

# Kvadrupól-monopól hatások gravitációs hullámok fázisában

*Veréb László, informatikus fizikus szakos hallgató*  
vereb.laszlo.86@gmail.com

Szegedi Tudományegyetem  
Természettudományi és Informatikai Kar  
Kísérleti Fizikai Tanszék  
Elméleti Fizikai Tanszék

Témavezetők:  
Dr. Gergely Á. László, egyetemi docens  
Keresztes Zoltán, tudományos segédmunkatárs

# Tartalomjegyzék

<b>1. Bevezető</b>	<b>1</b>
<b>2. Spin és quadrupól-monopól effektusok</b>	<b>2</b>
<b>3. "Matched filtering" módszer a gravitációs hullámok detektálásánál</b>	<b>4</b>
<b>4. LALSuite programcsomag(SpinTaylor)</b>	<b>5</b>
4.1. Telepítés Linux operációs rendszer alá (Ubuntu) . . . . .	5
4.2. SpinTaylor . . . . .	7
4.3. SpinQuadTaylor . . . . .	8
<b>5. Eredmények</b>	<b>10</b>
<b>6. Összefoglaló</b>	<b>18</b>

# 1. Bevezető

A gravitációs hullámok létezését az általános relativitáselmélet keretein belül már Einstein megjósolta. Létezésükre közvetett bizonyíték a Hulse-Taylor pulzár időfejlődése (Nobel díj 1993). A gravitációs hullámok közvetlen észlelése céljából épültek a LIGO, VIRGO interferometrikus gravitációs detektorok. A gravitációs hullámok közvetlen kimutatása a forrásaik közelében tapasztalható erős gravitációs mezők általános relativisztikus leírását fogja igazolni. (Az általános relativitáselmélet összes korábbi tesztje a Naprendszeren belüli, azaz gyenge gravitációs térben érvényes.) A gravitációs hullámformák explicit alakjának ismerete egyrészt lehetőséget teremt a források asztrofizikai paramétereinek meghatározására, ugyanakkor az alternatív gravitációs elméleteket is tesztelik majd.

A gravitációs hullámok leggyakoribb forrásai közé tartoznak a bespiráló kompakt égitestek (fekete-lyukak / neutroncsillagok) kettős rendszerei. Asztrofizikai érvek értelmében a fekete-lyukak igen gyorsan forognak, így vizsgálatuknál a forgásból és tömeg kvadrupól-momentumból származó vezető rendű járulékokat szükséges figyelembe venni.

Dolgozatomban ismertetek egy új gravitációs hullámforma-generáló programot, melyben a gravitációs hullámok fázisának számolásához a (korábban az irodalomban elhanyagolt) tömeg kvadrupól-momentum hatásait (kvadrupól-monopól kölcsönhatás) is figyelembe vettem. A C-ben fejlesztett program jelenleg a LALSuite (LIGO Scientific Collaboration Algorithm Library Suite / LIGO Tudományos Együttműködés algoritmus könyvtár) szerves része. A program segítségével megvizsgáltam, hogy milyen konfigurációkban okoz jelentős különbséget a tömeg kvadrupól-momentum, és ezeket a különbséget kvantitatív mérőszámok formájában adtam meg.

## 2. Spin és quadrupól-monopól effektusok

A gravitációs sugárzás hatására a bespirálózó kompakt égitestek kettős rendszerei (továbbiakban kompakt kettősök) a keringésük folyamán energiát veszítenek, aminek következtében csökken a közöttük lévő távolság, keringési pályájuk frekvenciája pedig növekszik, végül összeolvadnak.

A kompakt kettősök a fejlődésük alatt három szakaszon haladnak keresztül:

1. bespirálozás (inspiral): a kompakt objektumok csökkenő sugarú pályán keringenek a gravitációs hullámok formájában kisugárzott energia miatt.
2. összeolvadás (merger): a kompakt objektumok olyan közel kerültek egymáshoz, hogy nem lehet megkülönböztetni őket
3. lecsengés (ringdown): a kompakt objektumok összeolvadtak, a rendszer egyensúlyra törekszik

A kompakt kettősök fejlődését le lehet írni numerikus módszerekkel, de ezek idő és számítás igényesek. Az első és harmadik fázis leírására léteznek nem numerikus módszerek is, ezek közül a poszt-newtoni közelítés a bespirálozás szakaszának leírására szolgál. Ez a közelítés a  $v^2/c^2 \ll 1$ ,  $Gm/rc^2 \ll 1$  tartományban érvényes, ahol  $\mathbf{r}$  a szeparációs vektor, és  $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$ . A vezető rendű gravitációs sugárzás gyorsabban csökkenti a pálya excentricitását mint a szeparációs vektort, ezért körpályás közelítést alkalmazhatunk[1]. A kvadrupól-monopól hatás tanulmányozását erre a szakaszra korlátoztam le. A további képletekben a  $G = c = 1$  konvenciót használom.

A poszt-newtoni tartományban a kompakt kettősöket leíró egyenletek közül a pálya körfrekvenciájának időfejlődését leíró egyenlet 3.5PN rendig ismert, míg a precessiót leíró egyenletek csak 2PN rendig ismertek. Mivel a vezetőrendű spin és kvadrupól-monopól effektusok a 2PN rendben jelennek meg, az összes egyenletet 2PN rendig adom meg. A kompakt kettősök dinamikája 2PN rendig konzervatív, a legalacsonyabb sugárzási járulék 2.5PN rendnél jelentkezik, ezért a rendszer  $\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2$  teljes impulzusnyomatéka megmarad.

A gravitációs sugárzás két polarizációs hullámból tevődik össze, ezeket plusz és kereszt polarizációknak nevezzük.

$$\begin{aligned} h_+ &= a_1 \cos(2\alpha) \cos(2\phi) - a_2 \sin(2\alpha) \sin(2\phi) \\ h_\times &= a_1 \sin(2\alpha) \cos(2\phi) + a_2 \cos(2\alpha) \sin(2\phi) \end{aligned} \quad (1)$$

ahol  $\alpha = \arctan\left(\frac{\hat{\mathbf{L}}_x}{\hat{\mathbf{L}}_y}\right)$ ,  $\phi$  a hullám fázisa, az  $A$  newtoni amplitúdóval a hullám amplitúdói pedig

$$a_1 = -0.5A(M\omega)^{2/3}(1 + \cos^2\iota), \quad a_2 = -A(M\omega)^{2/3}\cos\iota \quad (2)$$

ahol a  $\iota$  a pálya impulzusnyomatékának az inklinációja a sugárzási rendszerben megadva.

A kompakt kettős rendszerek a bespirálozás teljes ideje alatt jellemezhetők a rendszer  $M = m_1 + m_2$  össztömegével,  $\eta = m_1 m_2 / M^2$  szimmetrikus tömegarányával, a pálya  $\omega$  körfrekvenciájával, a pálya  $\Phi$  fázisával, a pálya impulzusnyomatékának  $\hat{\mathbf{L}}$  irányával, valamint a két objektum tömegre normált spinvektorával  $\boldsymbol{\chi}_1$  és  $\boldsymbol{\chi}_2$ , melyekre fennáll, hogy  $\boldsymbol{\chi}_i = \chi_i \hat{\boldsymbol{\chi}}_i = \mathbf{S}_i / m_i^2$ .

