a pálya szeparáció, v ennek az idő deriváltja. A spinek arányára a következő írható fel:

$$\frac{S_2}{S_1} = \frac{\chi_2}{\chi_1} \nu^2, \quad (5.3)$$

ahol $\chi_i \in [0, 1]$ a dimenziómentes spin paraméter. A második spin vezető tagjai 2PN rendben jelentkeznek, ezért gyorsan forgó kompakt kettősökre, kis tömegarányok esetén a második spin elhanyagolható lesz. A spin és a newtoni pálya-impulzusmomentum arányára a következő írható:

$$\frac{S_1}{L_N} \approx \varepsilon^{1/2} \nu^{-1} \chi_1. \quad (5.4)$$

S_1 szerepe lesz a domináns a bespirálózás utolsó szakaszaiban kis tömegarányokra $\nu < 0.1$. Továbbá $\xi \leq \xi_1 = 0.1$ feltételből az adódik, hogy $\varepsilon_1 = Gm/c^2 r_1 = 100\nu^2$. A posztnewtoni formalizmus [17] cikk alapján $\varepsilon_2 = 0.1$ -ig érvényes, ekkor a 3.5 rendű PN járulék összemérhető lenne a 2.5 járulékkal és összeomlik a formalizmus. Kepler

harmadik törvényét felírva meglehetően becsülni az össztömeget körpálya közelítésre, a gravitációs hullámok f frekvenciáját ismerve PN paraméterrel:

$$m = \frac{c^3}{\pi G} \varepsilon^{3/2} f^{-1}. \quad (5.5)$$

Az Advanced LIGO alsó mérhető frekvencia határa 10 HZ [3], míg a LISA-nak 10^{-5} HZ [18]. Össztömegekre a limit az Advanced LIGO esetén $202 M_\odot$ és a LISA esetén $2 \times 10^8 M_\odot$. Egy további becslés, ha a kisebb tömeget lefixáljuk a neutroncsillag tömegére, ekkor az Advanced LIGO esetén $\nu_{\min} = 0.007 \approx 1 : 143$ és a LISA esetén $\nu_{\min} \approx 7 \times 10^{-9}$. A posztnewtoni paraméter kifejezhető a szögsebességgel:

$$\varepsilon = \frac{(Gm\omega)^{2/3}}{c^2}. \quad (5.6)$$

A teljes impulzuszóránymomentum a pálya-impulzuszóránymomentum newtoni, posztnewtoni, spin-pálya kölcsönhatások adódó részekből tevődik össze, valamint a spinek összegéből:

$$\mathbf{J} = \mathbf{L}_N + \mathbf{L}_{PN} + \mathbf{L}_{SO} + \mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2. \quad (5.7)$$

A folyamat során \mathbf{J} iránya állandó. [19] cikk alapján a mágneses dipól-mágneses dipól járuléktól eltekintve (amely csak magnetár kettősöknél számít) a következő írható fel:

$$\omega = \frac{\varepsilon^{3/2} c^3}{Gm} \left\{ 1 + \frac{3}{2} \varepsilon + \left(-\frac{\xi}{2} + \chi_1 \cos \kappa_1 \right) \varepsilon^{3/2} \left[\frac{171}{8} - \chi_1^2 \left(-\frac{3}{8} + \frac{9}{8} \cos^2 \kappa_1 \right) \right] \varepsilon^2 \right\}. \quad (5.8)$$

A radiatív pálya szög sebesség fejlődése ($\dot{\omega}$) nem egyenlő tömegarányokra:

$$\dot{\omega} = \frac{96 \varepsilon^6 \xi c^6}{5 (Gm)^2} \left\{ 1 + \frac{1105}{336} \varepsilon + \left(4\pi - \frac{79}{12} \xi - \frac{23}{4} \chi_1 \cos \kappa_1 \right) \varepsilon^{3/2} + \left[\frac{697465}{9072} - \chi_1^2 \left(\frac{335}{96} \sin^2 \kappa_1 - \frac{35}{16} \right) \right] \varepsilon^2 \right\}. \quad (5.9)$$

A pálya fázisa így írható fel:

$$\phi_c - \phi = \frac{\varepsilon^{-3}}{32\xi} \left\{ 1 + 2\varepsilon^{1/2} \xi + \frac{1195}{1008} \varepsilon + \left(-10\pi + \frac{3925}{504} \xi + \frac{175}{8} \chi_1 \cos \kappa_1 \right) \varepsilon^{3/2} + \left[-\frac{21440675}{1016064} + \chi_1^2 \left(\frac{375}{16} - \frac{3425}{96} \sin^2 \kappa_1 \right) \right] \varepsilon^2 \right\}, \quad (5.10)$$

ahol ϕ_c az egyesülésnél a fázis.

6. fejezet

Összehasonlítás

Gravitációs hullámokat összehasonlítva a detektor által előállított zajos adatsorokkal az illesztett szűrés (matched filtering) eljárással történik. A gravitációs hullámforma időbeli lefutását a $h(t)$ függvény írja le. Két hullámforma közötti átfedés a skalárszorzatukkal írható fel:

$$O[e_1, e_2] = \langle e_1 | e_2 \rangle, \quad (6.1)$$

ahol $e = \frac{h}{\sqrt{\langle h|h \rangle}}$ normált hullámforma, mivel a jel amplitúdója nem számít a hullámformáknak. A LIGO által megírt programcsomagot használtam, amely c programnyelven kódolva tartalmazza a hullámformákat. Az összehasonlításokat python szkriptekkel hívtam meg, a függelék fejezetben található egy ilyen szkript. Az SEOBNR hullámformából hiányoznak a PN formalizmus amplitúdó korrekcióiból származó tömegarányban első rendű tagok. Az SEOBNR hullámforma leírja a bespirálózást, összeolvadást és lecsengést is, míg az SDW csak a bespirálózást írja le. Ez az összehasonlításnál a bespirálózás levágásánál további különbséget okoz. A spin egységvektorokat így lehet átváltani a spint leíró szögekre:

$$s_{1x} = \chi \sin(\kappa) \cos(\theta), \quad (6.2)$$

$$s_{1y} = \chi \sin(\kappa) \sin(\theta), \quad (6.3)$$

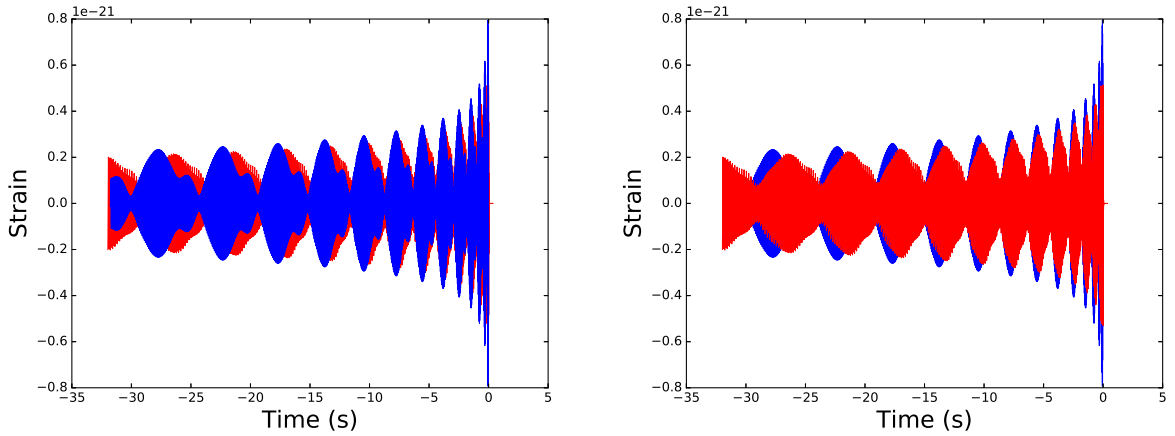
$$s_{1z} = \chi \cos(\kappa). \quad (6.4)$$