Egy spin nélküli kompakt kettős pályájának körfrekvencia-változása  $d\omega/dt$  a poszt-newtoni közelítésben a newtoni (0PN), az 1PN és a 2PN-es rendből tevődik össze. Az olyan kettősöknél, amelyek rendelkeznek spinnel és tömeg kvadrupól-momentummal, a rendszer pálya körfrekvenciájának  $d\omega/dt$  változásához még hozzáadódnak a pálya impulzusnyomatékának [2], [3] és a spinek kölcsönhatásából [2], [3], a spinek kölcsönhatásából, a spinek önmagukra hatásából[5], [6] és a kvadrupól kölcsönhatásából származó tagok[6]. A kvadrupól kölcsönhatást mint kvadrupól-monopól kölcsönhatást vesszük figyelembe, vagyis az egyik objektumot pontszerű próbatestnek tekintjük a másik, kvadrupól-momentummal rendelkező objektum terében, és fordítva.

$$\begin{aligned} \frac{d\omega}{dt} = \frac{96\eta}{5M^2} (M\omega)^{11/3} & \left[ 1 - \left( \frac{743 + 924\eta}{336} \right) (M\omega)^{2/3} + (4\pi + \sigma_{SO}) (M\omega)^{3/3} + \right. \\ & \left. + \left( \frac{34103}{18144} + \frac{13661}{2016}\eta + \frac{59}{18}\eta^2 + \sigma \right) (M\omega)^{4/3} \right] \end{aligned} \quad (3)$$

ahol a  $\sigma$  spines korrekcióra felírható

$$\sigma = \sigma_{SS} + \sigma_{SELF} + \sigma_{QM} \quad (4a)$$

$$\sigma_{SO} = -\frac{1}{12M^2} \sum_{i=1}^2 \chi_i \left( 113 + 75 \frac{m_j}{m_i} \right) \left( \hat{\mathbf{L}} \hat{\boldsymbol{\chi}}_i \right) \quad (4b)$$

$$\sigma_{SS} = \frac{\eta \chi_1 \chi_2}{48} \left[ 721 \left( \hat{\mathbf{L}} \hat{\boldsymbol{\chi}}_1 \right) \left( \hat{\mathbf{L}} \hat{\boldsymbol{\chi}}_2 \right) - 247 \left( \hat{\boldsymbol{\chi}}_1 \hat{\boldsymbol{\chi}}_2 \right) \right] \quad (4c)$$

$$\sigma_{SELF} = \frac{1}{96M^2} \sum_{i=1}^2 \chi_i^2 m_i \left[ 7 - \left( \hat{\mathbf{L}} \hat{\boldsymbol{\chi}}_i \right)^2 \right] \quad (4d)$$

$$\sigma_{QM} = -\frac{5}{2M^2} \sum_{i=1}^2 w_i (\chi_i m_i)^2 \left[ 1 - 3 \left( \hat{\mathbf{L}} \hat{\boldsymbol{\chi}}_i \right)^2 \right] \quad (4e)$$

valamint a precessziós egyenletekkel

$$\frac{d\hat{\boldsymbol{\chi}}_i}{dt} = \frac{1}{M} \mathbf{X}_{iSO} (M\omega)^{5/3} + \frac{1}{M} (\mathbf{X}_{iSS} + \mathbf{X}_{iQM}) (M\omega)^{6/3} \quad (5a)$$

$$\mathbf{X}_{iSO} = \frac{\eta}{2} \left( 4 + 3 \frac{m_j}{m_i} \right) \left( \hat{\mathbf{L}} \times \hat{\boldsymbol{\chi}}_i \right) \quad (5b)$$

$$\mathbf{X}_{iSS} = \frac{1}{2} \frac{\chi_j m_j^2}{M^2} \left[ \hat{\boldsymbol{\chi}}_j - 3 \left( \hat{\mathbf{L}} \hat{\boldsymbol{\chi}}_j \right) \hat{\mathbf{L}} \right] \times \hat{\boldsymbol{\chi}}_i \quad (5c)$$

$$\mathbf{X}_{iQM} = -\frac{3}{2} \eta \chi_i w_i \left( \hat{\mathbf{L}} \hat{\boldsymbol{\chi}}_i \right) \left( \hat{\mathbf{L}} \times \hat{\boldsymbol{\chi}}_i \right) \quad (5d)$$

először tekintjük az egyik objektumot, mint pontszerű próbatest a másik objektum kvadrupól terében és fordítva. A (4e) és (5d) egyenletekben lévő  $w$  paraméter neutroncsillagoknál  $w = 4 \div 8$  között változik[7], míg fekete-lyukaknál az értéke  $w = 1$  [8].

A  $\mathbf{J}$  állandóságából következik, hogy

$$\frac{d\hat{\mathbf{L}}}{dt} = \sum_i -\frac{1}{\eta} \frac{\chi_i m_i^2}{M^2} \frac{d\hat{\boldsymbol{\chi}}_i}{dt} \quad (6)$$

A gravitációs hullám fázisára pedig felírhatjuk, hogy

$$\frac{d\phi}{dt} = \omega - \frac{d\alpha}{dt} \cos \iota \quad (7)$$

### 3. "Matched filtering" módszer a gravitációs hullámok detektálásánál

A gravitációs hullámok közvetlen észlelésére felszíni lézeres interferométereket használnak. A detektorok által érzékelt jelekben a gravitációs hullám mellett rengeteg a zaj, ami jelentősen megnehezíti a gravitációs hullámok detektálását. Annak a megállapítására, hogy a zajos jelben egy adott hullámforma mekkora valószínűséggel található meg, a "matched filtering" módszerét használják.

Tekintsük két időtartománybeli hullámformát,  $h_1$ -et és  $h_2$ -et, ekkor a belső szorzatukat így definiáljuk[9]:

$$\langle h_1|h_2 \rangle = 4\Re \int_{f_{min}}^{f_{max}} \frac{\tilde{h}_1(f)\tilde{h}_2^*(f)}{S_h(f)} df \quad (8)$$

ahol az  $[f_{min}, f_{max}]$  tartományt a detektor érzékenysége határozza meg,  $\tilde{h}(f)$  pedig a megfelelő hullámforma Fourier transzformáltja,  $\Re$  pedig a reális részt jelöli.  $S_h(f)$  a detektor PSD-je (power spectrum density) teljesítmény spektrum sűrűség. Az irodalom szerint két hullámforma összehasonlításánál a jel amplitúdója nem fontos, így használhatunk normált hullámformákat  $e = h/\langle h|h \rangle$ . Ekkor a két hullámforma közötti overlap (átfedés):

$$O[e_1, e_2] = \langle e_1|e_2 \rangle \quad (9)$$

Két külső paramétere van a jelnek, a  $t_0$  megérkezési ideje és a  $\Phi$  kezdeti fázisa, amikor eléri a detektor érzékenységi tartományát.

Először tekintsük az időre való maximalizált két mintajel között:

$$\max_{t_0} O[e_1, e_2] = \max_{t_0} \langle e_1|e_2 \rangle \quad (10)$$

Ekkor a (10) egyenletben az időre való maximalizálást úgy kell érteni, mint a legnagyobb átfedés a  $h_1$  és  $h_2$  jelek között úgy, hogy csúsztatjuk a jelet az időben:  $h(t) \rightarrow h(t+t_0)$ , ami azt eredményezi, hogy a belső szorzat helyett Fourier transzformáltat kell használnunk.

$$\max_{t_0} \langle e_1|e_2 \rangle = \max_{t_0} 4\Re \int_{f_{min}}^{f_{max}} \frac{\tilde{e}_1(f)\tilde{e}_2^*(f)e^{2\pi i f t_0}}{S(f)} df \quad (11)$$

Egy tetszőleges  $\Phi$  kezdeti fázisú hullámot felírhatjuk

$$\tilde{h}(f) = \tilde{h}_+(f) \cos \Phi + \tilde{h}_\times(f) \quad (12)$$

alakban. A fázisra való maximalizálást a következőképp vehetjük figyelembe:

$$M_{typ} = \max_{t_0} \max_{\Phi_2} O[e_{1+}, e_2] \approx \max_{t_0} \sqrt{O[e_{1+}, e_{2+}]^2 + O[e_{1+}, e_{2\times}]^2} \quad (13)$$

ahol feltettük, hogy  $e_{2+}$  és  $e_{2\times}$  közel ortogonálisak. Az esetleges hibák elkerülése miatt új ortogonális bázist vezetünk be:

$$e_\perp = e_\times - e_+ \frac{\langle e_+|e_\times \rangle}{\langle e_+|e_+ \rangle} \quad (14)$$

Ekkor felírhatjuk

$$M_{typ} \equiv \max_{t_0} \max_{\Phi_2} O[e_{1+}, e_2] \approx \max_{t_0} \sqrt{O[e_{1+}, e_{2+}]^2 + O[e_{1+}, e_{2\perp}]^2} \quad (15)$$

## 4. LALSuite programcsomag(SpinTaylor)

A detektorok által észlelt gravitációs hullámok analízisével, illetve az ehhez szükséges hardveres és szoftveres infrastruktúra kiépítésével az LSC (LIGO Scientific Collaboration) foglalkozik. Az általuk fejlesztett LALSuite (LSC Algorithm Library Suite) programcsomag gravitációs hullámformák generálására, azok vizsgálatára és gravitációs hullámok analízisére szolgáló programok összessége. A programcsomag dokumentációját, letöltési lehetőségét és telepítési útmutatóját a <https://www.lsc-group.phys.uwm.edu/daswg/projects/lalsuite.html> oldalon lehet megtalálni.

Hullámformák generálására csak három komponens szükséges:

- LAL (alapsomagok)
- LALMetaIO (kimenet-bemenet kezelése)
- LALInspiral (bespirálózó és lecsengő hullámformák generálása)

### 4.1. Telepítés Linux operációs rendszer alá (Ubuntu)

A program fejlesztése szempontjából előnyös a lehető legfrissebb változat használata. A következőkben ezt figyelembe véve leírom az általam használt három komponens telepítési folyamatát Ubuntu operációs rendszer alá.

A telepítés elkezdése előtt az operációs rendszert elő kell készíteni, segédprogramokat telepíteni és környezeti változókat beállítani.

```
$ sudo aptitude install build-essential automake autoconf
  libtool devscripts
$ echo "export LSCSOFT_SRCDIR=\${LSCSOFT_SRCDIR:-\`$HOME/
  workspace/lscsoft\`}">>$HOME/.bashrc
$ echo "export PROGS=\${LSCSOFT_SRCDIR:-\`$HOME/progs/dev
  \`}">>$HOME/.bashrc
$ mkdir -p $PROGS
$ mkdir -p $LSCSOFT_SRCDIR
```

Szükséges még a metaio csomag a <https://www.lsc-group.phys.uwm.edu/daswg/projects/metaio.html> oldalról.

```
$ tar -zxvf metaio-8.2.tar.gz
$ cd metaio-8.2
$ mkdir $LSCSOFT\_ROOTDIR/metaio
$ CPPFLAGS=-std=gnu99 ./configure --prefix=$LSCSOFT\_ROOTDIR/
  metaio
$ make install
```

A programcsomag legfrissebb változatát legegyszerűbben az LSC LALSuite git repository-jának klónozásával lehet elérni.

```
$ cd $LSCSOFT_SRCDIR
$ git clone git://ligo-vcs.phys.uwm.edu/lalsuite.git
```

Az alapsomagok telepítése:

```
$ echo "export LSCSOFT_ROOTDIR=${LSCSOFT_ROOTDIR:-\"$PROGS/
  lscsoft\"}">>$PROGS/lalsuite_Init.sh
$ echo "export LAL=${LAL:-\"$LSCSOFT_ROOTDIR/lal\"}">>$PROGS
  /lalsuite_Init.sh
$ cd $LSCSOFT_SRCDIR/lalsuite/lal
$ ./00boot
$ ./configure --prefix=$LAL
$ make install
$ echo "export LAL_LOCATION=${LSCSOFT_LOCATION}/lal">>$PROGS/
  lalsuite_Init.sh
$ echo "if [ -f \"${LAL_LOCATION}/etc/lal-user-env.sh\" ]; then
  ">>$PROGS/lalsuite_Init.sh
$ echo "  source $LAL_LOCATION/etc/lal-user-env.sh;">>$PROGS/
  lalsuite_Init.sh
$ echo "fi;">>$PROGS/lalsuite_Init.sh
```

A LALMETAIO és a LALINSPIRAL telepítése ugyanezek a parancsokkal történik, csak a LAL, lal helyett LALMETAIO-t, lalmetaio-t, illetve LALINSPIRAL-t, lalinspiral-t kell használni.

A telepítés után pedig még meg kell mondani az operációs rendszernek, hogy hova telepítettük a programokat:

```
$ echo "source $PROGS/lalsuite_Init.sh">>$HOME/.bashrc
$ echo "export PKG_CONFIG_PATH=$LSCSOFT_ROOTDIR/metaio/lib/
  pkgconfig">>$HOME/.bashrc
$ echo "export PKG_CONFIG_PATH+=$LAL/lib/pkgconfig">>$HOME/.
  bashrc
$ echo "export PKG_CONFIG_PATH+=$LALMETAIO/lib/pkgconfig">>
  $HOME/.bashrc
$ echo "export PKG_CONFIG_PATH+=$LALINSPIRAL/lib/pkgconfig">>
  $HOME/.bashrc
$ sudo echo "$LAL/lib">>/etc/ld.so.conf.d
$ sudo echo "$LALMETAIO/lib">>/etc/ld.so.conf.d
$ sudo echo "$LALINSPIRAL/lib">>/etc/ld.so.conf.d
$ sudo ldconfig
```



## 4.2. SpinTaylor

A LALSuite-ban a hullámformák előállítására használt legelfogadottabb program a SpinTaylor. A (3) körfrekvencia 3.5PN rendig van benne leprogramozva és 2PN rendig tartalmazza a pálya impulzusnyomatéka és a spinek közötti (4b), és a két spin közötti (4c) kölcsönhatás korrekcióját is.

A programcsomag tartalmaz egy `\$LSCSOFT\_SRCDIR/lalsuite/lalinspiral/test/LALSTPNWaveformTest.c` mintafájlt, ami bemutatja, hogyan kell meghívni a SpinTaylor programot hullámformák generálására:

```
01 static LALStatus status;
02 CoherentGW      waveform;
03 SimInspiralTable injParams;
04 PPNParamStruc  ppnParams;

11 memset(&status, 0, sizeof(LALStatus));
12 memset(&waveform, 0, sizeof(CoherentGW));
13 memset(&injParams, 0, sizeof(SimInspiralTable));
14 memset(&ppnParams, 0, sizeof(PPNParamStruc));

// paraméterek átadása

21 LALSprintf(injParams.waveform, LIGOMETA_WAVEFORM_MAX *
    sizeof(CHAR), "SpinTaylortwoPN");
22 LALGenerateInspiral(&status, &waveform, &injParams, &
    ppnParams);

// hullámforma használata
// a hullámformát tartalmazó waveform memóriájának felszabadítása
```

A SpinTaylor programot a `\$LSCSOFT\_SRCDIR/lalsuite/lalinspiral/src/LALSTPNWaveform.c` fájl tartalmazza.

### 4.3. SpinQuadTaylor

Elméleti vizsgálatok azt mutatják, hogy a kompakt kettősöknek van olyan paraméter-tartományuk, ahol a gravitációs hullámban figyelembe kell venni a kvadrupól-monopól kölcsönhatást a pálya impulzusnyomaték és spin-spin kölcsönhatások mellett. Hogy tanulmányozhassam a kvadrupól-monopól kölcsönhatást, megírtam a SpinQuadTaylor programot. A program a LALSuite programcsomag része, így ha a "Telepítés Linux operációs rendszer alá (Ubuntu)" fejezetben leírt módon telepítették a programcsomagot, akkor a SpinQuadTaylort is feltelepítették.

A program a körfrekvenciát (3) 3.5PN rendig tartalmazza, valamint a a (4b) spin-pálya impulzusnyomaték, és a (4c) spin-spin kölcsönhatások mellett tartalmazza a a (4d) önspin és (4e) kvadrupól-monopól kölcsönhatásokat is.