Először az SDW korrekciói közötti különbséget mutatom be, ezek tartalmazzák a kistömegarányú korrekciókat. Mind a 4 ábrán az SDW és az SEOBNRv3 látható,

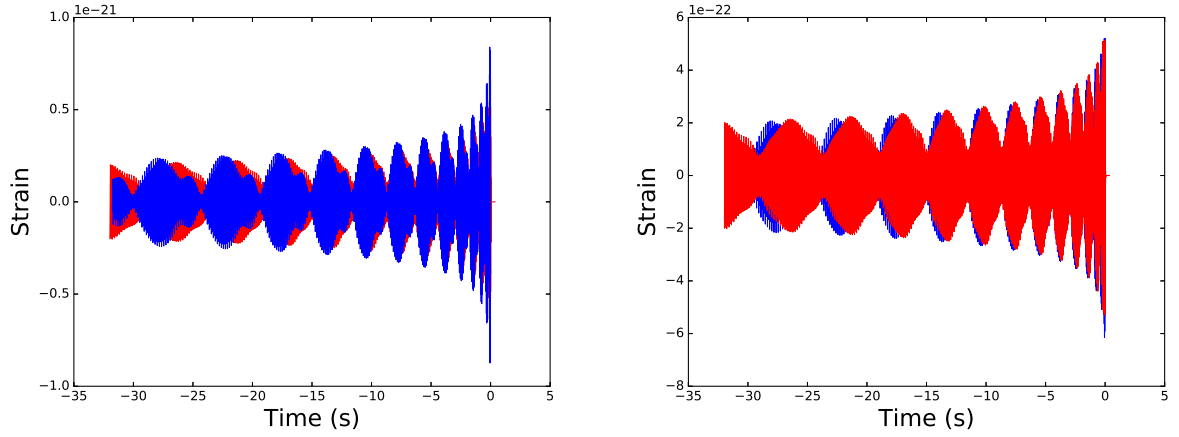
az SDW-ben csak az „amplitude” parancsot változtattam. A következő konfigurációt vizsgáltam: $\nu = 0.01$ tömegarány, $m = 150 M_{\odot}$ össztömeg, inklináció $\iota = 0.2$, $\chi_1 = 0.75$ spin paraméter, $\kappa = 0.7$, $\theta = 0.837$ szögekkel.

Az ezt követő ábrákon az egyezést mutatom be, különböző tömegarányok és össztömegekre. Négy eset látható és ezek a paraméterek jellemzik az ábrákat: az össztömeget 50-től 200 naptömegig változtattam, valamint a tömegarányt 0.01-től 0.03-ig. Az első konfigurációban a spint leíró szögek: $\kappa = 1.58$, $\theta = 1.16589$, és a spin paraméter $\chi_1 = 0.75$, az inklináció $\iota = 0.2$. A második esetben: $\kappa = 0.0$, $\theta = 0.837$, és a spin paraméter $\chi = 0.75$. A harmadik konfigurációra a szögek $\kappa = \pi/2$, $\theta = 0.837$, és a spin paraméter $\chi = 0.75$. A negyedik konfiguráció: $\kappa = 1.3$, $\theta = 1.2$, $\chi = 0.75$. Minden esetben az inklináció $\iota = 0.2$.