A SpinQuadTaylor használatát bemutató mintafájl a `$LSCSOFT_SRC_DIR/lalsuite/lalinspiral/test/LALSQTPNWaveformTest.c` helyen található.

```
01 static LALStatus status;
02 CoherentGW      waveform;
03 SimInspiralTable injParams;
04 PPNParamStruc  ppnParams;

11 memset(&status, 0, sizeof(LALStatus));
12 memset(&waveform, 0, sizeof(CoherentGW));
13 memset(&injParams, 0, sizeof(SimInspiralTable));
14 memset(&ppnParams, 0, sizeof(PPNParamStruc));

// paraméterek átadása

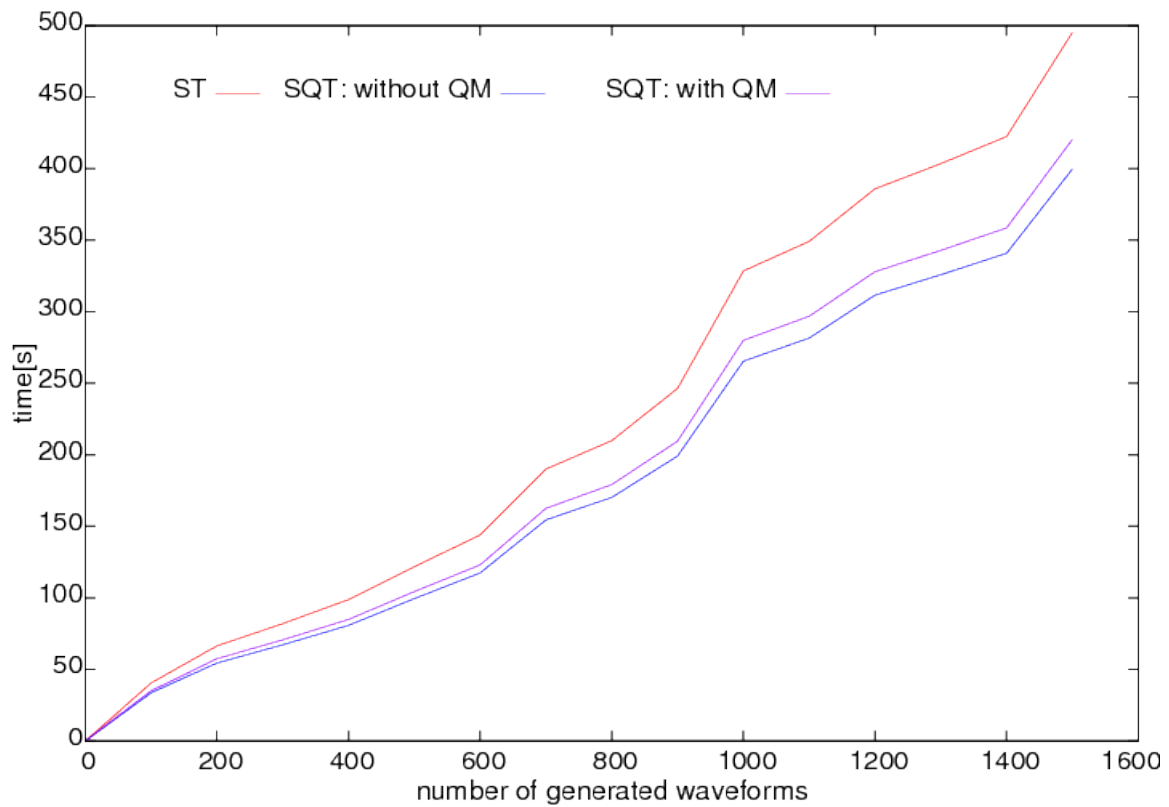
21 LALSfprintf(injParams.waveform, LIGOMETA_WAVEFORM_MAX *
    sizeof(CHAR), "SpinQuadTaylortwoPNALL");
22 LALGenerateInspiral(&status, &waveform, &injParams, &
    ppnParams);

// hullámforma használata

31 XLALSQTPNDestroyCoherentGW(&waveform);
```

A SpinQuadTaylort a `\$LSCSOFT\_SRC\_DIR/lalsuite/lalinspiral/src/` könyvtárban lévő `LALSQTPNWaveform.c`, `LALSQTPNWaveformInterface.c` és a `LALSQTPNIntegrator.c` forrásfájlok, valamint a megfelelő fejlécfájlok tartalmazzák.

A detektorok folyamatos működésük alatt óriási adatmennyiséget állítanak elő igen rövid idő alatt. Hogy minél több adatot elemezhesünk, nagyon fontos, hogy a használt programoknak mekkora a futási idejük. Az ábrán látható, hogy ha a SpinQuadTaylor programmal ugyanazt a közelítést használjuk, mint ami SpinTaylor-ban van beprogramozva, vagyis csak a spin-pálya impulzusnyomaték és spin-spin kölcsönhatásokat vesszük figyelembe, a SpinQuadTaylor program gyorsabb a SpinTaylor programnál. Ha a kvadrupól-monopól kölcsönhatást is figyelembe vesszük, még akkor is jobb a SpinQuadTaylor időigénye.



1. ábra. a program időigénye.

#### LALSQTPNWaveform.c

```

/**
2  * @file LALSQTPNWaveform.c
  *      Contains the function definition to create GWforms.
4  * @author Laszlo Vereb
  * @date 2010.05.21.
6  */

8 #include <lal/LALSQTPNWaveform.h>
  #include <lal/LALSQTPNIntegrator.h>
10 #include <lal/LALSQTPNWaveformInterface.h>

12 NRCSID (LALSQTPNWAWEFORMC , "$Id LALSQTPN_Waveform.c$");

14 /**      The macro function calculates the scalar product of
  two vectors.
  * @param[in]  a1      : the left vector
16 * @param[in]  a2      : the right vector
  * @return    the product
18 */
  #define SCALAR_PRODUCT3(a1, a2) \
20      ((a1)[0] * (a2)[0] + (a1)[1] * (a2)[1] + (a1)[2] * (a2)
        [2]);

```

## 5. Eredmények

A kvadrupól-monopól kölcsönhatást speciális spinkonfigurációknál vizsgáltam úgy, hogy összehasonlítottam a csak spin-pálya impulzusnyomaték és spin-spin kölcsönhatást tartalmazó hullámformákat a kvadrupól-monopól kölcsönhatást is tartalmazó hullámformákkal. A kvadrupól-monopól kölcsönhatást tartalmazó hullámformát az általam írt SpinQuad-Taylor programmal generáltam, míg a csak spin kölcsönhatást tartalmazó hullámformát a SpinTaylor-ral. A hullámformák összehasonlítása céljából "Matched filtering" módszer a gravitációs hullámok detektálásánál fejezetben megadott  $M_{typ}$  "match" értékét számoltam, illetve megnéztem a hullámformák periódusainak a számát.

A bal oldali ábrákon a jel teljes hossza látható, míg a jobb oldalon az utolsó néhány periódus látható kinagyítva.

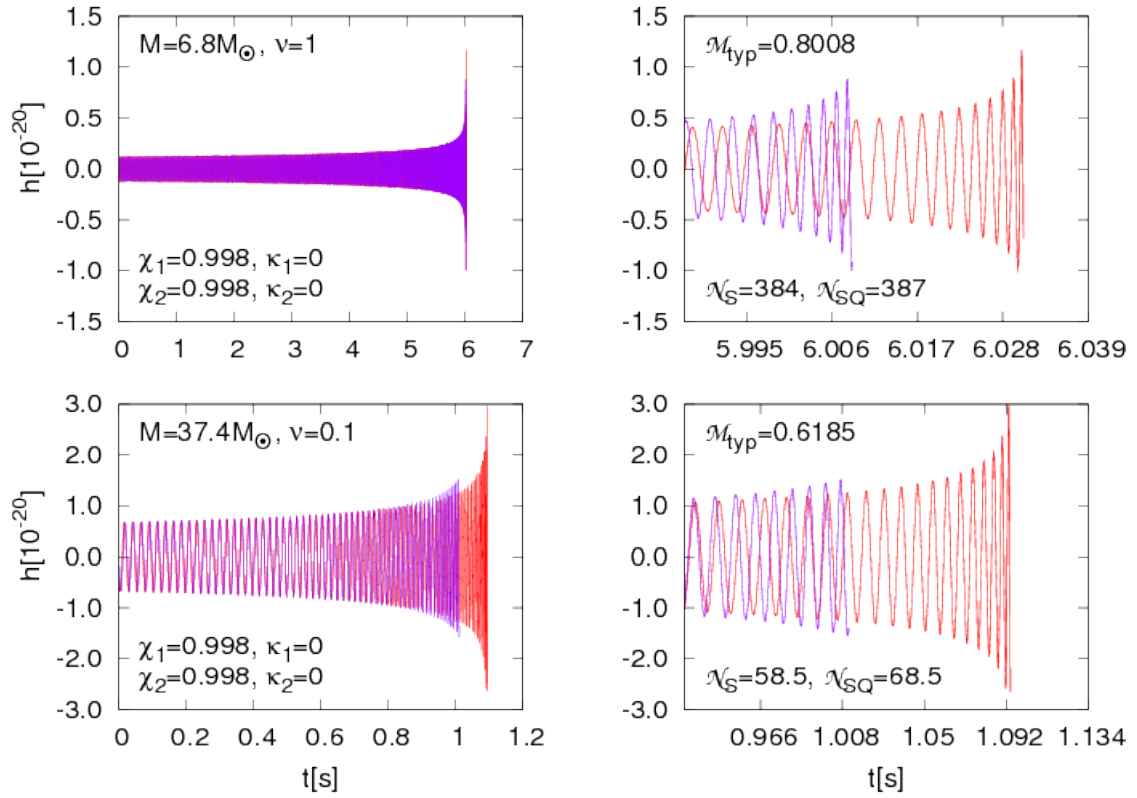
A következő konfigurációkat vizsgáltam:

1. a spinek merőlegesek a pálya síkjára és egy irányba mutatnak
2. a spinek a pálya síkjában vannak és ellentétes irányúak
3. a spinek a pálya síkjában vannak és merőlegesek egymásra
4. a spinek szimmetrikusak a pálya impulzusnyomatékára nézve, de nincsenek a pálya síkjában
5. a spinek ellentétes irányúak, de nincsenek a pálya síkjában, és nem merőlegesek rá
6. egy speciális spin-konfiguráció

$m_1[M_\odot]$	$m_2[M_\odot]$	$M[M_\odot]$	$\eta$	$\chi_i$	$w_i$	$\iota[rad]$	$d_L[Mps]$
34	3.4	37,4	0,08264	0,998	1	1,43	1
3,4	3.4	6,8	0,25	0,998	1	1,43	1

$\delta = \psi = \alpha = gms = 0 \text{ rad}$

1. táblázat. A hullámformák paraméterei



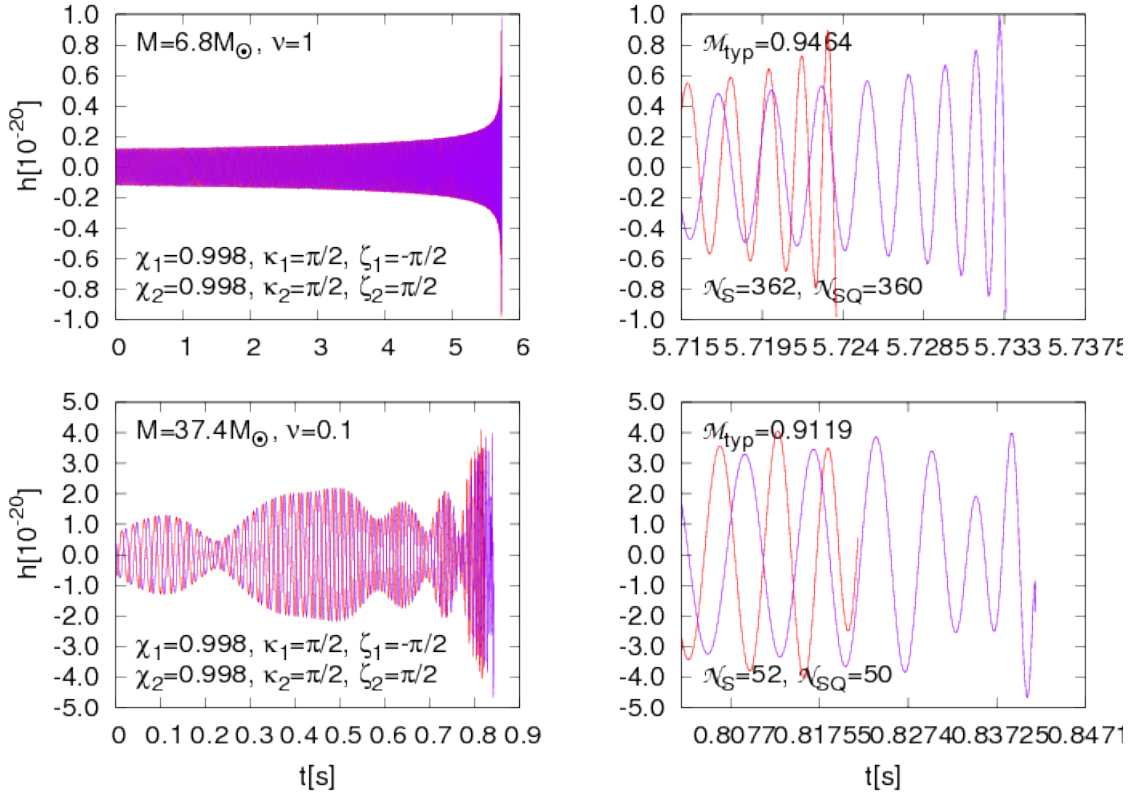
2. ábra. a spinek merőlegesek a pálya síkjára és egy irányba mutatnak

1. Az össztömeg növelésével a hullámforma hossza csökken.
2. Az össztömeg növelésével a hullámforma amplitúdója nő.
3. Az (5) egyenletek alapján, mivel a spinek párhuzamosak a pálya impulzusnyomatékával, nincs precesszió, és ezért amplitúdó moduláció sem.
4. A kvadrupól-monopól kölcsönhatás mind egyenlő, mind különböző tömegek esetén csökkenti a jel hosszát.
5. A kvadrupól-monopól kölcsönhatás növeli a periódusok számát, ez a jelenség nem egyenlő tömegeknél még látványosabb.
6. A kvadrupól-monopól kölcsönhatás különböző tömegeknél kisebb "match" értéket eredményez.

$$\sigma_{SS} = \frac{79}{8}\chi^2\eta; \quad \sigma_{QM} = 5\chi^2(1-2\eta); \quad \frac{\sigma_{SS}}{\sigma_{QM}} = \frac{79}{40} \frac{\eta}{1-2\eta} \quad (16)$$

$$1 > \left| \frac{\sigma_{SS}}{\sigma_{QM}} \right| \Rightarrow \eta < \frac{40}{159} = 0,25157 \quad (17)$$

Mivel  $0 < \eta \leq 0,25$ , semmilyen tömegaránynál nem hanyagolható el a kvadrupól-monopól kölcsönhatás ennél a konfigurációnál.

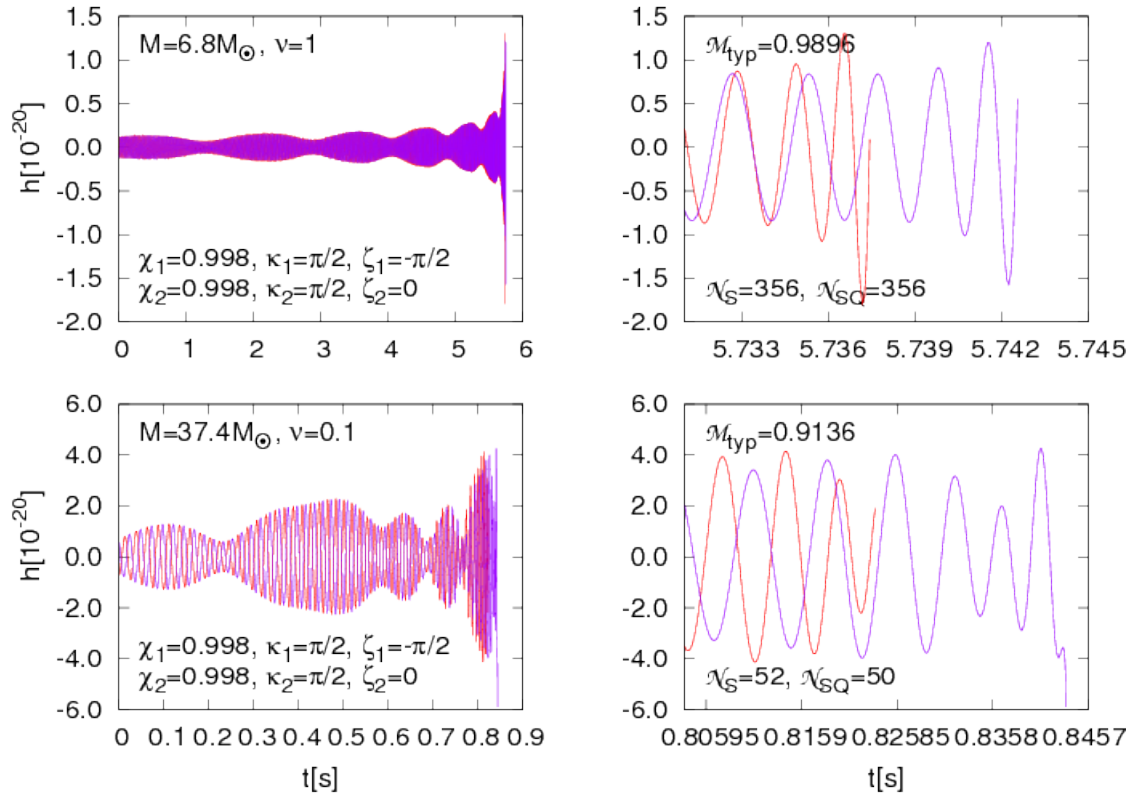


3. ábra. a spinek a pálya síkjában vannak és ellentétes irányúak

1. Az össztömeg növelésével a hullámforma hossza csökken.
2. Az össztömeg növelésével a hullámforma amplitúdója nő.
3. Mivel a spinek a pálya síkjába esnek és ellentétes irányúak, csak a spin-pálya impulzusnyomaték kölcsönhatás(5b) járul hozzá a precesszió jelenségéhez. Egyenlő tömegeknél azért nem jelentkezik amplitúdó moduláció, mert a két spin hatása, ellentétes irányuk miatt kiejtik egymást. Ez ellentétes azzal, az irodalomban lévő nézettel, hogy csak akkor nincs amplitúdó moduláció, ha nincs precesszió.
4. A kvadrupól-monopól kölcsönhatás mind egyenlő, mind különböző tömegek esetén növeli a jel hosszát.
5. A kvadrupól-monopól kölcsönhatás csökkenti a periódusok számát.
6. A kvadrupól-monopól kölcsönhatás különböző tömegeknél kisebb "match" értéket eredményez.

$$\sigma_{SS} = \frac{247}{48} \chi^2 \eta; \quad \sigma_{QM} = -\frac{5}{2} \chi^2 (1 - 2\eta); \quad \frac{\sigma_{SS}}{\sigma_{QM}} = -\frac{247}{120} \frac{\eta}{1 - 2\eta} \quad (18)$$

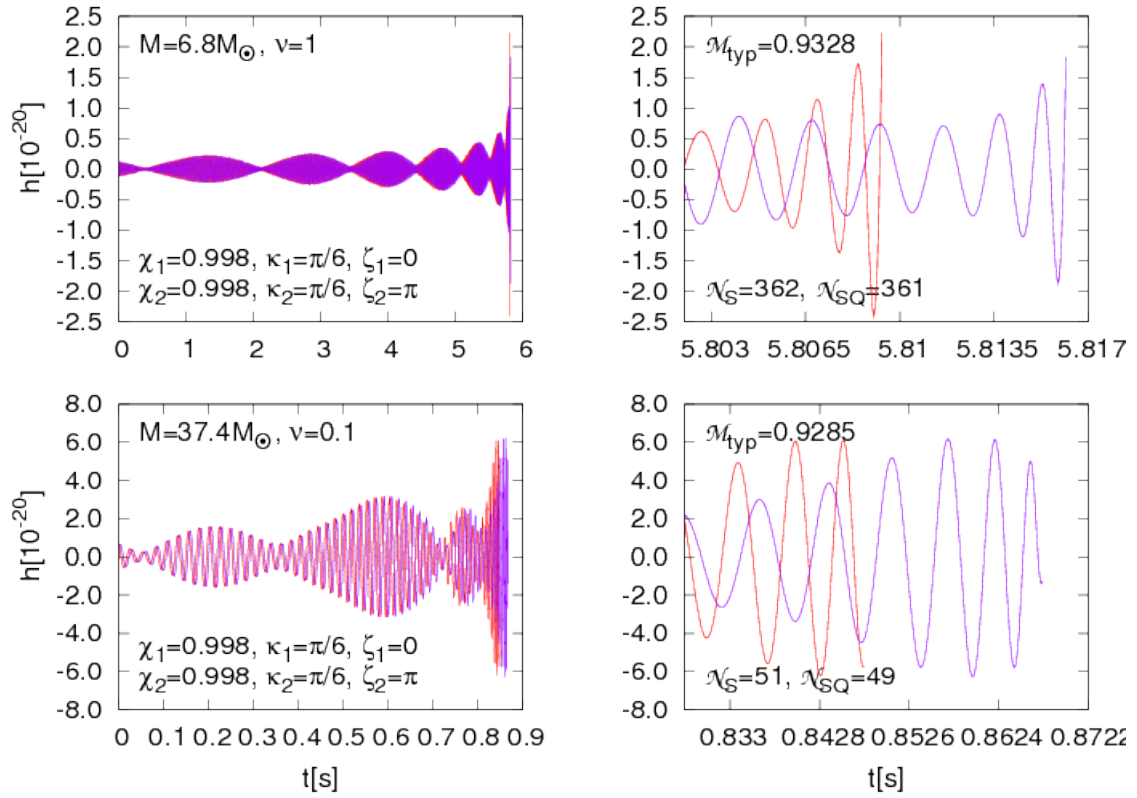
$$1 > \left| \frac{\sigma_{SS}}{\sigma_{QM}} \right| \Rightarrow \eta < \frac{120}{487} = 0,2464 \quad (19)$$



4. ábra. a spinek a pálya síkjában vannak és merőlegesek egymásra

1. Az össztömeg növelésével a hullámforma hossza csökken.
2. Az össztömeg növelésével a hullámforma amplitúdója nő.
3. Mivel a két spin merőlegesek és a pálya síkjában vannak, van precesszió és amplitúdó moduláció is.
4. A kvadrupól-monopól kölcsönhatás mind egyenlő, mind különböző tömegek esetén növeli a jel hosszát.
5. A kvadrupól-monopól kölcsönhatás csökkenti a periódusok számát nem egyenlő tömegeknél.
6. A kvadrupól-monopól kölcsönhatás különböző tömegeknél kisebb "match" értéket eredményez.

$$\sigma_{SS} = 0; \quad \sigma_{QM} = -\frac{5}{2}\chi^2(1-2\eta) \Rightarrow \eta \neq 0,5 \quad (20)$$