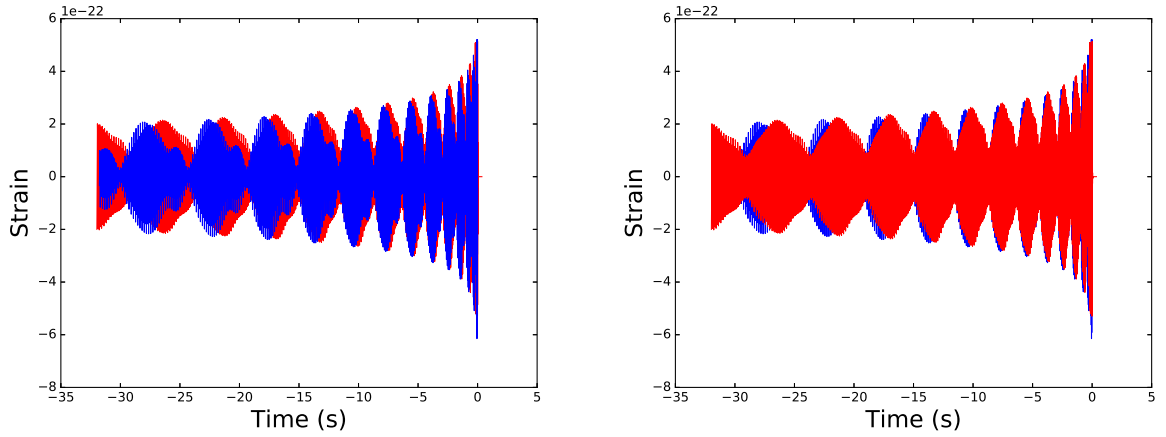
Az utolsó ábrákon azt mutatom meg, hogy különböző spin szögekre milyen az egyezés. Ezeket a szögeket (κ, θ) változtatva bejárható a teljes spin paraméter tartomány. A κ szög 0-tól π -ig változik, a θ 0-tól 2π -ig. A ν tömegarány minden esetben 0.03. Az első konfiguráció során az össztömeg 50 naptömeg, a másodiknál 100, a harmadiknál pedig 150. Az ι inklináció minden esetben 0.3.



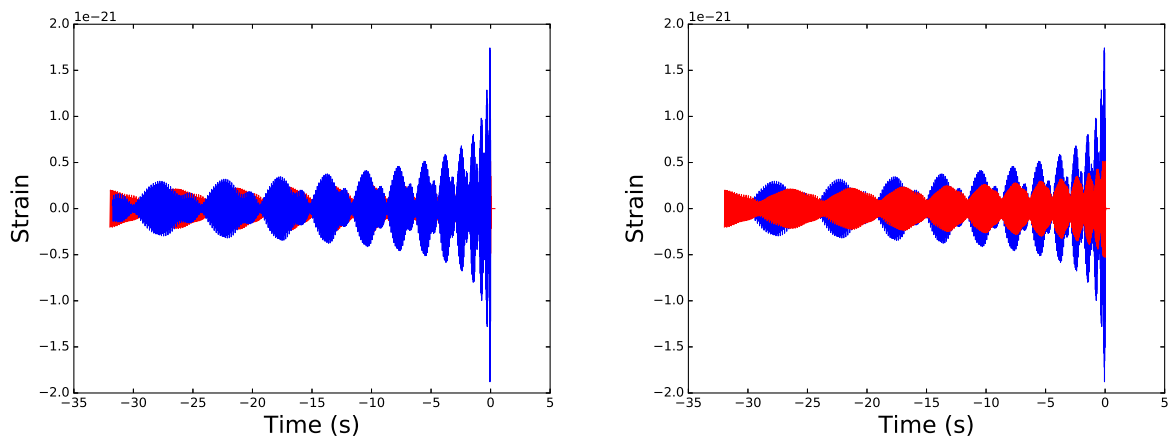
6.1. ábra. Az SDW és az SEOBNRv3 hullámformák összehasonlítása, a hullám nagysága van ábrázolva az idő függvényében. Az SDW kék színnel, az SEOBNRv3 pirossal van ábrázolva. Az amplitude parancs itt 0 és az egyezés 22.02%. Az ι inklináció 0.2, az m össztömeg 150 naptömeg, a ν tömegarány 0.01, a spin paraméter $\chi_1 = 0.75$, $\kappa = 0.7$, $\theta = 0.837$ szögekkel.