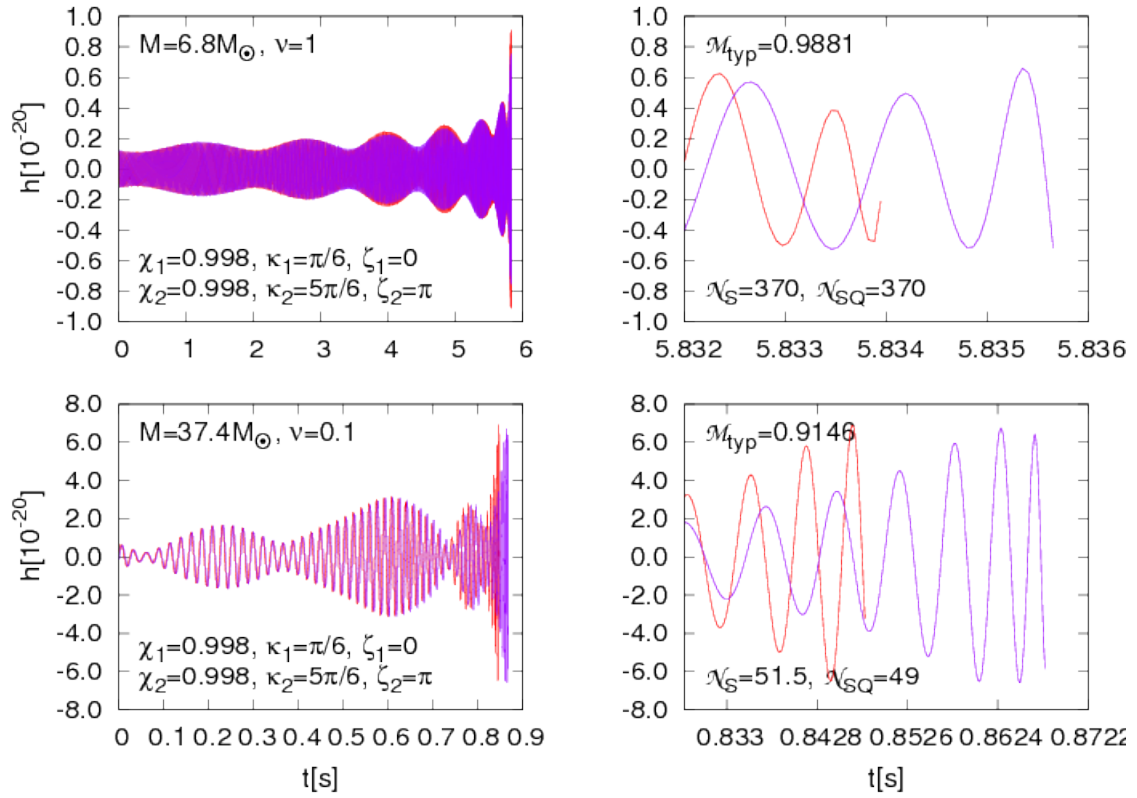
5. ábra. a spinek szimmetrikusak a pálya impulzusnyomatékára nézve, de nincsenek a pálya síkjában

1. Az össztömeg növelésével a hullámforma hossza csökken.
2. Az össztömeg növelésével a hullámforma amplitúdója nő.
3. Mivel a két spin nullánál nagyobb szöget zárnak be a pálya impulzusnyomatékával, van precesszió és amplitúdó moduláció is.
4. A kvadrupól-monopól kölcsönhatás mind egyenlő, mind különböző tömegek esetén növeli a jel hosszát.
5. A kvadrupól-monopól kölcsönhatás csökkenti a periódusok számát, nem egyenlő tömegeknél ez még látványosabb.
6. A kvadrupól-monopól kölcsönhatás különböző tömegeknél kisebb "match" értéket eredményez.

$$\sigma_{SS} = \frac{1669}{192} \chi^2 \eta; \quad \sigma_{QM} = \frac{25}{8} \chi^2 (1 - 2\eta); \quad \frac{\sigma_{SS}}{\sigma_{QM}} = \frac{1669}{600} \frac{\eta}{1 - 2\eta} \quad (21)$$

$$1 > \left| \frac{\sigma_{SS}}{\sigma_{QM}} \right| \Rightarrow \eta < \frac{600}{2869} = 0,20913 \quad (22)$$



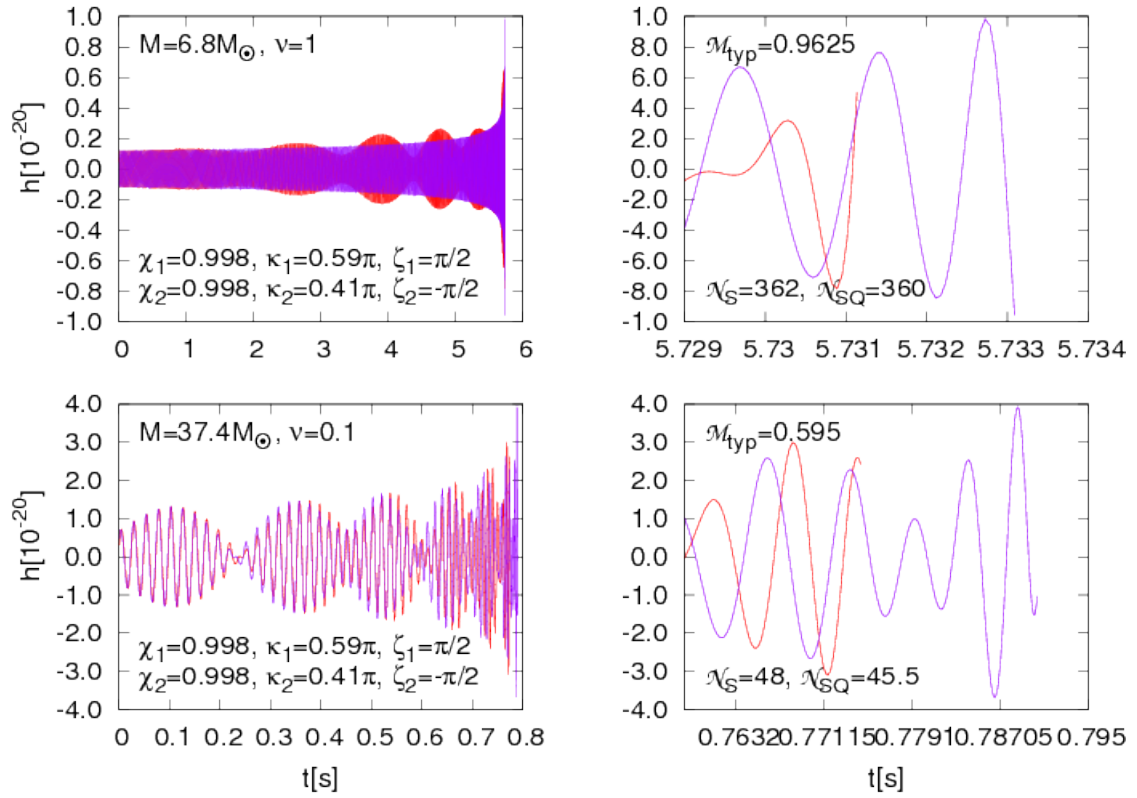


6. ábra. a spinek ellentétes irányúak, de nincsenek a pálya síkjában, és nem merőlegesek rá

1. Az össztömeg növelésével a hullámforma hossza csökken.
2. Az össztömeg növelésével a hullámforma amplitúdója nő.
3. Mivel a két spin nullánál nagyobb szöget zárnak be a pálya impulzusnyomatékával, van precesszió és amplitúdó moduláció is.
4. A kvadrupól-monopól kölcsönhatás mind egyenlő, mind különböző tömegek esetén növeli a jel hosszát.
5. A kvadrupól-monopól kölcsönhatás csökkenti a periódusok számát nem egyenlő tömegeknél.
6. A kvadrupól-monopól kölcsönhatás különböző tömegeknél kisebb "match" értéket eredményez.

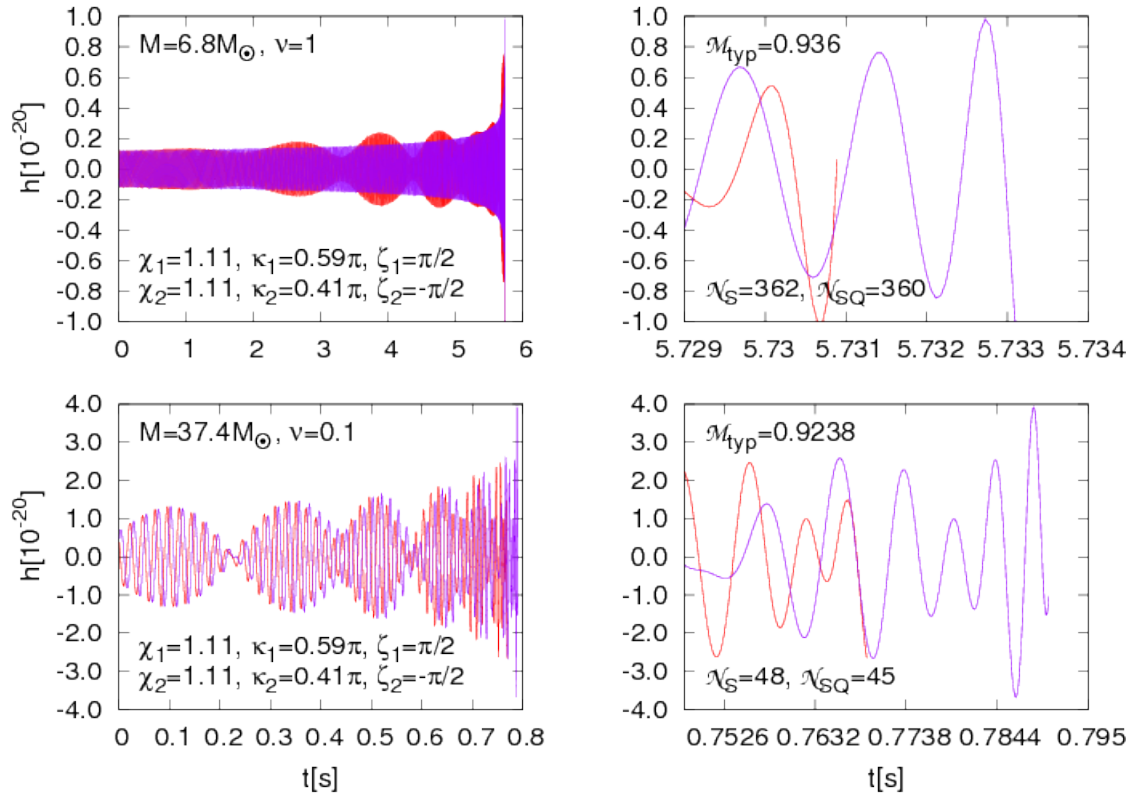
$$\sigma_{SS} = -\frac{1175}{192}\chi^2\eta; \quad \sigma_{QM} = \frac{25}{8}\chi^2(1-2\eta); \quad \frac{\sigma_{SS}}{\sigma_{QM}} = \frac{47}{24}\frac{\eta}{1-2\eta} \quad (23)$$

$$1 > \left| \frac{\sigma_{SS}}{\sigma_{QM}} \right| \Rightarrow \eta < \frac{24}{95} = 0,25263 \quad (24)$$



7. ábra. speciális spinkonfiguráció 1:  $\kappa_1 = 0,59\pi$ ,  $\kappa_2 = 0,41\pi$ ,  $\psi_1 = \pi/2$ ,  $\psi_2 = -\pi/2$

1. Az össztömeg növelésével a hullámforma hossza csökken.
2. Az össztömeg növelésével a hullámforma amplitúdója nő.
3. Mivel a két spin nullánál nagyobb szöget zárnak be a pálya impulzusnyomatékával, van precesszió és amplitúdó moduláció is. Egy érdekes jelenséget figyelhetünk meg egyenlő tömegnél, a kvadrupól-monopól kölcsönhatás figyelembe vételével az amplitúdó moduláció eltűnik.
4. A kvadrupól-monopól kölcsönhatás mind egyenlő, mind különböző tömegek esetén növeli a jel hosszát.
5. A kvadrupól-monopól kölcsönhatás csökkenti a periódusok számát, nem egyenlő tömegnél ez még látványosabb.
6. A kvadrupól-monopól kölcsönhatás különböző tömegeknek kisebb "match" értéket eredményez.



8. ábra. speciális spinkonfiguráció 2:  $\kappa_1 = 0,59\pi$ ,  $\kappa_2 = 0,41\pi$ ,  $\psi_1 = \pi/2$ ,  $\psi_2 = -\pi/2$

A kvadrupól-monopól kölcsönhatást is figyelembe vevő hullámforma spinjei  $\chi_i = 0,998$ , míg az azt figyelmen kívül hagyó hullámforma spinjei az ábrán feltüntetett  $\chi_i = 1,11$ .

1. Az össztömeg növelésével a hullámforma hossza csökken.
2. Az össztömeg növelésével a hullámforma amplitúdója nő.
3. Mivel a két spin nullánál nagyobb szöget zárnak be a pálya impulzusnyomatékával, van precesszió és amplitúdó moduláció is, mint a nem egyenlő tömegű esetén. Egy érdekes jelenséget figyelhetünk meg egyenlő tömegnél, a kvadrupól-monopól kölcsönhatás figyelembe vételével az amplitúdó moduláció eltűnik.
4. A kvadrupól-monopól kölcsönhatás mind egyenlő, mind különböző tömegek esetén növeli a jel hosszát.
5. A kvadrupól-monopól kölcsönhatás csökkenti a periódusok számát, nem egyenlő tömegeknél ez még látványosabb.
6. A kvadrupól-monopól kölcsönhatás különböző tömegeknél kisebb "match" értéket eredményez.
7. A kvadrupól-monopól kölcsönhatás figyelembe vehető a "match" érték szerint, akkor is, ha a hullámforma csak a spin-pálya impulzusnyomaték és spin-spin kölcsönhatást tartalmazza, ha megengedünk fizikailag értelmezhetetlen 1-nél nagyobb spin értékeket is.

## 6. Összefoglaló

Írtam egy hullámforma generáló programot SpinQuadTaylor néven, ami az eddig figyelembe vett pálya impulzusnyomaték-spin (4b), (5b), spin-spin (4c), (5c) kölcsönhatások mellett a kvadrupól-monopól hatást (4e), (5d) is tartalmazza.

A két hullámformát összehasonlítva azt tapasztaltam, hogy a kvadrupól-monopól hatás nem elhanyagolható a vele ugyanabba a poszt-newtoni rendbe eső spin-spin kölcsönhatás mellett.

- Minden konfigurációnál a kvadrupól-monopól kölcsönhatás megváltoztatta a jel hosszát, a precessziót eredményező konfigurációknál növelte, a precesszió nélküli konfigurációnál pedig csökkentette a hullámforma hosszát.
- Minden konfigurációnál a kvadrupól-monopól kölcsönhatás megváltoztatta a periódusok számát, a precessziót eredményező konfigurációknál csökkentette, a precesszió nélküli konfigurációnál pedig növelte a periódusok számát.
- Minden konfiguráció mellett a kvadrupól-monopól kölcsönhatás csökkentette a "match" értékét.

A 7 és 8 ábrán látható spinkonfigurációnál két érdekes esetet figyeltem meg:

- Egyenlő tömegek esetén a spin-spin és kvadrupól-monopól kölcsönhatás kioltják egymást az amplitúdó moduláció szempontjából.
- Nem egyenlő tömegek esetén a "match" érték jelentősen javult, amikor megengedtem a csak spin-pálya impulzusnyomaték és spin-spin kölcsönhatást tartalmazó, fekete lyuk által keltett hullámformánál megengedtem fizikailag értelmetlen, 1-nél nagyobb spin paraméter értéket is.

# Köszönetnyilvánítás

Köszönöm Gergely Á. Lászlónak, hogy részt vehettem a kutatásban, valamint a hasznos tanácsokat és instrukciókat.

Úgyszintén köszönöm Keresztes Zoltánnak is a tanácsait és instrukcióit.

## Hivatkozások

- [1] P. C. Peters, *Phys. Rev.* **136**, B1224 (1964).
- [2] L. E. Kidder, *Phys. Rev. D* **52**, 821 (1995)
- [3] B. M. Barker, R. F. O. Connel, *Phys. Rev. D* **12**, 329 (1975)
- [4] A. Buonanno, Y. Chen, M. Vallisner *Phys. Rev. D* **12**, 329 (1975)
- [5] L. Á. Gergely, *Phys. Rev. D* **61**, 024035 (2000)
- [6] B Mikóczi, M Vasúth, L Á. Gergely, *Phys. Rev. D* **71**, 124043 (2005)
- [7] E. Poisson, *Phys. Rev. D* **57**, 5287 (1998)
- [8] K. S. Throne, *Rev. Mod. Phys.* **52**, 299 (1980)
- [9] B. Vaishnav, I. Hinder, F. Herrmann, D. Shoemaker, *Phys. Rev. D* **76**, 084020 (2007).