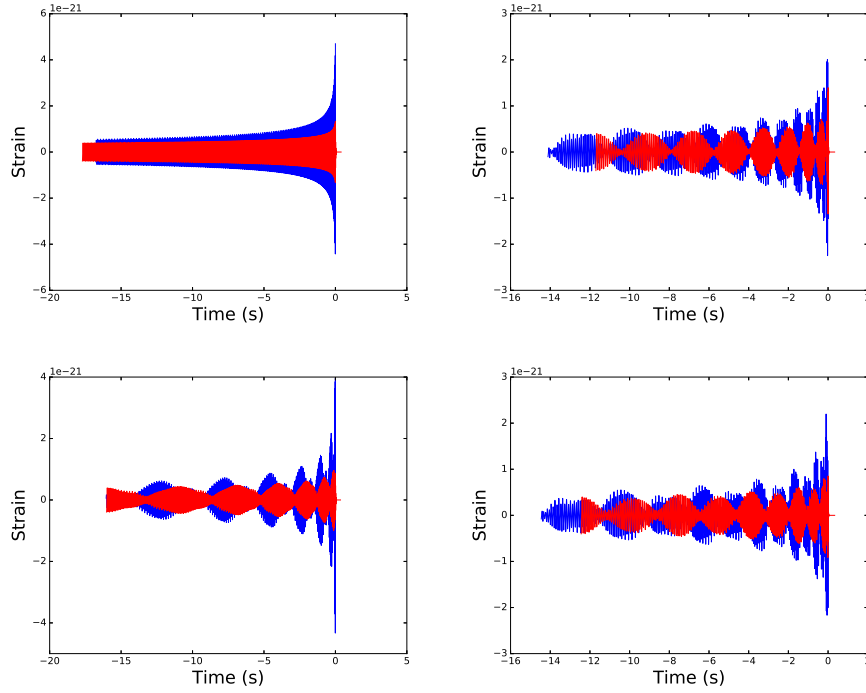
6.2. ábra. Az SDW és az SEOBNRv3 hullámformák összehasonlítása, a hullám nagysága van ábrázolva az idő függvényében. Az SDW kék színnel, az SEOBNRv3 pirossal van ábrázolva. Az amplitude parancs itt 1 és az egyezés 20.59%. Az ι inklináció 0.2, az m össztömeg 150 naptömeg, a ν tömegarány 0.01, a spin paraméter $\chi_1 = 0.75$, $\kappa = 0.7$, $\theta = 0.837$ szögekkel.



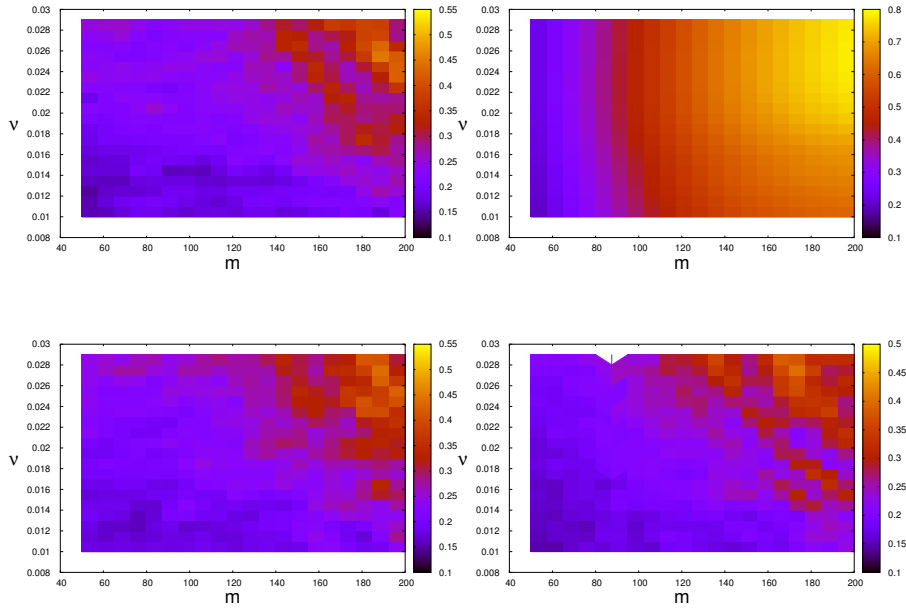
6.3. ábra. Az SDW és az SEOBNRv3 hullámformák összehasonlítása, a hullám nagysága van ábrázolva az idő függvényében. Az SDW kék színnel, az SEOBNRv3 pirossal van ábrázolva. Az amplitude parancs itt 2 és az egyezés 17.22%. Az ι inklináció 0.2, az m össztömeg 150 naptömeg, a ν tömegarány 0.01, a spin paraméter $\chi_1 = 0.75$, $\kappa = 0.7$, $\theta = 0.837$ szögekkel.



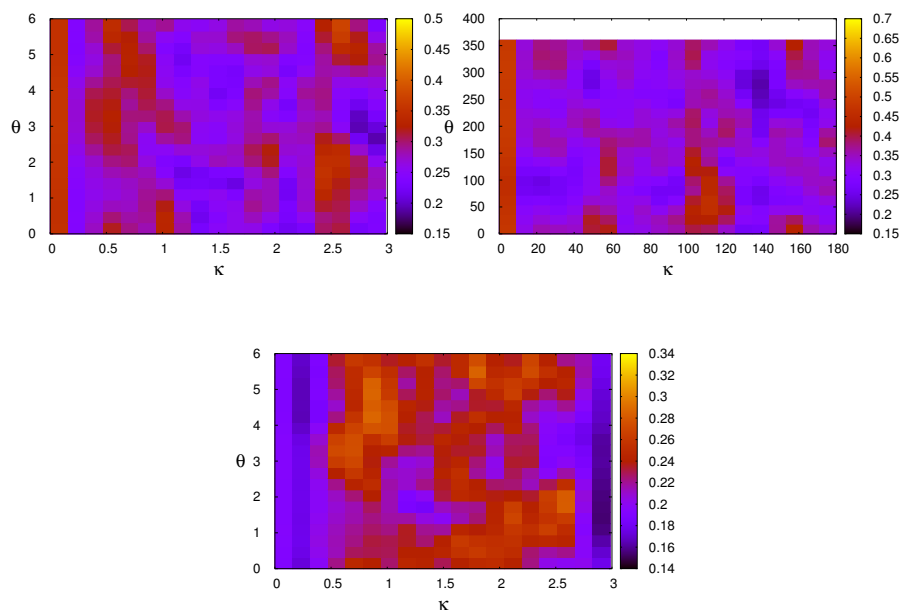
6.4. ábra. Az SDW és az SEOBNRv3 hullámformák összehasonlítása, a hullám nagysága van ábrázolva az idő függvényében. Az SDW kék színnel, az SEOBNRv3 pirossal van ábrázolva. Az amplitude parancs itt 3 és az egyezés 20.6%. Az ι inklináció 0.2, az m össztömeg 150 naptömeg, a ν tömegarány 0.01, a spin paraméter $\chi_1 = 0.75$, $\kappa = 0.7$, $\theta = 0.837$ szögekkel.



6.5. ábra. Az SDW (kékkel) és az SEOBNRv3 (pirossal) hullámformák összehasonlítása, a hullám nagysága van ábrázolva az idő függvényében. Az Amplitude parancs minden esetben 3. Az első ábrán a spint leíró szögek értékei: $\kappa = 0.0$, $\theta = 0.837$, a másodikonál $\kappa = \pi/2$, $\theta = 0.837$, a harmadikonál $\kappa = \pi/4$, $\theta = 0.837$, a negyediknél $\kappa = 1.45$, $\theta = 0.837$. Az ι inklináció minden esetben 0.2, az össztömeg 150 naptömeg, a tömegarány $\nu = 0.02$, a spin paraméter $\chi = 0.75$.



6.6. ábra. Az SDW és az SEOBNRv3 hullámformák összehasonlítása, az össztömeg és a tömegarány van ábrázolva. Az Amplitude parancs minden esetben 3. Az első ábrán a spin értékek: $s_{1x} = 0.3$, $s_{1y} = 0.7$, $s_{1z} = 0.0$, a másodiknál a spint leíró szögek $\kappa = 0.0$, $\theta = 0.837$, a spin paraméter $\chi = 0.75$, a harmadiknál $\kappa = \pi/2$, $\theta = 0.837$, $\chi = 0.75$, a negyediknél $\kappa = 1.3$, $\theta = 1.2$, $\chi = 0.75$. Az ι inklináció minden esetben 0.2.



6.7. ábra. Az SDW és az SEOBNRv3 hullámformák összehasonlítása, a spint leíró κ és θ szögek változtatásával. Az Amplitude parancs minden esetben 3. Az első ábrán az össztömeg 50 naptömeg, a másodikon 100, a harmadikon 150. Az ι inklináció minden esetben 0.3 és a spin paraméter $\chi = 0.75$.

7. fejezet

Összegzés

A dolgozatomban a gravitációs hullámok felírási módját ismertettem, megmutattam hogyan vezethető le a síkhullám és az általános megoldás. Bemutattam a PN sorfejtés módszert amely leírja a bespirálozás során keletkező hullámokat. Ismertettem két modellt amelyek megadják a hullámformákat, majd összehasonlítottam őket különböző paraméterekre. Az SEOBNR-ból a PN vezető rendjéből hiányzik a tömegarány korrekció. Az SEOBNR hullámformából hiányoznak a PN formalizmus amplitúdó korrekcióiból származó tömegarányban első rendű tagok. Az SEOBNR hullámforma leírja a bespirálozást, összeolvadást és lecsengést is, míg az SDW csak a bespirálozást írja le. Ez az összehasonlításnál a bespirálozás levágásánál további különbséget okoz. Az ebből adódó különbségek a hullámformákon jelentős. Az figyelhető meg az ábrákon, hogy nagyobb össztömegekre és tömegarányokra javul az egyezés.

8. fejezet

Köszönetnyilvánítás

Köszönöm témavezetőimnek, Dr. Gergely Árpád Lászlónak és Tápai Mártonnak hogy a kutatásba bekapcsolódhattam és hálás vagyok a szakmai útmutatásért.

A. függelék

Függelék

```
import pylab
from pycbc.waveform import get_td_waveform
from pycbc.filter import match
from pycbc.psd import aLIGOZeroDetHighPower
import numpy
import scipy
import math
import lal
massratio_in = 0.01
totalmass_in = 50
samplerate = 9192
incl = 0.2
k=math.pi/2
t=0.837
chiin=0.75
s1x = chiin * numpy.sin(k)*numpy.cos(t)
s1y = chiin *numpy.sin(k) *numpy.sin(t)
s1z = chiin *numpy.cos(k)
diff_mass = 7.5
diff_massratio = 0.001
num_mass = 21
```

```

num_massratio = 20
name = 'output.txt'
output = open(name, 'w')
output.write("#SOF \n")
output.close()
for MassIndex in range(num_mass):
    for MassratioIndex in range(num_massratio):
        totalmass = totalmass_in + diff_mass * MassIndex
        massratio = massratio_in + diff_massratio * MassratioIndex
        hp, hc = get_td_waveform(approximant='SpinDominatedWf',
                                mass1=totalmass/(1.+massratio),
                                mass2=totalmass-totalmass/(1.+massratio),
                                delta_t=1.0/samplerate,
                                f_lower=10,
                                distance = 100,
                                spin1x=s1x,
                                spin1y=s1y,
                                spin1z=s1z,
                                spin2x=0.0,
                                spin2y=0.0,
                                spin2z=0.0,
                                inclination=incl,
                                phase_order=4,
                                amplitude_order=3)
        sp, sc = get_td_waveform(approximant='SEOBNRv3',
                                mass1=totalmass/(1.+massratio),
                                mass2=totalmass-totalmass/(1.+massratio),
                                delta_t=1.0/samplerate,
                                f_lower=10,
                                distance = 100,
                                spin1x=s1x,
                                spin1y=s1y,

```

```

        spin1z=s1z,
        spin2x=0.0,
        spin2y=0.0,
        spin2z=0.0,
        inclination=incl)

pylab.plot(sp.sample_times, sp, color='r')
pylab.plot(hp.sample_times, hp, color='b')
pylab.ylabel('Strain', fontsize = 22)
pylab.xlabel('Time (s)', fontsize = 22)
pylab.legend()
tlen = max(len(sp), len(hp))
sp.resize(tlen)
hp.resize(tlen)
f_low = 10.
delta_f = 1.0 / sp.duration
flen = tlen/2 + 1
psd = aLIGOZeroDetHighPower(flen, delta_f, f_low)
m, i = match(hp, sp, psd=psd, low_frequency_cutoff=f_low)
print 'Total mass: %1.4f' % totalmass
print 'Mass ratio: %1.4f' % massratio
print 'The match is: %1.4f \n' % m
text = '{0} {1} {2}\n'.format(totalmass, massratio, m)
output = open(name, 'a')
output.write(text)
output.close()

output = open(name, 'a')
output.write("\n")
output.close()

pylab.show()

```

Irodalomjegyzék

- [1] J. H. Taylor, A. Wolszczan, T. Damour, and J. M. Weisberg, *Nature* **355**, 132 (1992).
- [2] B. Abbott et al. (LIGO Scientific Collaboration), *Rept. Prog. Phys.* **72**, 076901 (2009).
- [3] G. M. Harry (for the LIGO Scientific Collaboration) *Class. Quantum Grav.* **27** 084006 (2010).
- [4] Ligo Scientific Collaboration and Virgo Collaboration, *Phys.Rev.Lett.* **116**, 061102 (2016)
- [5] T. A. Prince, et al., *Bull. American Astron. Soc.* **38**, 990 (2006).
- [6] D. Talukder, S. Bose, S. Caudill, P. T. B., *Phys. Rev. D* **88**, 122002 (2013)
- [7] M. P. Hobson, G. P. Efstathiou & A. N. Lasenby, *General Relativity*, CUP, Cambridge (2006).
- [8] L. E. Kidder, *Phys.Rev. D* **52** 821-847 (1995)
- [9] F. Acernese et al., *Class. Quantum Grav.* **25**, 184001 (2008).
- [10] B. Sathyaprakash, M. Abernathy, F. Acernese, P. Ajith, B. Allen ..., *Class. Quantum Grav* **29** 124013 (2012)
- [11] J. W. Conklin, et. al., arXiv:1111.5264 (2011).
- [12] LIGO Scientific Collaboration and Virgo Collaboration, *Phys. Rev. Lett.* **116** 241103 (2016)
- [13] M. Tápai, Z. Keresztes, L. Á. Gergely, 10.1103/PhysRevD.**86**.104045 (2012)

- [14] A. Taracchini, Y. Pan, A. Buonanno, E. Barausse, M. Boyle, et al., Phys.Rev. D **86**, 024011 (2012), 1202.0790.
- [15] A. Buonanno, Y. Chen, and T. Damour, Phys.Rev. D **74**, 104005 (2006), gr-qc/0508067.
- [16] Y. Pan, A. Buonanno, A. Taracchini, L. E. Kidder, A. H. Mroue, H. P. Pfeiffer, M. A. Scheel, B. Szilagyi, Phys. Rev. D **89**, 084006 (2014)
- [17] J. Levin, S. T. McWilliams, H. Contreras, Class. Quant.Grav. **28** 175001 (2011).
- [18] K. G. Arun et al., Class. Quantum Grav. **26** 094027 (2009).
- [19] B. Mikóczi, M. Vasúth, L. Á. Gergely, Phys. Rev. D **71** (2005).
- [20] L. Á. Gergely, P. L. Biermann, The typical mass ratio and typical final spin in supermassive black hole mergers (2012).